当代经济学系列丛书
Contemporary Economics Series
主编 陈昕

CAMBRIDGE

政治博弈论

当代经济学
教学参考书系

[美] 诺兰·麦卡蒂 亚当·梅罗威茨 著
孙经纬 高晓晖 译

格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

政治博弈论/(美)麦卡蒂,(美)梅罗威茨著;孙经纬,高晓晖译. —上海:格致出版社:上海人民出版社,2009

(当代经济学系列丛书.当代经济学教学参考书系)

ISBN 978-7-5432-1668-6

Ⅰ.政… Ⅱ.①麦…②梅…③孙…④高… Ⅲ.政治理论 Ⅳ.D0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 167401 号

责任编辑 谷 雨 钱 敏

装帧设计 敬人设计工作室

吕敬人

政治博弈论

[美]诺兰·麦卡蒂 亚当·梅罗威茨 著

孙经纬 高晓晖 译

格致出版社·上海三联书店·上海人民出版社

(200001 上海福建中路 193 号 24 层 www.ewen.cc)

编辑部热线 021-63914988

市场部热线 021-63914081

www.hibooks.cn

世纪出版集团发行中心发行

上海图宇印刷有限公司印刷

2009 年 11 月第 1 版

2009 年 11 月第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:20.5 插页:5 字数:414,000

ISBN 978-7-5432-1668-6/F·217

定价:45.00 元

Political Game Theory*: *An Introduction (978-0-521-84107-8) by Nolan McCarty and Adam Meirowitz first published by Cambridge University Press 2007.

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, NY, United States of America.

上海市版权局著作权合同登记号　图字 09-2007-828

出版前言

为了全面地、系统地反映当代经济学的全貌及其进程，总结与挖掘当代经济学已有的和潜在的成果，展示当代经济学新的发展方向，我们决定出版"当代经济学系列丛书"。

"当代经济学系列丛书"是大型的、高层次的、综合性的经济学术理论丛书。它包括三个子系列：(1)当代经济学文库；(2)当代经济学译库；(3)当代经济学教学参考书系。该丛书在学科领域方面，不仅着眼于各传统经济学科的新成果，更注重经济前沿学科、边缘学科和综合学科的新成就；在选题的采择上，广泛联系海内外学者，努力开掘学术功力深厚、思想新颖独到、作品水平拔尖的"高、新、尖"著作。"文库"力求达到中国经济学界当前的最高水平；"译库"翻译当代经济学的名人名著；"教学参考书系"则主要出版国外著名高等院校的通用教材。

本丛书致力于推动中国经济学的现代化和国际标准化，力图在一个不太长的时期内，从研究范围、研究内容、研究方法、分析技术等方面逐步完成中国经济学从传统向现代的转轨。我们渴望经济学家们支持我们的追求，向这套丛书提供高质量的标准经济学著作，进而为提高中国经济学的水平，使之立足于世界经济学之林而共同努力。

我们和经济学家一起瞻望着中国经济学的未来。

致　谢

写作本书的初衷，是本书的一位作者完全无法在黑板上(或者在任何平面上)正确地板书。为使学生免于在听课过程中忍受这种折磨，我们把讲义制作成电子版。而且，如果没有拼写检查器的帮助，我们还没办法正确拼写英文单词，所以，电子版讲义弥补了我们在这个方面的欠缺。①对耗费许多个夜晚输入电脑中的这份博弈论讲义，我们觉得不应该束之高阁。所以，就把它变为了这本书，尽管这又使我们更频繁地打字到深夜。我们希望这份辛苦没有白费。

我们感谢哥伦比亚大学和普林斯顿大学的学生，他们使用了讲义和手稿的各个早期版本。正是他们的迷惑不解和办公室中的答疑，帮助我们学习如何向政治学系学生讲授博弈论。在政治博弈论教材应该是怎样的一本书的问题上，我们受益于与许多人的交流，包括 Chris Achen、Scott Ashworth、Larry Bartels、Cathy Hafer、Keith Krehbiel、David Lewis、Kris Ramsay 和 Thomas Romer。我们感谢 John Londregan 和 Mark Fey，他们指出了此书早期的各个版本中的错误。我们还要感谢的是教授我们政治博弈论的老师：David Austen-Smith、Jeffrey Banks、David Baron、Bruce Bueno de Mesquito、Thomas Romer 和 Howard Rosenthal。

诺兰·麦卡蒂
亚当·梅罗威茨

① 但是，我们两人的拼写错误又是两种不同的风格。对一个单词，McCarty 完全在随机拼写，Meirowitz 则始终以相同的方式错误地拼写。

目　录

001　出版前言
001　致谢
001　1　导论
002　1.1　本书的结构
004　2　选择理论
005　2.1　有限行动集和有限结果集
007　2.2　连续选择空间
013　2.3　效用理论
014　2.4　连续选择空间上的效用表示
015　2.5　空间偏好
017　2.6　习题
019　3　不确定性下的选择
019　3.1　有限行动集和有限结果集
027　3.2　风险偏好
033　3.3　学习
037　3.4　对期望效用理论的批判
042　3.5　时间偏好
046　3.6　习题
049　4　社会选择理论
049　4.1　公开招聘
050　4.2　偏好加总规则

056 4.3 集体选择

061 4.4 操控选择函数

063 4.5 习题

065 5 标准式博弈

067 5.1 标准式博弈

070 5.2 标准式博弈的解

075 5.3 应用:Hotelling 政治竞争模型

080 5.4 Nash 均衡的存在性

085 5.5 占优和混合策略

086 5.6 计算 Nash 均衡

088 5.7 应用:利益集团献金

089 5.8 应用:国际外部性

091 5.9 利用约束条件下的优化方法,计算均衡

092 5.10 证明 Nash 均衡的存在性

095 5.11 比较静态

103 5.12 精炼 Nash 均衡

104 5.13 应用:私人提供公共品

108 5.14 习题

112 6 标准式贝叶斯博弈

113 6.1 正式定义

115 6.2 应用:贸易保护

116 6.3 应用:陪审团投票

119 6.4 应用:在信号集为连续统时陪审团的投票行为

120 6.5 应用:公共品和不完全信息

123 6.6 应用:候选人偏好上的不确定性

124 6.7 应用:竞选、竞赛和拍卖

126 6.8 贝叶斯 Nash 均衡的存在性

127 6.9 习题

128 7 扩展式博弈

131 7.1 反向归纳法

132 7.2 完全非完美信息动态博弈

138 7.3 单偏离原则

138 7.4 子博弈精炼和精炼均衡

139 7.5 应用:议程控制

143 7.6 应用:力量结构变化模型
145 7.7 应用:向民主制度的转轨
148 7.8 应用:政党联盟的形成模型
151 7.9 习题
153 8 不完全信息动态博弈
156 8.1 精炼贝叶斯均衡
160 8.2 信号揭示博弈
164 8.3 应用:选举中的阻止进入行为
170 8.4 应用:信息和立法组织
174 8.5 应用:信息沟通目的的游说活动
177 8.6 对精炼贝叶斯均衡的精炼
185 8.7 习题
189 9 重复博弈
190 9.1 重复的囚徒两难博弈
191 9.2 触发均衡
192 9.3 以牙还牙策略
194 9.4 介于触发策略和以牙还牙策略之间的惩罚策略
196 9.5 无名氏定理
197 9.6 应用:团体间合作
202 9.7 应用:贸易战
205 9.8 习题
207 10 讨价还价理论
207 10.1 Nash 讨价还价解
211 10.2 非合作讨价还价
216 10.3 封闭规则下多数通过的讨价还价
221 10.4 开放规则下的 Baron-Ferejohn 模型
223 10.5 不完全信息下的讨价还价
224 10.6 应用:包含否决行为的讨价还价
233 10.7 应用:危机谈判
241 10.8 习题
242 11 机制设计和代理理论
243 11.1 例子
244 11.2 机制设计问题

246 11.3 应用:民调
248 11.4 拍卖理论
252 11.5 应用:竞选和全支付拍卖
255 11.6 激励一致性和个人理性
257 11.7 约束条件下的机制设计
271 11.8 机制设计和信号揭示博弈
275 11.9 习题

277 12 数学附录

277 12.1 数学命题和证明
279 12.2 集合和函数
282 12.3 实数
284 12.4 点和集合
285 12.5 函数的连续性
287 12.6 对应
288 12.7 微积分
303 12.8 概率论

313 参考文献

▶1

导　论

在很短的时间里，博弈论成为研究政治问题的最有力的分析工具。从最早被用于研究选举和立法行为开始，博弈论模型已经广泛应用于诸如国际安全、种族合作和民主化等各种领域的研究中。实际上，政治科学所有领域都受益于博弈论模型的重大贡献。在《美国政治科学评论》(*American Political Science Review*)、《美国政治科学期刊》(*American Journal of Political Science*)和《国际组织》(*International Organization*)等刊物中，几乎每一期都有至少一篇论文对政治现象提出新的博弈模型分析，或者有至少一篇论文对已有模型进行经验实证检验。

但是，博弈论在政治科学中的应用并不像在经济学中那样发展迅速。造成这种发展上的不平衡的原因之一，是学习博弈论的大部分政治科学家只能依靠经济学家撰写的和为经济学家撰写的教科书。有许多杰出的经济学博弈论教材，但是，所探讨的问题常常并不切合政治科学家的需要。首先，可能也是最重要的，这些书中的博弈论应用和所探讨的主题，一般是经济学家们感兴趣的内容。例如，新入行的政治科学家们并不总能够直接看到双寡头理论或拍卖理论对分析政治现象具有的价值。其次，对政治博弈论学家们来说，一些重要的问题，如投票理论等，在经济学教材中极少涉及。许多经济学教材都假定读者对经典价格理论有一定的了解。结果，对政治科学家们来说，进入壁垒不仅包含数学，而且包括需求曲线和边际替代率等知识。

当然了，我们有几本由政治科学家撰写的和为政治科学家撰写的教材，例如Ordeshook(1986)和Morrow(1994)。但是，我们认为，无论就应用而言，还是就现代政治科学的需要而言，这些教材都有些过时。Ordeshook的教材对社会选择和空间理论的探讨，依然独领风骚，但是，它是在非合作理论成为政治博弈论的主导范式之前撰写和出版的。Morrow对非合作博弈论的阐述通俗易懂，其分析深度却无法满足当代学者的需要。而且，它自出版之今已有10年时间——在这10年中，出现了数以百计的重要论文和著作使用博弈论工具展开分析。Austen-Smith和Banks的著作(1999，2005)部分地满足了这方面的需要。他们的第一本书，《实证政治理论Ⅰ》(*Positive Political Theory* Ⅰ)对社会选择理论进行了透彻研究，而在本书中，我们仅用一章的篇幅介绍这一领域。他们的第二本书，《实证政治理

论Ⅱ》(*Positive Political Theory* Ⅱ),虽探讨策略和制度,却假定读者了解博弈论,而这是政治科学领域中一年级学生所不具备的知识。而且,他们的这本书是按照研究专题组织的,而不是按照博弈论体系展开的。

所以,在撰写本书时,我们确定了几个目标。首先,我们要撰写的是一本政治博弈论教材,而不是抽象的博弈论或经济博弈论的教材。因此,我们在本书中所探讨的博弈论的应用,都是政治科学家们感兴趣的应用;所选择的内容,也是政治分析所独有的。其次,在为政治科学家们撰写这样一本书时,我们想适应青年政治科学家在背景和需要上的多样性。我们知道,在政治科学专业中,大部分博士生在就读时,只有有限的数学基础和模型分析基础。但是,我们认为,因此而忽视当代政治模型所依托的数学上的严谨性和关键的理论概念,对他们不是件好事。对那些基础欠缺的学生,我们在本书中有专门而详细的数学附录,提供了从集合论和分析到基本优化和概率论的一些必需的工具。当然了,有一些攻读政治科学专业的研究生,有较强的数学和经济学基础。我们希望这本书对他们同样有用。因此,对一些较难和较复杂的概念,我们也做了深入阐述。许多高深的章节(用“*”或“**”标记)对我们所探讨的模型的分析结构和数学结构,提供了详细阐述。对于尚没有为这些技术性更强的部分做好基础准备的学生,在第一次接触本书时,完全可以跳过这些章节。

1.1 本书的结构

本书在内容的组织上,偏离了标准做法,因为其中包含的许多内容或者直接与政治科学有关,或者是针对政治科学专业的学生薄弱的知识领域,提供补充。

第 2 章对确定性条件下经典选择理论提供了完整阐述。我们介绍了偏好和效用理论的基本思想。我们证明了一些重要结论;其中一些证明十分简单,还有一些证明则用到了比较高深的数学知识,对后者,我们用“*”做了标记。本章的重心是介绍理性选择理论的内涵和所使用的语言。我们专门用了一节的篇幅介绍空间偏好或者说欧几里得偏好。在投票理论和在投票理论于选举政治和立法政治的应用中,这类偏好起着核心作用。

在第 3 章中,我们介绍了博弈理论家们是如何分析不确定性条件下的选择的。本章的核心是标准的 von Neumann-Morgenstern 期望效用模型,同时介绍了对这一理论的一些批判。在探讨了风险偏好之后,我们还讨论了在行为主体有空间偏好时,风险因素所具有的特殊影响。

第 4 章简短介绍了社会选择理论。这一章的目的不是取代 Peter Ordeshook (1986)以及 David Austen-Smith 和 Jeff Banks(1999)等社会选择教材,而主要是为已经成为数理政治科学不可分割部分的思想和概念,提供参考资料。这些思想和概念包括 Arrow 不可能性定理、多数通过规则的核为空集/非空集以及单峰偏好的作用等。本章还讨论了关于社会决策中的策略性行为的 Gibbard-Sattherwaite 定理。

第 5 章开始讨论当代数理政治理论的核心分析工具：非合作博弈论。我们介绍了完全信息下的标准式博弈，展示了其最基本的解概念：占优和 Nash 均衡。这部分的理论阐述相当标准，同时，还介绍了一些重要的政治学应用：介绍了关于竞选的 Downsian 模型以及 Donald Wittman 和 Randy Calvert 对这一模型的发展；之后，以 Thomas Palfrey 和 Howard Rosenthal 的论文为基础，介绍了几个公共品生产中的私人出资模型。

第 6 章发展了标准式博弈，分析了参与者并不确切了解各个策略组合所产生的收益的情况。在介绍了这类博弈的解概念即贝叶斯 Nash 均衡后，探讨了第 5 章中各模型的不完全信息版本。这种比较有助于理解不确定性的策略意义。

第 7 章探讨完全信息下的多阶段动态博弈，提出了子博弈精炼概念。在这一章中，我们还将介绍动态博弈在立法政治、民主转轨、联盟的形成和国际危机谈判中的应用。

在第 8 章所介绍的动态博弈中，某些参与者在各种策略组合所实现的收益上只拥有不完全信息。在探讨如何求解这种模型后，我们还将介绍这种博弈在立法政治、竞选融资和国际谈判中的应用。我们还用很大篇幅介绍信号揭示博弈，这类博弈在政治科学中有着越来越重要的应用。

第 9 章则介绍了重复博弈理论和它在政治科学中的应用，所探讨的重点是时间贴现的作用和无名氏定理的结构。这类模型的应用为团体间合作和贸易战。

第 10 章探讨讨价还价理论的应用。我们首先介绍了标准的 Nash 讨价还价模型和 Rubinstein 的讨价还价模型，然后介绍了 Baron 和 Ferejohn 提出的多数通过的投票规则下的讨价还价博弈。最后介绍了不完全信息下讨价还价理论的几个应用。

第 11 章阐述的是分析制度所使用的机制设计理论。我们探讨的中心问题是如何通过对博弈形式的选择，诱生出满足某些目标的均衡行为。在介绍了揭示原理和激励一致性条件后，我们介绍了一些近期文献，包括机制设计在选举政治和组织设计中的应用。在第 8 章的基础上，我们还找出了信号揭示模型和机制设计理论之间的一些联系。

为了使本书自成体系，第 12 章介绍了本书中用到的所有数学知识。这些知识是本书中重要的理论结论和应用分析不可缺少的部分，所涉及的数学领域包括集合论、实分析、线性代数、微积分、优化和概率论。实际上，这一章既可以用于复习，也可以自学。想在政治博弈论前沿领域中作一番研究工作的学生，如果想娴熟地掌握这一章中的数学概念，还得学习更多的数学课程。

▶2 选择理论

在物质资源和对其他人行为的预期所施加的约束下，人们理性地追求自己的目标。这一假定是政治博弈论的基础。但是，在这一假定上人们又常常争执不休。事实上，社会科学中的最活跃的讨论之一，便是理性和目的性在预测人们的行为中所起的作用。这里不讨论经济人和社会人两个概念上的争论，而直接介绍理性选择的基本模型。

就我们的目的而言，我们只需把理性定义在以下两个特征的基础之上：

(1) 面对着任意两个选项 x 和 y，每个人都能够确定自己是不偏好 x、不偏好 y 还是对其中任何一个选项都不偏好。在偏好满足这一特征时，我们就说偏好是**完全的**。

(2) 面对着任意三个选项 x、y 和 z，如果在 x 和 y 之间某个人不偏好 y 且在 y 和 z 之间不偏好 z，则在 x 和 z 之间，他肯定不偏好 z。具有这一特征的偏好，是**传递的**。

我们把理性行为定义为与完全的和传递的偏好相一致的行为。我们有时也称这种行为是**弱理性的**(thinly rational)，因为上述两个特征没有谈到人的欲望。与弱理性相对应的是**强理性**(thick rationality)。在使用强理性概念时，分析者会明确人们的目标，如财富、地位或名声等。弱理性概念支持各种各样的目标。理论上说，各种因素——意识形态、价值观甚至宗教等——都可以是具有弱理性的人追求的目标。只要这些信仰体系，在个人的选择集上或者在社会的选择集上，产生完全的和传递的偏好关系，我们就可以用选择理论分析人们的行为。

不对实际目标施加明确的假定的做法，尽管有吸引力，但是，我们常常必须赋予偏好更强的假定——例如利益集团最大化其成员的财富，政治家最大化其再次当选的概率等。在本书讨论的模型中，我们都对人们的偏好施加这类假定。实际上，理性模型对分析各种类型的活跃分子的行为——例如，出于信念和非物质财富因素，这些人想最小化环境恶化程度或堕胎数量等——亦十分有用。

本章介绍确定性条件下的选择理论。在确定性条件下，决策者拥有关于其行动集的充分信息，因此能完全预测其每个行动导致的结果。下一章则分析不确定性条件下的选择——决策者缺少信息而只能在所导致的结果并不确定的行动之间做出选择。

2.1 有限行动集和有限结果集

首先看一个简单的选择问题:某个人要从数量有限的行动中,选择一项行动。我们将可供他从中做出选择的行动表示为集合 $A = \{a_1, \cdots, a_k\}$。在国际危机中,国家领导人面对着的行动集可能为 A = {出兵,谈判,不作为}。在美国的总统选举中,选民的行动集可能为 A = {投票给民主党,投票给共和党,弃权}。

如前所述,我们假定决策者拥有完全信息——他们拥有充分信息,因而能准确预测到每个行动导致的结果。为正式阐述这一假定,我们把结果集定义为 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$。在国际危机例子中,X={大胜却损兵折将,小胜,现状}。确定性意味着每个行动 $a \in A$ 直接对应着一个且唯一一个 $x \in X$。就是说,确定性意味着存在函数 $x: A \to X$,它把每个行动映射到某个结果上。为便于分析,我们假定集合 X 中的所有结果都是可行的,就是说,给定每个结果,存在着至少一个行动导致这一结果。换句话说,x_i 是可行的,如果存在 $a \in A$ 使得 $x(a) = x_i$。在确定性和可行性假设下,决策者在行动上的偏好和在结果上的偏好,没有什么区别。所以,本章只讨论决策者在结果上的偏好。在第 3 章中,不确定性假设或者说不完全信息假设,使得行动和结果之间的区别变得重要。

要预测决策者的行为,我们还需要更正式的偏好概念。我们定义弱偏好为两元关系 R:如果 x_iRx_j,则在结果 x_i 和 x_j 之间,决策者不偏好 x_j。换言之,如果 x_iRx_j,则在 x_i 和 x_j 之间,决策者“弱”偏好 x_i。①这里的 R,类似实数集上的两元关系“$\geq$”(大于或等于)。

利用弱偏好关系 R,我们定义另外两种重要的两元关系:严格偏好关系和无差异关系。

定义 2.1 对任意的 $x, y \in X$,xPy (x 严格优于 y)当且仅当 xRy 且无 yRx;xIy(x 与 y 无差异)当且仅当 xRy 且 yRx。

在这里,P 表示严格偏好,I 表示无差异。如果把 R 类比为实数集上的两元关系“$\geq$”,则从 R 中得到的严格偏好关系等价于“$>$”,无差异关系等价于“$=$”。

定义为两元关系的偏好概念虽然很有用,但是我们最终想研究的是行为。给定偏好关系,决策者的行为是理性的,只要他选择的结果带给他的价值至少等于其他任何结果所实现的价值。换句话说,理性决策者选择 $x^* \in X$,只要对每个 $y \in X$,x^*Ry。但是,如果不对偏好施加更多的限制条件,我们就无法保证存在这样的最优结果。我们来讨论 X 和 R 必须满足哪些条件,才能够保证这样的最优选择既有意义且存在。首先给出下面的正式定义。

定义 2.2 对选择集 X 上的弱偏好关系 R,最优集 $M(R, X) \subset X$ 被定义为 $M(R, X) = \{x \in X$:对所有的 $y \in X$, $xRy\}$[读作“$M(R, X)$是由 X 中的元素 x 构

① 在数学上,集合 X 上的两元关系 R 是笛卡尔集 $X \times X$ 的子集。如果 $(x, y) \in R$,则 xRy。

成的集合，只要对 X 中的所有元素 y，xRy"]。

理性概念的一个基本结论是，人们从最优集中选择结果。当然了，只有在最优集中有至少一个结果时，这一结论才有意义。我们来探讨在偏好满足哪些性质时，$M(R, X)$是非空集。

使最优集为空集的最简单的一种情况是，在一对结果之间，R 没有做出比较。如果没有 xRy 也没有 yRx，我们就不清楚在 x 和 y 之间，理性的选择是什么。要对 X 中的所有元素进行偏好排序，需要增加两个条件。

定义 2.3 X 上的两元关系 R：

(1) 是完全的，如果对所有的 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$，xRy 或 yRx 或两者同时成立。

(2) 是反身的，如果对所有的 $x \in X$，xRx。

完全性使得人们能用 R 比较任意两个结果。这可能不是个很有争议的假设。但是，我们知道，在面临选择时，人们有时无所适从。①反身性则是个技术性更强的假设。一些人使用的完全性定义与这里的定义略有差异，他们的完全性中包含了反身性。②

完全性和反身性排除了无法对任意两个结果进行比较的情况，但是，它们不能保证理性选择的存在。我们还必须排除这样一种情况：xPy 且 yPz 且 zPx。在这种情况中，不存在理性选择——在你能选择 x 时，为什么要选择 y；在你能选择 z 时，为什么要选择 x；在你能选择 y 时，为什么要选择 z？对偏好施加以下任何一种限制，就能解决这一问题。

定义 2.4 X 上的两元关系 R：

(1) 是传递的，如果对所有的 $x, y, z \in X$，xRy 和 yRz 意味着 xRz；

(2) 是准传递的，如果对所有的 $x, y, z \in X$，xPy 和 yPz 意味着 xPz；

(3) 是不循环的，如果在任何一个有限子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$ 上，对所有的 $i < n$，x_iPx_{i+1} 意味着 x_1Rx_n。

这些定义之间存在着微妙差别。传递性和准传递性似乎相对容易理解，但是，它们实际上是非常强的假设，甚至可能被相当合理的行为违背。例如，假设 X 是由 1 000 瓶啤酒构成的集合。在第一瓶啤酒 b_1 中，我们用一滴自来水替换一滴啤酒；在第二瓶啤酒 b_2 中，我们用两滴自来水替换两滴啤酒；如此等等，直至第 1 000 瓶啤酒 $b_{1\,000}$。除非你是品酒大师，否则就有 $b_1Ib_2, b_2Ib_3, \cdots, b_{999}Ib_{1\,000}$。由于(根据 I 的定义)xIy 意味着 xRy，所以，$b_{1\,000}Rb_{999}, \cdots, b_2Rb_1$。如果这一关系是传递的，则有 $b_{1\,000}Rb_1$。但是，显而易见的事实是 $b_1Pb_{1\,000}$。③然而，无循环性假设就没有这一问题，并且一般情况下足以满足我们的需要。另一方面，尽管传递性假设存在着上述问题，我们依然用它(而不是无循环性假设)，这样做能简化下面许多结论。完全性、反身性和传递性一起构成了弱序概念的基础。

① 很多经济学家和心理学家在探讨完全性假设。不使用这一条件的选择理论已经出现。

② 即对所有的 $x, y \in X$，xRy 或 yRx 或两者同时成立。

③ 这类似于 Guinness 牌子的啤酒和 Coors Light 牌子的啤酒之间的差别。

定义 2.5 给定集合 X，弱序是具有完全性、反身性和传递性的两元关系。

实数集上的两元关系“$\geq$”满足弱序的所有条件。现在给出本章的第一个结论。

定理 2.1 如果 X 是有限集且 R 是弱序，则 $M(R, X) \neq \varnothing$。

这个定理指出，只要选择集是有限集且 R 是完全的、反身的和传递的，就存在最优选择。

证明：设 X 是有限集且 R 是完全的、反身的和传递的。我们在 X 中的元素数量上用归纳法证明这一结论（见数学附录中的数学归纳法部分）。

第 1 步：设 X 中只有一个元素，即 $X = \{x\}$。根据反身性，xRx，于是，$M(R, X) = \{x\}$。

第 2 步：我们证明，如果对包含 n 个元素的任何集合 X' 和 X' 上的弱序 R'，此命题为真，则对包含 $n+1$ 个元素的任何集合 X 和 X 上的弱序 R，此命题为真。

第 2 步的证明：设对包含 n 个元素的任意集合 X' 和 X' 上的弱序 R'，$M(R', X') \neq \varnothing$。设集合 X 包含 $n+1$ 个元素，R 为 X 上的弱序。对任意的 $x \in X$，$X = X' \cup \{x\}$，其中 X' 是包含 n 个元素的集合。设 R' 是 R 在 X' 上的限制（即 $R' = R \cap (X' \times X')$）。根据假设，$M(R', X') \neq \varnothing$。于是，对任意的 $y \in M(R', X')$，根据完全性假设，yRx 或 xRy 或二者同时成立。

如果 yRx，则对所有的 $z \in X' \cup \{x\}$，yRz。于是，$y \in M(R, X)$。第 2 步中的结论因此得到证明。如果 xRy，由于 $y \in M(R', X')$，即对任意的 $z \in X'$，yRz，于是，对任何 $z \in X'$，xRy 且 yRz。R 具有传递性，所以，对任意的 $z \in X'$，xRz。就是说，对任意的 $w \in X$，xRw。因此，$x \in M(R, X)$。第 2 步中的结论得到了证明。

根据数学归纳法，第 1 步和第 2 步相结合，证明了这一定理。 □

弱序实际上不是 $M(R, X)$ 非空的必要条件。我们给出一个更一般的结论，只是它的证明有些复杂，我们将其留做习题。

定理 2.2 X 是有限集，R 是 X 上的完全的和反身的两元关系。对任意非空子集 $S \subset X$，$M(R, S) \neq \varnothing$，当且仅当 R 是不循环的。

即使在选择空间为有限集且无不确定性的简单情况中，选择理论依然相当丰富。想在这方面有更深入的了解，Austen-Smith 和 Banks(1999)是本相当好的参考书。在技术性更强的下一节中，我们讨论结果空间为非有限集时的理性选择。对这种选择集，我们将得到类似定理 2.1 的结论。它们在概念上类似，但是，后者要求对选择集和偏好施加更多的数学结构。

2.2 连续选择空间*

2.2.1 $M(R, X)$的非空性

在定理 2.1 的证明中，有限选择空间的假定是关键，它使我们能用数学归纳法

进行证明。但是，在有无限个选项时，这一方法行不通。如果决策者从连续统中（例如，从实数集$\mathbb{R}$中或者从集合$[0,1]=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0$且$x\leq 1\}$中）做出选择，就需要对偏好施加更多限制，借此保证$M(R, X)\neq\varnothing$。我们用两个简单例子说明这一点。

例题 2.1 设$X=(0,1)$（或$X=\mathbb{R}$）并设R与实数集上的两元关系"$\geq$"等价，即xRy当且仅当$x\geq y$。则集合$M(\geq, X)$是空的。

我们来分析$M(\geq,(0,1))$为什么是空集。对每个$x\in X$，存在$y\in X$使得$y>x$。就是说，对所有的$y\in X$，不存在x使得xRy。集合$(0,1)$中没有最大元素——这一事实是这一例子的关键。但是，X如果是闭区间，例如$X=[0,1]$，就不会出现这种问题：$M(\geq,[0,1])=\{1\}$。这个例子告诉我们，最优集的非空性可能取决于选择集是否"闭的"。下面的例子则阐述了另一种情况。

例题 2.2 设$X=[0,1]$并定义R为：如果$\max\{x, y\}\leq\frac{1}{2}$且$x\geq y$或$\min\{x, y\}>\frac{1}{2}$且$x\leq y$或$x>\frac{1}{2}$且$y\leq\frac{1}{2}$，则$xRy$。则集合$M(R, X)$是空的。

在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中没有元素属于$M(R, X)$——$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中的任何元素都劣于$\left(\frac{1}{2},1\right]$中的每个元素。$\left(\frac{1}{2},1\right]$中的元素也不属于$M(R, X)$，因为在这一区间中，越接近$\frac{1}{2}$的点，越被决策者偏好，但$\frac{1}{2}$却不在这个集合中。因此，这个例子的结果与第一个例子相同。但在这里，问题不是出在选择集X上——X是闭区间，而是出在R上。R在$\frac{1}{2}$处发生跳跃。略小于或等于$\frac{1}{2}$的结果，是决策者最不偏好的结果；略大于$\frac{1}{2}$的结果，是决策者最偏好的结果。偏好上的这种不连续性导致最优集是空集。

在把这些例子和我们从这些例子中得到的直观认识转化为一般性结论之前，我们介绍几个数学概念。[①]假定偏好被定义在n维欧几里得空间上，集合$X\subset\mathbb{R}^n$是选择集。这种空间中的点可以表示为向量$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，其中的坐标$x^i$是$\mathbb{R}$中的点。

我们首先要知道的是，集合X是开集还是闭集。我们用$\mathbb{R}$中的例子说明什么是开集。集合$A\subseteq\mathbb{R}$是开的，如果对每个点$x\in A$，存在某个实数$\varepsilon>0$使得对所有的$y\in X$，如果$|x-y|<\varepsilon$，则$y\in A$。就是说，一个集合是开的，如果这个集合中任意一点附近的所有的点都是这个集合中的元素。集合$(0,1)$显然是开集。给定$(0,1)$中的任意一点，在这个集合中存在着比它更大的点同时也存在着比它更

① 准确地说，我们将介绍的是一些拓扑概念。想进一步学习选择理论的读者，应仔细学习本书的数学附录；更好的办法是找本实分析教材进行学习。Gaughan(1993)是本难度适中的入门教材，A. N. Kolmogorov 和 S. V. Fomin(1970)则更全面。