科學圖書大庫

實用近代數學

譯者　湯啓明　　校閱　趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

實用近代數學

譯者　湯啓明　　校閱　趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月七日三版

實用近代數學

基本定價 2.30

譯者 湯啓明 淡江文理學院數學系理學士

校閱 趙少鐵 臺灣省立成功大學數學系主任

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250 號

發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

校 閱 小 言

58年暑期接徐氏基金會來函邀本人譯書及校閱譯稿，過去對於徐氏基金會僅有所聞，後蒙基金會主持人徐氏在台北邀約會談，始悉基金會對於發展國家科學，尤其輔導一般失學青年能在工作之餘自修科學新知，甚爲欽佩。

本人於大學執教四十餘年，僅從事正規化教育，對失學青年之輔助教育甚少涉及，因之乃欣然同意接受此一工作，並邀學子黃德華，須忠中、柳賢諸君共同效力，期望能藉徐氏基金會之力，對於發展國家科學及輔導失學青年求知之心，切盡一份心力。

本書取材甚廣，無論是工程問題及最新管理科學均廣泛討論，對於工程從事人員之研究應用及大企業生產機構之事業推廣均大有裨益。

趙少鐵

59年4月

原　序

本書之目的在闡明並指引一現代數學上重要發展的廣泛選擇。故具有此一特性之基本書刊，在過去二十年來因純數學之進步，與應用數學之發展而發生變化益顯其重要。

本書中之理論數學，包括了許多新的也極其重要的發展，例如對局論，彼曾廣泛地應用到許多問題上，從商業行政到工業競爭均爲其應用之範圍。本書同時包含了許多對數學家並不陌生的標題，但彼在數學與基本數學之使用上，近年來卻扮演了極其重要的角色。這此種標題包括了點集論及其應用、數論、坐標系之變換及其幾何意義等。

本書中之應用數學爲讀者準備了許多商業行政上新的使用方法，任由讀者選讀。像著名的"利潤與產品極太的極小値"（Problems of maximinization of profits and production）和"價格與損失極小的極小値"(miinimzation of costs losses)等。此等技巧普遍包括了運輸問題，線性與整數計劃（linear and integer programming），網流問題（Network flow problems）與組合數學等。

變換式在本書中有詳細之解說，並對拉氏變換式在工程與工業控制問題的重要應用上亦有詳盡之解說。在或然率與統計此章中以現代的品質管理爲其矢的。

本書是專爲想要瞭解並使用此等新的方法自修者而編輯，故不需教師之指導，亦可爲想要增廣在理論數學方面之知識者所使用。本書爲數學叢書中的一本，其中每一本皆爲想要增進運用數學方法與運算之能力者而設計。

目　次

第一章　集合論、數及羣 …… 1

§ 1　集合元素 …… 1

§ 2　相等 …… 1

§ 3　集合，部份集合及包含關係 …… 2

§ 4　集合的集合 …… 3

§ 5　否定 …… 3

§ 6　聯集與交集 …… 3

§ 7　聯集與交集之應用 …… 5

§ 8　差集 …… 5

§ 9　絕對差集 …… 7

§10　冪集合 …… 7

§11　序對和卡氏(Cartisian)積 …… 7

§12　關係：函數，定義域與值域 …… 8

§13　函數 …… 9

§14　數集合 …… 10

§15　自然數的運算 …… 12

§16　整數 …… 12

§17　有理數 …… 12

§18　實數 …… 13

§19　複素數 …… 14

§20　三角函數與對數 …… 18

§21　超越數 …… 18

§22　超窮數 …… 19

§23　群之定義 …… 19

§24　排列群 …… 20

第二章　矩陣及行列式 …… 29

§25　矩陣的加法 …… 30

§26 矩陣的數積 …… 31
§27 矩陣的乘法 …… 32
§28 矩陣的應用 …… 35
§29 行列式 …… 36
§30 2×2及3×3方陣行列式的求法 …… 37
§31 矩陣與行列式的特性 …… 39
§32 子式和四階行列式之推算 …… 44
§33 應用行列式求聯立一次方程式 …… 46
§34 矩陣之秩和方程式相依 …… 51
§35 矩陣的特徵方程式 …… 53
§36 向量 …… 54
§37 應用矩陣解投影幾何學的畸變和變換 …… 55
§38 矩陣之其他運算及定義 …… 59

第三章 或然率、統計學及品質管制 …… 67
§39 引言 …… 67
§40 基本概念 …… 67
§41 或然率 …… 68
§42 機會對局 …… 73
§43 隨機游動步驟 …… 76
§44 Markov 步驟 …… 77
§45 隨機變數 …… 78
§46 統計定義及其符號 …… 80
§47 統計學上幾種重要分配及二項分配 …… 82
§48 統計要素 …… 92
§49 其他基本概念 …… 96
§50 統計的品質管制 …… 97

第四章 對局論 …… 103
§51 引言 …… 103
§52 兩人零總和局 …… 104
§53 鞍點 …… 107
§54 混合戰略 …… 110

§55　2 × N 對局 …… 115
§56　3 × 3 對局 …… 120
§57　結論 …… 127

第五章　不等式、線性計劃及運輸問題 …… 131
§58　引言 …… 131
§59　基本符號和公理 …… 131
§60　基本運算 …… 133
§61　平均數的不等式 …… 135
§62　幾個有名的不等式 …… 137
§63　不等式的體系 …… 137
§64　線性計劃 …… 140
§65　運輸問題 …… 143
§66　修正的運輸問題 …… 151
§67　退化和眞正的性質 …… 154
§68　簡化法 …… 155
§69　對偶簡化法 …… 160

第六章　組合數學 …… 167
§70　整數計劃 …… 167
§71　線性計劃與對局論 …… 173
§72　網路流量問題 …… 178
§73　樹狀與圈狀 …… 184

第七章　變換與變換式 …… 187
§74　坐標系 …… 187
§75　卡氏坐標 …… 188
§76　球面的極坐標 …… 190
§77　圓柱坐標 …… 193
§78　極坐標系 …… 195
§79　雙曲線函數 …… 196
§80　雙極坐標 …… 199
§81　坐標軸之平移 …… 200

§82 坐標軸之旋轉……………………………………………… 205
§83 拉伯拉斯變換法概論…………………………………… 209
§84 拉氏變換計算…………………………………………… 210
§85 拉氏變換之性質………………………………………… 211
§86 反拉式變換……………………………………………… 214
§87 拉氏變換之應用………………………………………… 216
§88 Heaviside運算的計算法………………………………… 220
§89 其他變換式……………………………………………… 221

第八章 數値分析……………………………………………… 223
§90 數値分析的本質………………………………………… 223
§91 差分表…………………………………………………… 224
§92 差分表應用在內插值中………………………………… 225
§93 代數方程式的數値解…………………………………… 230
§94 數値積分………………………………………………… 237
§95 數値微分………………………………………………… 243
§96 最小二乘方法…………………………………………… 246

習題解答…………………………………………………… 251
索　引…………………………………………………… 256

第一章

集合論、數及群

近代數學最引人的發展之一就是集合論的重要性及成長，其原因則完全由於數學的任一支系所討論的實質或事物均可看成某種特徵的集合，以致於可由集合論的公理引出它們的性質。

集合的觀念是直覺的，而且永遠表一堆事物。這事物（若用數學術語來講便是集合中之元素）可以任何種類的，它或許是所有的鳥所成的集合，也可能是所有瑞典人所成的集合。對於數學家而言，他們較感興趣的集合是所有質數所成的集合，所有實數所成的集合，所有正多邊形所成的集合，或者由0，1，−1三數所構成的集合，或者其他數學東西所組成的集合。

集合論發展的程序是公理化的，而且它用了一套符號，這些符號所代表的意義都很清楚地被定義下來。集合論的整個結構完全基於公理的邏輯推演，並且剛開始時需要很虛心學習這些符號與公理。在本章中，我們將用文字介紹那些較不常出現的關係，以使符號的數量保持在最低限度。

§1 集合元素（Set Membership）

集合的基本觀念是屬於關係；若x是集合A內之元素，則我們將表爲

$$x \in A \tag{1-1}$$

"屬於"是用"$\in$"符號來代替，小寫字母x用來表元素，大寫字母A卻是用來表集合；但因爲集合的元素可能仍舊是集合，小寫字與大寫字的用法也就不一定要遵循如此。

§2 相等（Equality）

第二個觀念是相等，其重要性一如在數學上的地位。集合A與集合B相等的關係是表爲

$$A=B \tag{1-2}$$

而且等號關係的公理化定義是：

(1)兩集合相等的充要條件是它們擁有相同的元素；這句話的意思是集合A與B相等的充要條件是A集合的元素是B集合的元素，而集合B之元素也

都是集合A的元素。

因此我們若要知道兩集合是否相等以前，必須清楚它們的元素，而表示集合中之元素通常用列舉和敘述兩種方法；舉個例子來解釋，若集合D由a，b，c，d四個元素組成，則D可寫成

$$\{a, b, c, d\} \tag{1-3}$$

或 $$\{a\in D: a \text{ 是字母中的第 } 1,2,3 \text{ 或 } 4 \text{ 個字母}\} \tag{1-4}$$

括號內通常是我們要列舉的事物或某敘述。該描述讀成"a為集合D的元素：a為字母中頭四個字母之一。"

當我們利用第二形式表一集合時，則能將集合的元素特性列舉出來。此種方法可以邏輯導出特徵公理（Axiom of Specification）。譬如說：上述之例題，集合D和A的關係，其特徵公理被敘述為：

(2)給予任一集合A及任一條件$S(x)$，則我們可以對應出一集合D，D中之元素便是那些集合A中能滿足條件$S(x)$的元素。

換句話說，條件$S(x)$為集合D的元素所具有的特性如同A中具有$S(x)$特性的元素。若A表由所有的字母所組成，則$S(x)$就是指字母中前四個中之任一個。故我們可將D表為

$$D=\{x\in A: S(x)\} \tag{1-5}$$

§3 集合、部份集合及包括關係（Sets, Subsets, Inclusion）

在前一個例子中，由前四個字母所組成之集合D是由所有字母所組成集合A之部份集合，或們可以符號關係表為：

$$A\supset D$$

或者

$$D\subset A \tag{1-6}$$

若集合X與集合Y有$X\subset Y$之關係，則Y可能沒有X之外的元素，換句話說，X或許等於Y；如果不是這情形，Y必含有X所沒有的元素，則我們稱X是Y的真部份集合（proper subset）。

我們取前敘的集合D，即

$$D=\{a, b, c, d\} \tag{1-7}$$

D包含自身的部份集合$\{a, b, c, d\}$，根據前敘定義，該部份集合非眞部份集合；D同時也包含有許多眞部份集合，擁有三個元素的部份集合計有$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$，擁有二元素的部份集合計有$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$，只有單個元素的部份集合

有 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$；還有一個部份集合——空集合（empty set），它的定義是沒有元素的集合。空集合是集合理論很重要的一環，而且每一集合均有此一部份集合，我們將之記為 ϕ。將 ϕ 看成 D 之一部份集合之後，我們不難發現 D 有十六個部份集合。

同理，當列舉出一集合中只含有 1，2，3，4 或 5 …個元素的部份集合，可推得一通式：若 n 是一集合內元素的個數，則該集合恰有 2^n 個部份集合。

我們應該注意的是在任何情形下，集合內之元素無次序關係；例如

$$\{a,b,c\}=\{c,b,a\}。$$

§4　集合的集合（Sets of Sets）

如果我們回溯到空集合的討論，則將會對集合的集合有具體的概念。ϕ 是空集合，它不含任一元素，但 $\{\phi\}$ 是一個以 ϕ 為其唯一元素的集合，同理 $\{\{\phi\}\}$ 是以 $\{\phi\}$ 為唯一元素的集合。於是乎，

$$\{\{\phi\}\} \neq \{\phi\} \neq \phi \text{，且 } \{\{a\}\} \neq \{a\} \neq a$$

我們將在下節討論此不等的符號"$\neq$"。

§5　否定（Negatives）

我們到此所介紹的三種關係都有其反意義。

以"$\in$"符號表示屬於的關係，其相反符號以"$\notin$"表之；於是乎，敍述「x 非集合 A 中之元素」記為 $x \notin A$；集合的相等關係，我們將之記成"$=$"，它也有一個相反符號"$\neq$"，於是乎，我們將集合 A 不等於集合 B 記為"$A \neq B$"；包含關係的符號是 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，它的否定符號是"$\not\subset$"或"$\not\supset$"，於是乎，我們將集合 A 不包含於集合 B 記為"$A \not\subset B$"或 $B \not\supset A$。

§6　聯集與交集（Unions and Intersections）

就如同數及其他數學上的東西一樣，我們可以對兩個或兩個以上的集合作一運算而得到另一集合。

兩集合之聯集（Union）是由所有屬於該兩集合之一的元素所成的集合；若 C 是集合 A 與集合 B 之聯集，我們記之為

$$C=A\cup B \tag{1-8}$$

請參閱圖 1-1（用圖來解說研究集合論或邏輯上的推論的圖，我們稱之為 Venn 圖）。

在此圖內，集合 A 的元素便是大圓所包圍的元素，而由小圓內的元素組

成了集合 B，整個斜線條所圍成的地區就是 A 與 B 之聯集。

聯集的觀念並不限於兩集合，我們利用聯集公理可以把它擴展到任何數目的集合：

給予一大堆集合，則存在一個由所有屬於這堆集合之一（或許更多）的元素所組成的集合。要注意的是上述公理沒有表示出該集合不包含那一大堆集合以外的元素；為了強調聯集的限制需用到下面的定義。

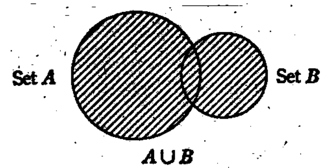

圖 1−1

我們將這堆集合以 C 表之，則聯集公理說明：為任一堆集合 C，存在另一集合 D 滿足下列性質：若 X 為 C 之一元素，$x\in X$，則 $x\in D$；若再以純符號表之，那就是

$$\{x\in D : x\in X,\ X\in C\} \tag{1−9}$$

這公理可以一更簡明符號來表示：

$$D=\cup\{X : X\in C\} \tag{1−10}$$

此處 D 是 C 中所有集合的聯集。

兩集合 A 與 B 的交集（Intersection）便是由同時屬於集合 A 與 B 之元素所組成的集合；若 C 是集合 A 與 B 的交集，我們記為：

$$C=A\cap B \tag{1−11}$$

請參看圖 1−2。

一如圖 1−1 一樣，大圓表集合 A，小圓表集合 B，斜線部份是 A 與 B 之交集。交集的概念並不限於兩集合，我們也可以將之擴展到任意數目的集合；圖 1−3 表出 A，B 與 C 三集合之交集。

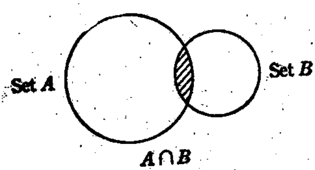

圖 1−2

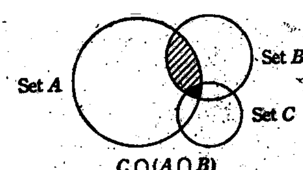

圖 1−3

在圖 1−3 內，三個圓分別代表三集合，淡淡的斜線部份是 A 與 B 的交集，而較明顯的斜線部份是 A，B 的交集與 C 之交集。

設 C 集合內的元素都是集合，則這一大堆集合的交集的通式是：

$$D=\{x : x\in X,\ X\in C\} \tag{1−12}$$

D便是它們的交集；D也可書成

$$D = \cap\{X : X \in C\} \tag{1-13}$$

在三集合的交集裡，用到了二個運算符號，二者都是交集；集合論是由一個以上的符號交錯作成一套很重要的部份，下面一節我們進一步討論其中的關係。

§7　聯集與交集的應用

1．聯集與交集都是可交換的，即

$$A \cup B = B \cup A \tag{1-14}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{1-15}$$

這兩式可以直接由定義與集合的概念推得；然而在本節中，所有式子的證明均將從略。

2．聯集與交集二者運算均滿足結合律，即

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \tag{1-16}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \tag{1-17}$$

3．交集對聯集的分配律成立，即

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1-18}$$

A與（B與C的聯集）的交集等於（A與B之交集）與（A與B之交集）的聯集。（請參看圖1－4）

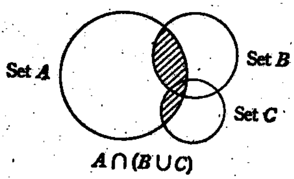

圖1－4

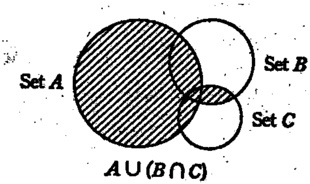

圖1－5

4．聯集對交集的分配律成立，即

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

A與（B與C的交集）的聯集等於（A與B的聯集）與（A與C的聯集）的交集；請參看圖1－5。

§8　差集（Complement）

對於集合欲作更深一層的討論，首先必須介紹差集。若A和B都是集合，

則 B 在 A 中的相對差集，（我們也稱之爲 A 與 B 之差）記作 $A-B$，它是由所有不在集合 B 的所有 A 中元素組成，如圖 1－6 所示。

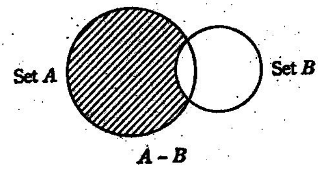

圖1－6

我們可以藉用差集，推得兩個很具權威的集合關係的公式，我們稱之 de Morgan's 法則，它們就是：

(a) $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$ （1－19）

(b) $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$ （1－20）

(a)式相當於下列的敍述：B 在 A 中的相對差集與 C 在 A 中的相對差集之交集等於（B 與 C 的聯集）在 A 中的相對差集。（圖 1－7）

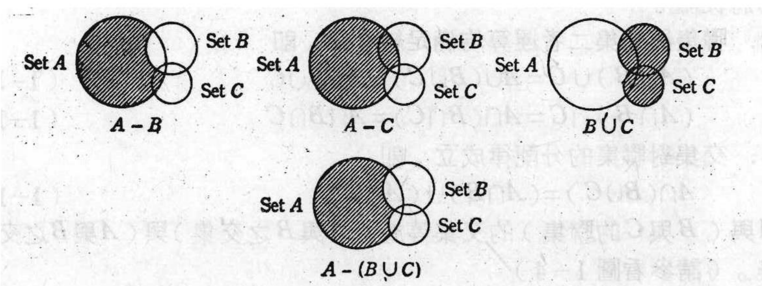

圖1－7

(b)式相當於下列的敍述：B 在 A 中的差集與 C 在 A 中的差集的聯集等於 B 與 C 的交集在 A 中之差集。（圖 1－8）

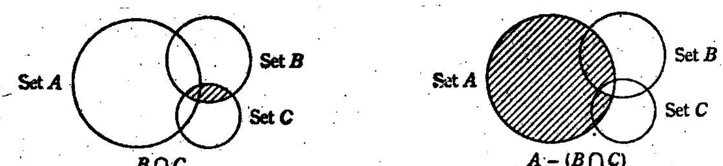

圖1－8

在 de Morgan 法則裡，兩者非常相像，其差別僅在聯集與差集的不同而已，所以我們稱它們爲 dualization 法則。所以若我們知道其中之一式，則另一式便知道了；事實上，許多集合論的定理也有相似的道理，以致於更容易去導出它們，也很方便的記憶下來。

§9　絕對差集（The Absolute Complement）

設A是一集合，E是廣集合（Universal set）；則它的絕對差集是$E-A$或以A'表之。當然此處的A'是所有不在集合A內的所有E中元數的集合。於是乎De Morgan法則對於A與B兩集合，可以寫成

$$(A\cup B)'=A'\cap B' \qquad (1\text{-}21)$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B' \qquad (1\text{-}22)$$

關於絕對差集還有一些很有用的性質，譬如說：

(1)　$$(A')'=A \qquad (1\text{-}23)$$

A的絕對差集的絕對差集即是集合A自身。

(2)　$$A\cap A'=\phi \qquad (1\text{-}24)$$

集合A與其自身的絕對差集的交集是空集合。

(3)　$$A\cup A'=E \qquad (1\text{-}25)$$

集合A與其自身的絕對差集的聯集是E。

(4)　$$E'=\phi \quad \phi'=E \qquad (1\text{-}26)$$

E的絕對差集是空集合，空集合的絕對差集是E。

§10　冪集合（Power set）

在集合論裡，某一集合的冪集合便是以該集合的所有的部份集合爲元素的集合；冪集合公理保證了此一冪集合的存在性；其定義可書成

$$\mathrm{P}(A)=\{X:X\subset A\} \qquad (1\text{-}27)$$

也可以有如下的敍述：冪集合$\mathrm{P}(A)$是A的所有部份集合組成的。例如，第　頁所介紹的集合D，$\mathrm{P}(D)$便包含有16個元素

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D)=&\mathrm{P}\{a,b,c,d\}\\ =&\{\{a,b,c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b\},\\ &\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{\phi\}\}\end{aligned} \qquad (1\text{-}28)$$

我們也曾講過，一個含有n個元素的集合有2^n個部份集合；所以一個含有個元素的集合的冪集有2^n元素。

§11　序對和卡氏積（Ordered Parts and Cartisian Products）

我們曾經在第3節討論過集合的定義與其元素的次序無關；若集合$A=\{a,b,c,d\}$，這僅是說明集合A由a,b,c,d四元素組成，所以$A=\{a,b,c,d\}=\{d,c,b,a\}$。括號內可以把此四元素的次序任意變換。

然而我們可藉集合論的符號來介紹有序集合；我們先考慮以 a 為第一坐標，b 為第二坐標的序對，這對 a 與 b 的次序關係可以從一個含有 $\{a\}$，$\{a,b\}$ 兩部份集合的集合看出，所以我們可將（a,b）定義成 $\{\{a\},\{a,b\}\}$。

序對與僅含兩元素的集合的差別是很大，而且很重要；集合 $\{a,b\}$ 等於 $\{b,a\}$，但是序對 (a,b) 並不絕對等於 (b,a)。

序數的概念可以從序對幾方面來推廣；有序集合 $(a,b,c)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ 是邏輯上的序對的推廣，而且可解釋為三維空間的一點或向量。事實上，有序的 n 個元素通常都是說明在 n 維空間上某點的位置。

序對觀念的另一推廣是序對的集合；若 A 與 B 均是集合，且若 a 為 A 中之一元素，b 為 B 中之一元素，則從序對的定義知 (a,b) 是 $(A\cup B)$ 的部份集合，也就是說它是 $\mathrm{P}(\mathrm{P}(A\cup B))$ 的一元素；然則這也說明了存在一個由所有由 A 中元素為第一坐標，B 中元素為第二坐標的序對的集合，這個序對的集合，我們稱之為 A 與 B 兩集合的 Cartisian Product，或記成 $A\times B$。

反敘述也可以成立；若集合 C 的元素均是序對，則必存在二集合 A 與 B，使得對於 A 中每一元素 a，B 中有一元素 b 與之對應，且（a,b）是 C 之元素，相反地，B 中每一元素 b，在 A 中亦有一元素 a 使得（a,b）是 C 之元素；這兩集合 A 與 B 分別稱為 C 之對應坐標的射影。

§12 關係：函數，定義域與值域（Relations：Function，Domain and Range）

集合論在數學邏輯（以及其他數學部門）最重要貢獻之一是利用序對來說明二元關係；先生與太太以及父親與兒子便是一個最具代表性的例子；由一個先生與其太太組成的一序對滿足第一種二元關係，而由父親與兒子組成的序對滿足第二種關係；我們令 M 是所有配偶的集合或配偶關係的集合，而令 P 是所有父子的集合或父子關係的集合，則

$$(h,w)\in M \tag{1-29}$$

說明 h 和 w 是配偶關係，

$$(s,f)\in P \tag{1-30}$$

說明 s 和 f 是父子關係。

二元關係有很多形式，譬如說一個反身關係僅作用在一個集合 A 的元素，若 a 為集合 A 之元素，則記為 aRa；同一量（某物的重量）用不同單位來度量便是一個例子，化如 906克 R 2 磅；一個對稱關係便是可有反敘述的關係，即若 aRb 成立，則 bRa 亦必成立（寫成 $aRb\to bRa$），配偶是一種對稱關係；