半环理论与语言和自动机

BHLLYYYHZDJ

主编/ 陈培慈

江西高校出版社

半环理论与语言和自动机

陈培慈　主编

熊和鸣　黄福生　王颂生　编写

江西高校出版社

（赣）新登字第 007 号

半环理论与语言和自动机 陈培慈主编

江西高校出版社出版发行 南昌市洪都北大道 16 号
华东地质学院印刷厂激光照排部排版 南昌市印刷九厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 9,625 字数 236 千
1993 年 10 月第 1 版 1993 年 10 月第 1 次印刷 印数 1—600 册

ISBN 7—81033—370—4/O・20 定价：7.80 元

内 容 简 介

本书综述了半环理论的基础，并介绍了半环理论在计算机的语言与自动机理论中的应用，主要内容有：有效半环的 Wedderburn 理论，一般半环的 Jacobson 理论，同余自由半环与嵌入理论，半单与可除性理论，半域理论，格序半环理论，完全半环与闭半环理论，以及半环在语言与自动机理论中应用的基本结果.

本书适宜于理工科数学与计算机系的高年级学生和研究生，以及教师和研究人员阅读.

序

半环应该是人们感到最自然的代数结构之一，因为全体自然数关于通常的加法和乘法就构成一个半环.

结合环是半环，因此，半环概念是结合环概念的一种自然推广，而且许多环论方法也被推广到了半环理论中来，这是若干年来环论会议常包含半环成果交流的缘由；半环有两个基本构件，即同一承载集上定义着的两个半群，当然，这两个半群通过分配律的纽带被紧密地联系在一起，于是产生了两类不同的允许半环结构的半群，这又是著名刊物《半群论坛（Semigroup Forum）》上常有半环成果刊出的缘由.

半环结构的研究源于结合环的理想理论，自然数的公理化，以及线性空间的正函数理论；它也被广泛应用于分析学、拓扑学、欧几里得几何学，以及非交换环论等数学学科；近二十年来，人们又发现半环在图论，最优化理论，量子物理的数学模型理论中，以及特别地，在计算机科学的自动机理论和语言理论中有着极其重要的应用. 于是，半环理论及其应用的研究引起了许多数学家和计算机科学家的强烈兴趣和特别关注，并开始形成为一个理论研究与应用研究有机结合的新兴领域. 这一研究，国际上方兴未艾；国内以江西师大陈培慈为首的一批数学和计算机科学家则正在填补这一研究的空白，他们几年来的工作已经取得了一批可谓构成这一领域新进展的研究成果.

陈培慈主编的“半环理论与语言和自动机”一书是作者在整

理半环理论成果并参与研究的基础上形成的. 该书系统地介绍了半环的基础知识，基本理论及其在计算机科学中的应用. 该书深入浅出，简明易懂，既适用于数学工作者，又适用于计算机科学工作者，是国内第一部介绍半环及其应用的专著. 相信该书的出版将有利于推动这一领域的研究在国内的发展.

写到这里，我作为一个半群与组合半群专家为该书写此序已经成为一件非常自然的事情了. 此外，我乐于为该书写此序，也是为了这一专著能被广泛使用.

郭聿琦

于兰州大学

1993 年 7 月

前　　言

本书是作者在完成省自然科学基金资助项目基础上，汇集关于半环理论及其应用的研究成果，并结合对九一级研究生的授课讲稿写成的.

半环是介于半群与环之间的一种代数结构，它是指定义 在同一承载集上由分配律联系着的两个半群(例如，全体自然数关于数的加法和乘法构成一个半环)，因此，从半环的基本结构来看，它应该归属于半群的范畴；但是，由于结合环都是半环，并且，半环结构的研究（特别是早期研究）大量引用与推广环论的思想与方法，许多环论的结果都成功地推广到了半环，从这一意义上说，半环理论又可看成是环论的自然拓广.

半环概念最早由 H·S·Vandiver 于本世纪四十年代提出，半环理论的发展过程，大致可以设想为三个阶段：(一) 半环经典结构理论的研究，它主要包括有效半环的 Wedderburn—Artin 理论和一般半环的 Jacobson 理论，Samuel Bourne 与 Zassenhaus 的论文 [6]，以及 Kengo Liguka 的论文 [13] 可以看作为这一阶段的代表作；(二) 半环近代理论的研究，它主要包括半域理论与半环的序结构理论，S·S·Mitchell 和 P·Sinutoke 的论文 [36]，以及 M·Satyanarayana 的系列论文 [26]、[27]、[28]、[29] 可以看作为这一阶段的代表作；(三) 带有无限运算的半环理论及其应用的研究，S·Eilenberg 的专著 [52] 与 Werner Kuich. Artosalomaa 的专著 [3] 可以看作是这一阶段的代表作。迄今为止，专门介绍半环理论及其应用的专著已有 J·S·Golan 的 [18].

本书综述了以上三个发展阶段的基本内容，前九章主要介绍半环的理论，后四章着重介绍半环理论在计算 机科学的自动机与语言理论方面的应用，阅读本书需要一定的抽象代数（环论与半群）基础，阅读后四章需要一定的理论计算机知识.

由于半环不但广泛应用于分析学、拓扑学、非交换环论等学科，而且，近二十年来，还发现在图论、最优化理论、量子物理的数学模型理论，特别是在理论计算机科学中有着广泛应用，因此，半环的研究已经引起了许多数学

与计算机工作者的兴趣与关注，并开始形成为一个理论研究与应用研究有机结合的新兴领域. 本书的目的就是试图将这一领域的研究成果作一综合介绍，以便有关学者对这一领域的了解. 促进研究工作的开展.

本书的作者曾分别在北京师范大学、复旦大学进修环与代数，刘绍学、许永华、吴品三、郭聿琦等教授对作者的学习与工作一直给予精心指导与大力支持，作者正是在他们的关心与鼓励下学习半环理论及其应用的，在此，谨向他们表示衷心的感谢与崇高的敬意.

本书的出版得到了刘绍学、郭聿琦教授的热情推荐，得到了江西高校出版社的大力支持. 在编写过程中，薛锦云教授曾提供宝贵的资料，此外，研究生敖忠平在学习过程中也提出过一些有益建议，并协助做了校阅工作，作者在此表示深切的感谢.

本书由四位作者分工合作编写而成. 前四章、后五章由陈培慈执笔，第五章由熊和鸣执笔，第六章§1、§2、§5和第七、八章由黄福生执笔，第六章§3、§4由王颂生执笔，全书由陈培慈统稿，熊和鸣对前八章，黄福生对七、八、九章，王颂生对后四章进行了仔细认真的校阅，他们为全书的统稿提出过许多宝贵意见，并作了大量的工作.

由于作者水平所限，书中一定存在错误与不当之处，殷切地希望读者批评指正.

作者
于江西师范大学
1993 年 10 月

目 录

第一章　基本概念

这一章介绍半环的一些基本概念和简单性质.半群和环的有关概念认为是已知的.

§1　半环的定义与例

定义1　设S是一非空集合,如果在S中定义有两个代数运算"+"与"·",使

1) $(S, +)$ 作成半群;

2) $(S, \cdot)$ 作成半群;

3) $a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc, \forall\ a,b,c\in S$,

则称S为半环,记为$(S, +, \cdot)$,或简记为S.

设S是半环,若$(S, +)$是交换半群,则称S为加法交换半环;若$(S, \cdot)$是交换半群,称S为乘法交换半环;若S的加法、乘法均交换,则称S为交换半环.

例1　自然数集$\mathbf{N}$关于数的加法与乘法作成半环.显然,数环都是半环.

例2　每个结合环皆是半环(1939年,H·S·Vandiver给出一个半环不能嵌入一个结合环的例子,参看[1]或本书第五章§1).

例3　设S是加法交换半环,n为任意正整数,则S上所有n阶矩阵关于通常的矩阵加法与乘法作成半环,记为$Mn(S)$.

例4　设S为全体有限基数与无限基数之集合,则S关于基数的加法与乘法作成半环.这个半环不能嵌入一个结合环(见[2]).

例5 $S=\{0,1\}$，在 S 中规定如下加法与乘法运算

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot_1$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot_2$	0	1
0	1	1
1	1	1

容易验证 $(S, +, \cdot_1)$ 作成半环，称为 Boolean 半环，$(S, +, \cdot_2)$ 也作成半环. 此外 $(S, +_1, \cdot_1)$，$(S, +_2 \cdot_1)$，$(S, +_3, \cdot_1)$ 及 $(S, +_2, \cdot_2)$ 分别作成半环，其中 $+_1$，$+_2$，$+_3$ 如下

$+_1$	0	1
0	0	1
1	1	0

$+_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+_3$	0	1
0	0	0
1	0	0

例6 设 $S=\{x\in R \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$R$ 为实数集，规定数乘为 S 的乘法，定义 S 中两数 a,b 之和为其中最大的一个，即 $max(a,b)$，则 $(S,max,\cdot)$ 作成半环.

又令 $S_1=R\cup\{\infty\}$，$S_2=R\cup\{-\infty\}$，$S_3=\{x\in R \mid x\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$. 这里 ∞，$-\infty$ 作为两个符号，与实数的序关系如通常意义. 易证 $(S_1,min,+)$，$(S_2,max,+)$ 及 (S_3,max,min) 均作成半环.

例7 一个分配格是一个半环.

例8 设 $A=\{0,1\}$，在 A 中规定加法：$0+0=1+0=0$，$0+1=1+1=1$，则 $(A,+)$ 作成半群. 又令 S 为半群 A 的全体自同态组成的集合，即 $S=\{\theta,I,f,g\}$，其中 $\theta(0)=\theta(1)=0$；$I(0)=0,I(1)=1$；$f(0)=1,f(1)=1$；$g(0)=1,g(1)=0$. 在 S 中规定运算表如下

$+$	θ	I	f	g
θ	θ	I	f	g
I	θ	I	f	g
f	θ	I	f	g
g	θ	I	f	g

$\cdot$	θ	I	f	g
θ	θ	θ	f	f
I	θ	I	f	g
f	θ	f	f	θ
g	θ	g	f	I

则$(S, +, \cdot)$作成半环.

易知,例 1、3、4、5、6、7 都是加法交换半环,且例 1、4、5、6、7 均是交换半环.例 8 不是加法交换半环,例 2 为非交换半环.例 3 中 $Mn(S)$ 不是交换半环.

定义 2 若半环$(S, +, \cdot)$有一个元素 0,使得 $a + 0 = 0 + a = a$,对任意 $a \in S$,则称 0 为 S 的加法恒等元;若 S 有元素 x,使得 $ax = xa = x$,对任意 $a \in S$,则称 x 为 S 的乘法零元.若 $0 \in S$ 既是加法恒等元又是乘法零元,则称 0 为 S 的零元,显然 S 的零元是唯一的.

例如,数 0 是数环作成的半环的零元;若加法交换半环 S 有零元,则半环 $Mn(S)$ 有 n 阶零矩阵为零元.半环N不含加法恒等元与乘法零元,例 5 中半环$(S, +, \cdot_2)$有加法恒等元 0,而 0 非乘法零元.

任意半环均可嵌入一个有零元的半环,因为若$(S, +, \cdot)$是不含零元的半环,令 $S^\circ = S \cup \{0\}$,并规定 $x + 0 = 0 + x = x$,$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,对任意 $x \in S^\circ$,则$(S^\circ, +, \cdot)$是有零元半环.

设 $a \in S$,n 是正整数,n 个 a 相加,简记为 na,当 S 有零元时,规定 $0a$ 为 S 中零元.这里 0 是数零.

含单位元半群(monoid),称作么半群.我们来看一个与计算机语言密切相关的半环.

例 9 设 A 是一个有零元的加法交换半环,A 的乘法半群是么半群,又设 Σ^* 是一个么半群.我们把一个表示成如下形式和的 Σ^* 到 A 的映射 r 称为一个形式幂级数

$$r = \sum_{\omega \in \Sigma^*} (r, \omega)\omega,$$

其中(r, ω)表示 r 作用于 ω 的值,称作 r 关于 ω 在 A 上的系数.因此称 r 为系数在 A 上的形式幂级数.

设 $A \ll \Sigma^* \gg$ 为所有系数在 A 上的形式幂级数的集合,在其

中定义“+”和“·”运算为

$$(r_1 + r_2, \omega) = (r_1, \omega) + (r_2, \omega)$$

$$(r_1 r_2, \omega) = \sum_{\omega=\omega_1\omega_2} (r_1, \omega_1)(r_2, \omega_2)$$

对于任意 $r_1, r_2 \in A \ll \Sigma^* \gg, \omega, \omega_1, \omega_2 \in \Sigma^*$.

容易看出,$(A \ll \Sigma^* \gg, +, \cdot)$ 作成有零元的加法交换半环,它的乘法半群是么半群(见[3]).

定义 3 设$(S, +, \cdot)$是半环,若$(S, \cdot)$是么半群,则$(S, \cdot)$的单位元称为半环 S 的单位元,有单位元半环简称么半环.

显然,半环 $\mathbf{N}$,Boolean 半环与形式幂级数半环 $A \ll \Sigma^* \gg$ 都是么半环.

§2 子半环与理想

从本节始,我们假定半环是有零元 0 的.

定义 1 设 R 是半环$(S, +, \cdot, 0)$ 的非空子集,如果

1) $0 \in R$;

2) $(R, +, \cdot)$ 作成有零元 0 的半环;

则称 R 为 S 的子半环.

易知,任意半环 S 有平凡子半环$\{0\}$ 与 S.

定义 2 半环$(S, +, \cdot, 0)$ 的子集 R 称为 S 的右理想,如果

1) $0 \in R$;

2) $r_1 + r_2 \in R, \forall\, r_1, r_2 \in R$;

3) $r \cdot x \in R, \forall\, r \in R, x \in S$.

类似地可以定义 S 的左理想. 若 R 既是半环 S 的右理想又是左理想,则称 R 为 S 的理想,记为 $R \lhd S$.

显然,右(左) 理想与理想都是子半环. $\{0\}$ 与 S 均是半环 S 的

理想.

例 1 记 $S=(M_2(A),+,\cdot,0)$ 这里 A 是加法交换半环,则

$$R_1=\{\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ a_2 & 0\end{pmatrix}\mid a_1,a_2\in A\},R_2=\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\mid b_1,b_2\in A\}$$

分别是 S 的左理想与右理想,当 $R\lhd A$ 时,$\{(r_{ij})_{2\times 2}\mid r_{ij}\in R\}$ 是 S 的理想.

例 2 设 $S=\{x\in R\mid x\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$,则子集 $R=\{x\in R\mid x\geqslant 0\}$ 是半环 $(S,max,min,0)$ 的理想.

例 3 在所有有限基数与无限基数组成的半环 S 中,由无限基数与基数 0 组成的子集 R 是 S 的一个理想.

例 4 结合环 R 的右(左,双侧)理想依次是半环 R 的右(左、双侧)理想.

显然,半环 S 的一族子半环的交仍是子半环,一簇右(左)理想之交仍是右(左)理想,因而理想之交是理想.

设 R_1,R_2 是半环 S 的两个右理想,规定

$$R_1+R_2=\{\sum_{fin}r_i\mid r_i\in R_1\cup R_2\}$$

$$R_1R_2=\{\sum_{fin}r_{1i}r_{2i}\mid r_{1i}\in R_1,r_{2i}\in R_2\}$$

其中符号 $\sum\limits_{fin}$ 表示有限和. 易知,R_1+R_2 与 R_1R_2 仍是 S 的右理想,称 R_1+R_2 与 R_1R_2 依次为 R_1、R_2 的和与积.

类似地可以定义两个左理想(理想)的和与积.

一般地,若 $\{R_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是半环 S 的一簇右(左)理想或理想,则易知 $\sum\limits_{\alpha\in I}R_\alpha=\{\sum\limits_{fin}r_i\mid r_i\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}R_\alpha\}$ 仍是 S 的右(左)理想或理想,称之为 $R_\alpha,\alpha\in I$ 的和.

命题 1 设 $\{R_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是半环 S 的一簇右(左)理想或理想,则 $\sum\limits_{\alpha\in I}R_\alpha=\bigcap A_\beta$,其中 A_β 遍取 S 的包含 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}R_\alpha$ 的右(左)理想或理想.

命题 2 设 $R_i,Q_j,i\in I$、$j\in J$,均是半环 S 的右(左)理想或

理想，则

$$(\sum_{i\in I}R_i)(\sum_{j\in J}Q_j)=\sum_{i\in I,j\in J}R_iQ_j.$$

两命题的证明是容易的，留给读者完成.

定义 3 设 A 是半环 S 的非空子集，$A_\alpha,\alpha\in I$ 为 S 的所有包含 A 的子半环，我们称子半环 $\bigcap A_\alpha$ 为由 A 生成的子半环，记作 $<A>_S$ 或简记为 $<A>$.

类似可定义由 A 生成的右(左)理想或理想，记作 $<A)_S$，$(A>_S$，$(A)_S$. 特别当 $A=\{a\}$ 时，分别记作 $<a)$，$(a>$，(a)，称为由 a 生成的主右(主左)理想和主理想.

命题 3 设 A 是半环 S 的非空子集，则 $<A>=\{\sum_{fin}n_{i_1i_2\cdots i_m}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}\mid n_{i_1i_2\cdots i_m}$ 是非负整数，$a_{i_j}\in A\}$.

命题 4 设 S 是半环，$a\in S$，则

$(a)=\{\sum_{fin}(n_ia+x_ia+ay_i+u_iav_i)\mid n_i$ 是非负整数，$x_i,y_i,u_i,v_i\in S\}$

命题 5 设 A 是半环 S 的非空子集，则

$(A)=\{\sum_{fin}x_i\mid x_i\in(t_i),t_i\in A\}$.

类似地，读者不难得出 $<a>$，$(a>$，$(A>$，$<A)$ 的元素表达形式.

§3 半环的同余

为了研究半环的商结构，有必要引入半环的同余概念，并讨论半环的理想与同余的关系.

设 S_1,S_2 是两个半环，易知

$$S_1\times S_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in S_1,x_2\in S_2\}$$

对于按分量规定的加法与乘法作成一个新的半环，称之为 S_1 与 S_2