大学数学

课程学习与考试指南

（理科类）

（第2版）

DAXUE SHUXUE
KECHENG XUEXI YU KAOSHI ZHINAN

莫智文　主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

大学数学课程学习与考试指南(理科类)

(第2版)

主　编　莫智文

副主编　谢寿才　曾永康

西南交通大学出版社

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

大学数学课程学习与考试指南. 理科类 / 莫智文主编.
2 版.—成都：西南交通大学出版社，2009.7
ISBN 978-7-5643-0282-5

Ⅰ. 大… Ⅱ. 莫… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 105587 号

大学数学课程学习与考试指南（理科类）

（第 2 版）

主编 莫智文

*

责任编辑 张宝华
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm×260 mm 印张：14.375
字数：361 千字 印数：6 001—9 000 册
2005 年 9 月第 1 版
2009 年 7 月第 2 版 2009 年 7 月第 3 次印刷
ISBN 978-7-5643-0282-5
定价：23.00 元

再版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们多年的教学经验，再参考国内外各优秀教材，进行了部分修订而成的．修改后，全书内容和系统更加合理与完整，更便于教学．

本书自 2005 年 6 月出版以来，得到了老师和学生们的好评．现借本书第二版出版之际，向使用本书的教师和学生对我们工作的支持和肯定表示感谢！向为本书出版而努力工作和为本书提出意见和建议的师生表示感谢！

新版中存在的问题，欢迎广大师生批评指正.

编　者

2009 年 5 月

前　言

《大学数学课程学习与考试指南》是根据四川师范大学非数学专业的教学大纲的要求编写的，旨在帮助学生加深理解基本概念、基本理论，准确地抓住解题关键，清晰地辨明解题思路．

本书包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计三个部分，分别以教材《高等数学》(第五版)——同济大学应用数学系主编、《线性代数》(第四版)——同济大学应用数学系主编、《概率论与数理统计》(第三版)——浙江大学盛骤等主编的知识内容框架为依托，以考试要求为方向编著的．本书在章节的编排上除高等数学部分将定积分及定积分的应用编排成一章以外，其余各部分及其章节在编排上均与教材保持同步．本书每一章都分为基本要求、知识要点、典型例题、习题，各章针对教学大纲列出考试的基本要求、需要掌握的各个知识要点，针对基本概念、基本理论、基本方法配备了典型例题，帮助学生加深理解基本概念、基本理论，引导学生分析题意，构造解题方法，纠正易见易犯错误，同时将该章与前面已学过的内容融会贯通在一起．为突出考试的重点，每章配备了一些习题供学生练习．

书中带“*”内容为理科二类选学内容．

该书由四川师范大学原基础部主任莫智文教授主持编写，高等数学、概率论与数理统计两部分由谢寿才老师编写，线性代数由曾永康老师编写，全书的统稿工作由莫智文教授完成．喻秉钧教授对全书的初稿进行了非常详细的审阅，提出了许多宝贵的修改意见，韩天勇老师对书稿的编排也做了不少的工作，在此表示诚挚地感谢．由于水平有限，不妥和错误之处在所难免，恳请读者和各位同仁批评指正．

作　者

2005 年 6 月

目　　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数与极限

一、基本要求

(1) 理解映射、函数、反函数、复合函数等概念，掌握函数的特性，能求函数的定义域.

(2) 理解极限、无穷小、无穷大、函数在一点的连续性及间断点等概念.

(3) 熟练掌握极限的运算法则，会求函数的极限.

(4) 了解极限存在的两个准则，能熟练利用两个重要极限求某些函数的极限.

(5) 知道极限与无穷小的关系，掌握无穷小的性质及无穷大与无穷小之间的关系.

(6) 掌握连续函数的四则运算、复合函数的连续性，了解闭区间上的连续函数的性质.

二、知识要点

1. 函　数

(1) 函数的定义及函数的三要素：定义域、值域、对应法则.

(2) 函数的特性：有界性、单调性、奇偶性、周期性.

(3) 反函数、基本初等函数及初等函数.

2. 极　限

(1) 数列极限的定义和性质.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

① 极限的唯一性. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则 $a=b$.

② 收敛数列的有界性. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\exists M>0$，使对一切 n，有 $|x_n|\leqslant M$.

(2) 函数极限的定义.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(3) 函数极限的性质：唯一性、有界性、保号性.

① 函数极限的唯一性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限唯一.

② 函数极限的局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<$

$|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

③ 函数极限的局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则 $\exists\,\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$).

(4) 无穷小、无穷大、无穷小的比较.

① 无穷小：如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

② 无穷大：如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

③ 无穷小的比较：设 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小.

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等阶的无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

④ 等价无穷小的性质：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha}$.

(5) 无穷小的性质，无穷小与无穷大之间的关系.

① 有限个无穷小之和、差是无穷小.

② 有限个无穷小之积是无穷小.

③ 有界函数与无穷小之积是无穷小.

④ 在自变量的同一变化过程中，无穷小的倒数(分母不为零)是无穷大；无穷大的倒数是无穷小.

(6) 两个有关极限的充要条件.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$$

$$\lim f(x)=a\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\ (\text{其中}\lim\alpha=0)$$

(7) 极限存在准则.

准则Ⅰ 如果数列 x_n，y_n 及 z_n 满足：

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

(8) 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

3. 函数的连续性及间断点

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点左连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点右连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

函数的不连续点称为函数的间断点.

(2) 间断点的分类.

① $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$存在不相等的间断点为跳跃间断点.

② $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$存在相等($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在)的间断点为可去间断点.

③ $f(x_0-0)$或 $f(x_0+0)$不存在的间断点为第二类间断点(如无穷间断点、振荡间断点等).

④ 跳跃间断点、可去间断点统称为第一类间断点.

(3) 连续函数的运算及初等函数的连续性.

① 连续函数的和、差、积、商(除去分母为 0 的点)仍是连续函数.

② 连续函数的复合函数也是连续函数.

③ 初等函数在其定义区间内连续.

(4) 闭区间上连续函数的性质.

① 最大、最小值定理：闭区间上的连续函数一定能取到最大值和最小值.

② 零点存在定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少 $\exists\,\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=0$.

③ 介值定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任意一个数 c，$\exists\,\xi\in(a, b)$，使 $f(\xi)=c$.

三、典型例题

例 1 函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{x^2+5x}{6}}$ 的定义域是________.

答案：$(-\infty, -6]\cup[1, +\infty)$.

例 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$，则函数 $f(x^2+3)$ 的定义域是________.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$，则要使 $f(x^2+3)$ 有定义，必须满足

$$0\leqslant x^2+3\leqslant 4 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$$

即 $x\in[-1, 1]$.

例 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，求 $f(x-a)+f(x+a)\ (a>0)$ 的定义域.

解 因函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，故要使函数 $f(x-a)+f(x+a)$ 有定义，必须满足

$$\begin{cases}0\leqslant x-a\leqslant 1\\0\leqslant x+a\leqslant 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a\leqslant x\leqslant 1+a\\-a\leqslant x\leqslant 1-a\end{cases}$$

即当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$a\leqslant x\leqslant 1-a$；当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=\dfrac{1}{2}$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为空集.

例 4 设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0$，$x\neq 1$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\frac{x-1}{x}$，有 $f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t}$，即

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x} \tag{1.1}$$

再令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$，即 $x=\frac{1}{1-u}$. 代入上式，得

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u}$$

即

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x} \tag{1.2}$$

由式(1.1)、(1.2)及原方程，得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$$

例 5 判别函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

解 因

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

故 $f(x)$是奇函数.

例 6 设对一切实数 x，有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，求 $f(x)$的周期.

解 因

$$f(x+1)=f\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)$$

由题设 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，故 $f(x)$的周期是 1.

例 7 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\frac{1}{n}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{95}\cdot(2x-1)^5}{(x^2+1)^{50}}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}\cdot 1\cdot 1=\mathrm{e}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{(x+1)^{95}(2x-1)^5}{x^{100}}}{\dfrac{(x^2+1)^{50}}{x^{100}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{95}\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)^5}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{50}}=2^5$.

例 8　计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)$．

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}\qquad (\text{因 } x\to 1,\ x\neq 1)$$

$$=-1.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{\pi x}{2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}=\frac{2}{\pi}.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}$$

$=\infty$（无穷小的倒数(分母不为 0)时，是无穷大)．

［评析］　以上几个极限都不能直接利用极限的四则运算法则来求，对“$\infty-\infty$”，“$0\cdot\infty$”，“$\dfrac{0}{0}$”等不定型，需采取对函数进行变换、配重要极限等方法来解决．

例 9　设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1,2,\cdots$)，证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限．

分析　此题利用极限存在准则“单调有界数列必有极限”来解决．

证　因 $0<x_1<3$，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}[x_1+(3-x_1)]=\frac{3}{2}$$

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}$，$k>1$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}[x_k+(3-x_k)]=\frac{3}{2}$$

即 $\{x_n\}$ 有界．

又因

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n}\right)=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0 \qquad (n>1)$$

即当 $n>1$ 时，$x_{n+1}\geqslant x_n$. 这说明$\{x_n\}$是单调数列.

由极限存在准则Ⅱ，数列$\{x_n\}$的极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，得当 $n\to\infty$时，有 $a=\sqrt{a(3-a)}\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$或 $a=0$，再加上当 $n>1$ 时，$x_{n+1}\geqslant x_n$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

例 10 讨论下列函数在点 $x=0$ 的连续性，并指明间断点的类型.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0);\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0).\end{cases}$

分析 本题可利用函数在一点的连续性的定义来解决.

解 (1) 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，又因

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}=0$$

所以
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)$$

即
$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

因此函数 $f(x)$在 $x=0$ 点连续.

(2) 因

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1,\qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1$$

则
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.一因此，函数 $f(x)$在 $x=0$ 点不连续，$x=0$ 是函数 $f(x)$的跳跃间断点.

例 11 设函数 $f(x)$满足 $f(x+t)=f(x)+f(t)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$t\in(-\infty,+\infty)$. 证明：若 $f(x)$在 $x=0$ 连续，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

分析 要证明 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，由连续性的定义，只需证明 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 由 $f(x)$在 $x=0$ 点的连续性，有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. 这样，只需要证 $f(0)=0$ 即可.

证明(略).

例 12 设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(常数). 证明：$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

分析 闭区间上的连续函数必有最大值与最小值，而本题$[a,+\infty)$为半无限区间. 因此将$[a,+\infty)$分成两个区间来考虑.

证 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，对 $\varepsilon=1$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1$$

成立．此时

$$|f(x)|=|[f(x)-A]+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$$

即 $f(x)$在$(X，+\infty)$上有界．

又由于 $f(x)$在$[a，X]\subset[a，+\infty)$上连续，由闭区间上连续函数的最值定理，$\exists m，M\in\mathbf{R}$，当 $x\in[a，X]$时，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，取 $K=\max\{|m|，|M|，1+|A|\}$，则有 $|f(x)|\leqslant K$，$x\in[a，+\infty)$，即 $f(x)$在$[a，+\infty)$上有界．

四、习题一

1. 填空题：

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1),\\ 0 & (|x|>1),\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$__________．

(2) 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$，则 $a=$__________，$b=$__________．

(3) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b\right)=0$，则 $a=$__________，$b=$__________．

(4) 设 $f(x)=\sqrt[x]{1-2x}$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________．

(5) 如果函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+a & (x<0),\\ e^x+1 & (x\geqslant 0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$__________．

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3}-1)\sin\dfrac{n^2+1}{n+1}=$__________．

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=$__________．

(8) 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________．

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2} & (x\neq 0),\\ a & (x=0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$__________．

(10) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$的间断点为__________．

2. 计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos 3x}{x+\sin 3x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$．

3. 讨论题．

(1) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x+1} & (x<-1)\\ a & (x=-1)\\ \dfrac{\sin 3(x+1)}{x+1} & (x>-1)\end{cases}$$

在点 $x=-1$ 的连续性．

（2）当 a，b 为何值时，函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 为连续函数．

五、参考答案

1. （1）1；（2）$a=2$，$b=-3$；（3）$a=-1$，$b=1$；（4）e^{-2}；

（5）$a=2$；（6）0；（7）$\dfrac{1}{2}$；（8）$e^{\frac{1}{1-2a}}$；（9）4；（10）$x=0$.

2. （1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$\dfrac{1}{2}$；（3）1；（4）1.

3. （1）当 $a=3$ 时，$f(x)$ 在点 $x=-1$ 连续；（2）$a=1$，$b=0$.

第二章　导数与微分

一、基本要求

（1）理解导数、微分的概念，掌握导数的几何意义、可导与连续的关系．

（2）掌握由导数的定义求导数的方法，会讨论函数在一点的可导性．

（3）熟记基本初等函数的导数公式及导数的四则运算法则．

（4）熟练掌握复合函数的求导法、隐函数的求导法、幂指函数求导法及参数方程所确定的函数的导数．

（5）掌握由方程所确定的隐函数及由参数方程所确定的函数的二阶导数，会求某些显函数的高阶导数．

（6）熟记基本初等函数的微分公式，掌握微分的四则运算和复合函数微分的形式不变性．

二、知识要点

1．导数的定义

（1）导数反映因变量随自变量的变化而变化的快慢程度．

（2）如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 可导，称此极限值为函数 $f(x)$在 x_0 点处的导数．记为

$$y'\big|_{x=x_0},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0},\quad f'(x_0),\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

或

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

（3）若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$不存在，则称 $f(x)$在点 $x=x_0$ 不可导．

（4）若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$，则称 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有无穷导数．

（5）函数 $y=f(x)$在某一区间内的每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$在此区间内可导．

（6）函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 的左右导数．

① 左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

② 右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(7) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是：函数在 x_0 点的左、右导数都存在且相等．

2. 导数的几何意义

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，其在 x_0 处的导数值是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率．即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角．

(2) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线垂直于 x 轴．

(3) 利用导数的几何意义可以求曲线上点的切线方程及法线方程．

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$，$f'(x_0)\neq 0$.

3. 可导与连续的关系

(1) 函数在某点可导是函数在该点连续的充分条件．

(2) 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件．

4. 求函数 $f(x)$ 的导数

(1) 常数和基本初等函数的导数公式．

(2) 函数的和、差、积、商的求导法则．

(3) 反函数的求导法则．

(4) 复合函数的求导法则．

(5) 隐函数的求导法．

(6) 由参数方程所确定的函数的导数．

5. 高阶导数

(1) $(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，表示为 y''，y'''，…，$y^{(n)}$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}$，…，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

(2) 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数．

(3) 几种常见函数的高阶导数公式．

6. 微分的定义及运算法则

(1) 微分反映了当自变量发生微小改变时，函数 y 发生改变的近似值，即 $\Delta y\approx dy$.

(2) 当 $f(x)$ 在 x_0 点可微时，其微分 $dy=f'(x_0)dx$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微分的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导．

(4) 微分的基本公式及运算法则．