数学分析

分析引論

戴遗山 汪浩 李运樵 编

中国人民解放军国防科学技术大学

目 录

第一章　函　　数

§ 1.1　实数与绝对值

全部自然数 1，2，3，…构成自然数系；全部整数 0，±1，±2，±3，…构成整数系；全部整数和全部正、负分数构成有理数系。

任意两个有理数之间存在大于，小于，或相等的关系。任意两个有理数进行加、减、乘、除运算后，结果总还是一个有理数（有一个情形例外，就是零不准作除数）。有理数 r 的一般表示式是：

$$\boxed{r=\frac{p}{q}}\quad (p\text{ 是整数，}q\text{ 是正整数})。$$

在任意两个相异的有理数 a 和 b 之间，永远存在另一个有理数，例如有理数 $\frac{1}{2}(a+b)$，这说明有理数系具有稠密性。

每一个有理数 r 可以与一定向直线上的点（横坐标为有理数 r）相对应，这种点称为有理点。由有理数系的稠密性，定向直线上的全部有理点所组成的集合也是稠密的，即在任意两个相异的有理点之间，永远存在另一个有理点。纵然如此，全部有理点所组成的集合并不充满整条直线，换句话说，在定向直线上还存在横坐标非有理数的点。例如定向直线上这样的一点，它的横坐标 d 等于边长是 1 的正方形对角线之长，即 $d^2=2$ 或 $d=\sqrt{2}$，可以证明 d 不是有理数。事实上，假如 d 是有理数，设 $d=\frac{p}{q}$（p，q 为互质的正整数），则有 $d^2=\frac{p^2}{q^2}=2$，

或即 $p^2=2q^2$；因为 p,q 都是正整数，故知 p 可以为 2 整除，于是 p^2 可以为 4 整除，从而 q 亦可以为 2 整除；这样 p,q 有公因子 2，这与 p,q 为互质的相矛盾，因此 $d=\sqrt{2}$ 不是有理数。

横坐标非有理数之点称为无理点，无理点所对应的横坐标称为无理数。全部有理点与全部无理点所组成的集合就充满整条定向直线。有理数与无理数统称实数；全部有理数和全部无理数就构成实数系。实数系具有如下特性：每一个实数在定向直线上都恰好有一个点与之对应；并且定向直线上每一个点也都恰好有一个实数与之对应。这种特性称为实数系的连续统性质。

我们认为大家都是熟知实数系的各种主要性质的，例如实数的四则运算、乘方及开方运算，例如在任意两个相异的实数之间总存在一个有理数与一个无理数，等等。

今后如无特别声明，数就是指实数。

数 x 的绝对值，记作 $|x|$，它定义如下：

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{若 } x>0 \text{ 或 } x=0, \\ -x, & \text{若 } x<0. \end{cases}$$

数的绝对值具有下述诸性质：

(1) 对于一切的数 x 恒有 $|x|\geqslant 0$[●]，并且 $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$.

(2) 对于一切的数 x 恒有 $|-x|=|x|$.

(3) 若 $|x|\leqslant A\ (A>0)$，则 $-A\leqslant x\leqslant A$；反之，若 $-A\leqslant x\leqslant A$ $(A>0)$，则 $|x|\leqslant A$.

● $a\geqslant b$ 唸作 a 大于或等于 b，它的意思是指：$a \nless b$，即 a 不小于 b．因此 $3\geqq 3$ 是正确的，因为 $3\nless 3$．同样，$a\leqslant b$ 唸作 a 小于或等于 b，它的意思是指：$a\ngtr b$.

4　对于任意两个数 x 及 y，恒有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

5　对于任意两个数 x 及 y，恒有

$$|x+y| \geqslant \big| |x| - |y| \big|.$$

6　对于任意两个数 x 及 y，恒有

$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|.$$

对于任意两个数 x 及 $y(y\neq 0)$，恒有

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

［证］ 只证明性质(3)、(4)及(5)，其余读者自己验证。

(3) 设 $|x| \leqslant A(A>0)$. 若$x\geqslant 0$,则有 $0\leqslant x\leqslant A$; 若$x<0$, 则有 $0<-x\leqslant A$, 或即 $0>x\geqslant -A$, 所以不论那一种情形，总有 $-A\leqslant x\leqslant A$. 反之，设 $-A\leqslant x\leqslant A(A>0)$. 若 $x\geqslant 0$, 由右边的不等式可知 $|x| \leqslant A$; 若 $x<0$, 由左边的不等式可知 $x\leqslant A$, 或即 $|x| \leqslant A$, 所以不论那一种情形，总有 $|x| \leqslant A$.

(4) 易知

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

从而

$$-(|x| + |y|) \leqslant x+y \leqslant |x| + |y|,$$

如果 x　y 不同时为零，则 $|x| + |y| >0$, 由性质(3)即知

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

如果 x, y 均为零，上述关系式显然成立。

(5) 应用性质(4)及性质(2),

$$|x| = |x+y+(-y)| \leqslant |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|,$$

从而

$$|x| - |y| \leqslant |x+y|;$$

同样可知

$|y| = |y+x-x|$
$\leq |y+x| + |x|$

$$\underbrace{|y| - |x|}_{\geq} \leqslant |x+y|,$$

A

因此一般地有

$$||x|-|y||\leqslant|x+y|.$$

我们再作如下几个约定：(1) 在任何情况下，零不能作除数。(2) 三角函数 $\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg} x$ 等，x 均用弧度作单位。(3) 记号$\sqrt{x}$ ($x\geqslant0$)表示非负数 x 的算术平方根，即$\sqrt{x}\geqslant0$；x 的另一平方根为 $-\sqrt{x}\leqslant0$。例如$\sqrt{x^2}=|x|$。(4) 记号$[x]$表示不超过数 x 的最大整数。例如 $[\pi]=3,[2]=2,[-\sqrt{2}]=-2$。

§1.2 数集与区间

若干个数（有限多个或无限多个）的总体称为数集，用希腊字母Ω或其他记号记之。数集Ω中的每一个数 x，称为该数集中的一个元素。用记号 $x\in\Omega$ 表示数 x 是数集 Ω 中的一个元素，念作：x 属于Ω；记号 $x\bar{\in}\Omega$ 表示数 x 不是数集 Ω 中的元素，念作：x 不属于Ω。所谓给定一个数集Ω是指，可以断定任何一个数 x，它是否属于该数集Ω。例如一切正整数组成一个数集Ω，则有

$$3\in\Omega,\quad 0\bar{\in}\Omega,\quad \sqrt{2}\bar{\in}\Omega,\quad [\pi]\in\Omega.$$

如果数集Ω中的所有元素都是数集 Ω' 的元素，则称数集Ω含于数集 Ω'，或称数集 Ω' 包含数集 Ω，记作 $\Omega\subset\Omega'$ 或 $\Omega'\supset\Omega$。显见任何一个数集Ω，恒有 $\Omega\subset\Omega$。例如设 Ω 为一切整数所组成的数集，Ω' 为一切有理数所组成的数集，则 $\Omega\subset\Omega'$。

如果同时成立：$\Omega\subset\Omega'$ 及 $\Omega'\subset\Omega$，则称数集 Ω 与数集 Ω' 相等，记作 $\Omega=\Omega'$。例如Ω表示数集$\{2,3\}$❶，Ω' 表示方程 $x^2-5x+6=0$ 的一切的根所组成的数集，易知 $\Omega=\Omega'$。

---

❶ 有限个数 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 所组成的数集可以用记号$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$记之。

如果数集Ω只有一个元素，则称Ω为单元素集。不含有任何元素的数集称为空集，记作ϕ，例如方程$x^2+1=0$的一切实根所组成的数集是空集。

在数学分析中最常见的数集是区间：

适合不等式$a\leqslant x\leqslant b(a<b)$的一切数$x$所组成的数集，称为闭区间，记作$[a,b]$.

适合不等式$a<x<b(a<b)$的一切数x所组成的数集，称为开区间，记作(a,b).

适合不等式$a<x\leqslant b(a<b)$的一切数x所组成的数集，称为半开区间或左开右闭区间，记作$(a,b]$.

适合不等式$a\leqslant x<b(a<b)$的一切数x所组成的数集，称为左闭右开区间，记作$[a,b)$.

适合不等式$x>a$的一切数x所组成的数集，称为无界区间，记作$(a,+\infty)$；不等式$x>a$有时亦写作$a<x<+\infty$.

适合不等式$x\leqslant a$的一切数x所组成的数集，称为无界区间，记作$(-\infty,a]$；不等式$x\leqslant a$有时亦写作$-\infty<x\leqslant a$.

一切数x所组成的数集，称为无界区间，记作$(-\infty,+\infty)$.

以上这些特殊的数集——区间，在数轴上分别有相应的几何意义，例如闭区间$[a,b]$及开区间(a,b)在数轴上分别表示线段（见图1.1）。

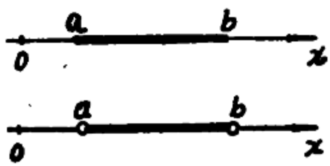


图 1.1

适合不等式$|x-x_0|<\delta(\delta>0)$的一切数所组成的数集称为x_0的δ邻域。不等式$|x-x_0|<\delta$可以改写为$-\delta<x-x_0<\delta$，或即$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，因此x_0的δ邻域实际上就是开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

习 题 一

1. 证明不等式：

(i) 对任何数 x，恒有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|;$$

(ii) 对任意两个数 x 与 y，恒有

$$|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|;$$

(iii) 对任意三个数 a，b_1 与 b_2，恒有

假设法或
分析法：两边平方.
⇒ 恒等式

$$\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}\right|\leqslant |b_1-b_2|.$$

如果视 (a,b_1) 与 (a,b_2) 为直角坐标系中两点 A，B 的坐标，问不等式(iii)有何几何意义？

2. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

3. 解不等式，并在数轴上表明 x 所在的范围：

(i) $$|x+1|<0.01;$$

(ii) $$|x-2|\geqslant 10;$$

(iii) $$\big||x+1|-|x-1|\big|<1.$$

4. 用数学归纳法证明下列各式对任何自然数 n 皆成立：

(i) $$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2};$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2;$$

(iv) $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

5. 证明若$x>-1$，则不等式 归纳法.

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n\text{为大于 1 的正整数})$$

为眞，且仅当$x=0$时等号成立。

§1.3 变量与函数

首先声明，变量是不予定义的。变量x的基本特征是：必须指明它可能取值的数集，即变量x的变动范围。例如元内接正多边形的边数n，它可能取值的范围是数集Ω：不少于3的一切整数；这时我们说n是一个变量，它可能取值的数集是Ω。又如正方形的面积x，它可能取值的范围是一切正数所组成的数集Ω'；这时我们说x是一个变量，它可能取值的数集是Ω'。

特别，如果变量可能取值的范围是单元素集，则称之为常量或常数。例如一切元的元周长与半径的比是常数。

定义 设两个变量x及y，其中变量x的取值范围是数集Ω_x。如果存在一个法则(或对应关系)f，按此法则，对于变量x在Ω_x中的每一个值，总可唯一地决定变量y的一个值与之对应，则称变量y是变量x定义在数集Ω_x上的函数，记作

$$y=f(x) \quad (x\in\Omega_x)$$

变量x称为自变量，变量y又称为因变量，数集Ω_x称为函数的定义域，法则f称为函数关系，因变量y的一切对应值所组成的数集Ω_y称为函数的值域。

对于特定的$a\in\Omega_x$，记号$f(a)$表示变量y对应于$x=a$的对应值，称为函数$y=f(x)\ (x\in\Omega_x)$在$x=a$处的函数值。

函数的概念是数学分析中最基本的概念，它的形成是经历一个发展过程的，在这里我们所提出的定义，是俄国数学家罗巴契夫斯基及德国数学家狄里赫勒所给出的。这个定义涵义较广，因为定义中所提到的法则（或对应关系）f并不限制于某

形式。

例 1 下述表格

$y=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$

x	1	3	5
y	0	0	4

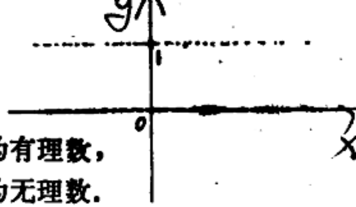
给出了变量 x 的取值范围：$\Omega_x=\{1, 3, 5\}$ 和变量 y 的取值范围：$\Omega_y=\{0,4\}$，同时给出了由变量 x 到变量 y 的一个对应法则，按此法则：$x=1$ 对应着 $y=0$，$x=3$ 对应着$y=0$，$x=5$对应着$y=4$. 这就是说，对于变量 x 在 Ω_x 中的每一个值，按表格所给出的法则，总可以唯一地决定变量 y 的一个值与之对应。因此，上述表格就规定了变量 y 是变量 x 的函数，其定义域为 Ω_x，值域为 Ω_y.

但是，上述表格并不规定变量 x 是变量 y 定义在 Ω_y 上的函数，因为对于$o\in\Omega_y$，对应着变量 x 的两个值 1 与 3，这就破坏了函数定义中对应值的唯一性。因此变量 x 不是变量 y 定义在 Ω_y 上的函数。

例 2 下述表格

x	一切有理数	一切无理数
y	1	0

给出了一个由变量 x 到变量 y 的对应法则，变量 x 的取值范围是数集 $\Omega_x=(-\infty,+\infty)$. 对于变量 x 在 Ω_x 中的每一个值，按上述法则，总唯一地对应着变量 y 的一个值，例如若 x 为任一有理数，则对应着 $y=1$，若 x 为任一无理数，则对应着 $y=0$. 因此，变量 y 是变量 x 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，可以记作



(3) $y=D(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数,}\\ 0, & x\text{为无理数.}\end{cases}$

其值域为 $\Omega_y=\{0,1\}$. 这个函数是有名的狄里赫勒函数。例如 $D(3)=1$, $D(1.8)=1$, $D(\pi)=0$, $D(-\sqrt{3})=0$.

例 3 一昼夜气温变化的情况，通过自动记录仪给出曲线图形（见图1.2） 其中 t 表示时间（以小时为单位） T 表示温度（以摄氏度为单位）。

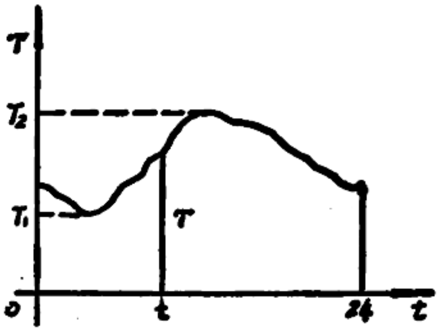


图 1.2

此曲线图形给出了变量 t 的取值范围 $\Omega_t=[0, 24)$，给出了变量 T 的取值范围 $\Omega_T=[T_1, T_2]$，同时给出了由变量 t 到变量 T 的一个对应法则（将 t 视作曲线上某一点的横坐标，T 视作同一点的纵坐标），按此法则，对于变量 t 在 Ω_t 中的每一个值，总可以唯一地决定变量 T 的一个值与之对应。因此，通过图 1.2 就规定了气温 T 是时间 t 定义在$[0,24)$上的函数，记作

$$T=\psi(t) \quad (0\leqslant t<24),$$

其值域为$[T_1,T_2]$.

函数关系也可以通过通常的解析表达式给出，例如：

例 4 解析表达式：

$$y=\sin x \qquad (-\infty<x<+\infty),$$
$$y=\log_{10} x \qquad (0<x<+\infty),$$
$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$
$$y=\frac{1}{x^2-4} \qquad (x\neq\pm 2)❶$$

都规定了变量 y 是变量 x 的函数，右端括弧内的不等式分别表示各函数的天然定义域。❷

函数关系在函数定义域中不同的数集上，可以通过不同的解析表达式来表示，例如：

例 5 符号函数规定如下：

符号函数.

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其定义域 $\Omega_x=(-\infty,+\infty)$，值域 $\Omega_y=\{-1,0,1\}$。此函数的图形如图 1.3 所示。

性质：1. $x\operatorname{Sgn}x=|x|$

2 $\operatorname{Sgn}(\alpha x)=\operatorname{Sgn}\alpha\cdot\operatorname{Sgn}x$

3. $\operatorname{Sgn}(x-x_0)=\begin{cases}1 & (x>x_0)\\ 0 & x=x_0\\ -1 & x<x_0\end{cases}$

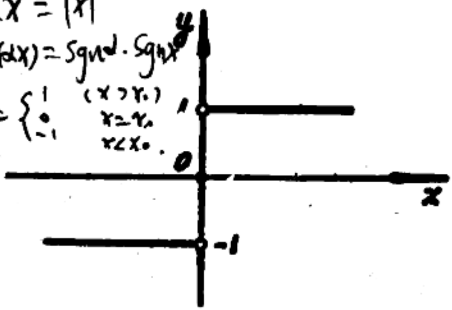


图 1.3

❶ $x\neq\pm 2$ 习惯上表示从全部实数中除去 ± 2 以后，剩下的一切实数所组成的数集，实际上即 $(-\infty,-2)$，$(-2,2)$ 及 $(2,+\infty)$。

❷ 使解析表达式有意义的一切实数所组成的数集，被称为该解析表达式所规定的函数的天然定义域。

④. 定义在(0,1)上的 Riemann 函数.(重要)

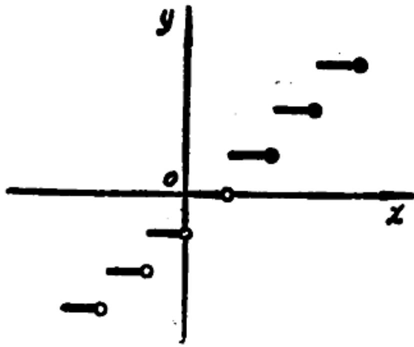
$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & (x=\frac{p}{q}\ (p,q \text{为互质整数})) \\ 0 & (x \text{ 无理数}).\end{cases}$$

Q

例 6 方括弧函数

$$y=[x]=n \quad (n\leqslant x<n+1; \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

其定义域 $\Omega_x=(-\infty,+\infty)$，值域 Ω_y 是一切整数所组成的数集，此函数的图象如图 1.4 所示。



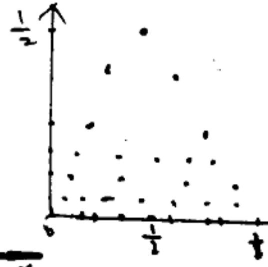


图 1.4

例 7 函　　数

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1, \\ 0, & -1\leqslant x<1, \\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其定义域 $\Omega_x=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $\Omega_y=(-\infty,\ 1]$. 例如 $f(-2)=-1$，$f(0)=0$，$f(3)=\frac{1}{3}$，$f(-1)=0$，$f(1)=1$. 此函数的图象如图 1.5 所示。

例 8 在边长为 a 的正方形铁皮的四角上截去相同的边长为 x 的小正方形$\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$，然后折起各边作成无盖匣子，此盒子的容积$V$ 是 x 定义在$\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$上的函数，

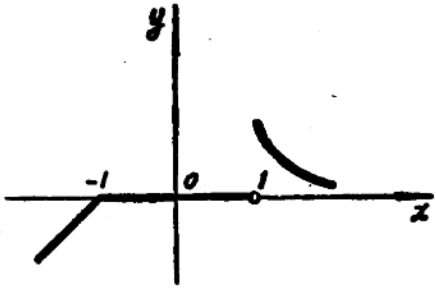


图 1.5

$$V=x(a-2x)^2 \quad \left(0<x<\frac{a}{2}\right),$$

其定义域是开区间$\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

如果不考虑 x 及 V 的几何意义，解析表达式 $V=x(a-2x)^2$ 的天然定义域是无界区间$(-\infty,+\infty)$。

例 9 表达式

$$y=f(x)=x+1 \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

$$y=g(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \quad (x\neq1).$$

表示两个不同的函数，因为它们的定义域是不相同的，它们的图象如图 1.6 所示。

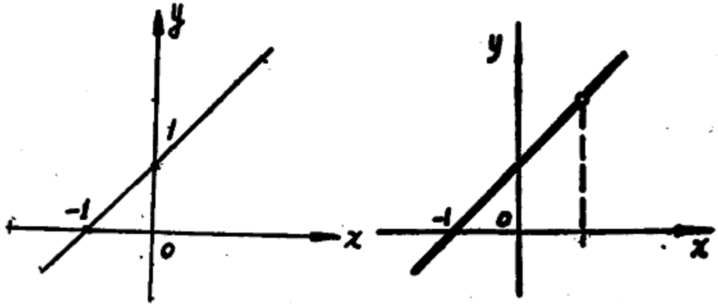


图 1.6

证明任何定义在对称区间(-l,l)上的函数可表示为一个偶函数和一个奇函数之和。

[证]. 设$f(x)$为区间$(-l,l)$上任一已知函数, 考虑函数 $F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 与 $G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, 一奇一偶.

又 $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=F(x)+G(x)$.

总结以上所述可知，在函数的定义内存在两个要素：第一，指出自变量x的取值范围Ω_x(即函数的定义域)；第二，确定变量x到变量y的一个（单值）对应法则或（单值）对应关系（不论这个对应法则是用那种形式给出的）。函数的值域Ω_y通常幷不指出，因为由函数的定义域及对应法则就巳经可以确定值域了。因此，今后凡是谈到一个函数或者书写一个函数的表达式时，一定要注明函数的定义域（天然定义域有时可以例外）。

习 题 二

1. 求下列函数的天然定义域：

(i) $y=\frac{x^2}{1+x}$;

(ii) $y=(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(iii) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$;

(iv) $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$;

(v) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x}$;

(vi) $y=\log(1-2\cos x)$.

2. 函数$f(x)$的图象分别如下图所示，试写出函数$f(x)$

(i)

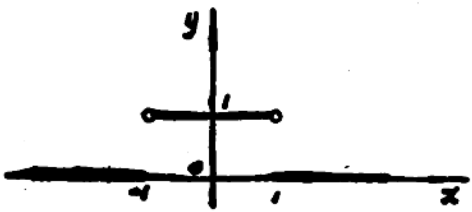


图 1.a

的解析表达式：

(ii)

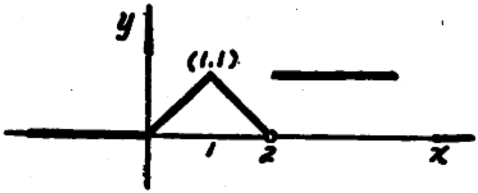


图 1.*b*

3. 作出下列函数的图象：

(i) $y=|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(ii) $y=x|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(iii) $y=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(iv) $y=\dfrac{|x|}{x}$, $x\neq0$;

(v) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant0, \\ x-1, & x<0. \end{cases}$

(vi) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & 0<x\leqslant1; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

[提示] 以 (ii) 为例，记$f(x)=x|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$，利用数 x 的绝对值的定义可将$f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$改写为：

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant0, \\ -x^2, & x<0. \end{cases}$$

这样，函数 $f(x)=x|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图象就易于作出了。

4. 计算下列函数在指定点处的函数值：

(i) $f(x)=1+[x]$ $(0<x<+\infty)$,