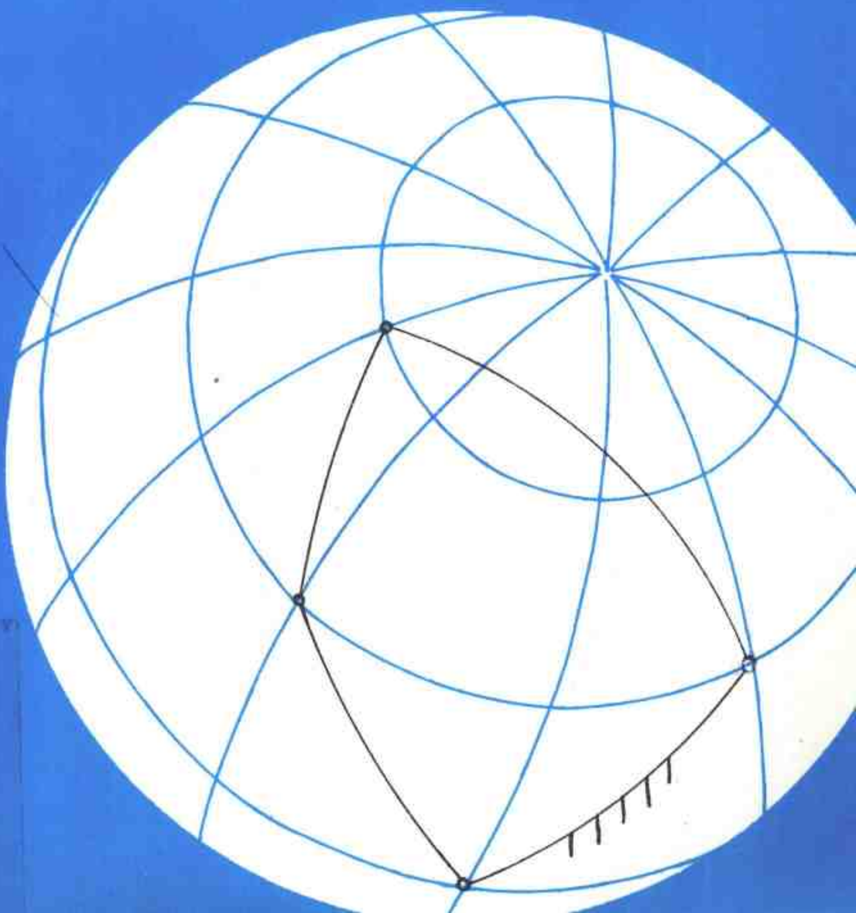
武汉工业大学出版社

球面机构运动学

李璨 著



WUTP

责任编辑:韩瑞根

封面设计:李晓慧

ISBN 7-5629-1272-6

9 787562 912729 >

ISBN 7-5629-1272-6/TH · 35

定价:12.50元

球面机构运动学

李[illegible]璨 著

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

球面机构运动学/李璨著. —武汉:武汉工业大学出版社,1997
ISBN 7-5629-1272-6

Ⅰ.球… Ⅱ.李… Ⅲ.球面四杆机构-运动学 Ⅳ.TH11

武汉工业大学出版社出版发行
武汉工业大学印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张: 8 字数:200 千字
1997 年 4 月第 1 版 1997 年 4 月第 1 次印刷
印数:1—1000 定价:12.50 元

前　言

机构是有一个固定构件的受约束的运动链。一个平面机构上的任何一个运动构件上的任何一个点都被限制运动于一个平面上，而所有的这些运动平面都是互相平行的。类似的，一个球面机构上的任何一个运动构件上的任何一个点都被限制运动于一个球面上，而所有的这些运动球面都是同心的。一个在三维空间运动的刚体具有6个自由度，也即沿三条互相垂直的轴线的三个平行移动以及绕这些轴线的三个转动。一个在平面上运动的刚体只有三个自由度，即沿两个互相垂直的轴线的两个平行移动以及绕垂直于上述两轴线的轴线的转动。类似的，一个在球面上运动的刚体也只有三个自由度，即绕通过球心的三条互相垂直的轴线的转动。因此，任何球面的瞬时运动都是一个转动，它可能是绕一条固定轴线的转动，也可能是绕一条瞬时轴线的转动，这些轴线都必须是通过球心的。

球面机构的各转动轴线相交于一点。它主要用于传递相交轴的非匀速转动，也可以作为前置机构，和后置机构相串接，以实现多种机械所要求的给定的运动规律[33]。虽然这种运动传递也可以由非圆齿轮和圆锥齿轮或螺旋齿轮来完成，但这些齿轮制造困难，成本高昂。而且要占用较大的空间，而球面机构的制造则相对简单经济得多，而且球面机构结构紧凑，特别适用于空间受限制的地方。与一般的空间机构相比，由于球面机构象平面机构一样受到三个公共约束，它的设计比较简单，而且不使用球面副，只使用个数较少的转动副，故而制造简单，维护方便。与平面机构相比，球面机构又象空间机构一样能用于传递相交轴的转动，而且动力性能较好，适用于高速转动[7]、[39]，因而球面机构在工业上可望得到较广泛的应用。如广泛使用的万向节就是最典型的球面四杆机构，大多

数实用的机械手的手腕部是一个球面三杆开链机构[46]，此外，球面四杆机构还应用于摆盘式切割机构、飞机的副翼操纵机构、太阳能利用中的吸能镜转位机构[1]、揉面机构、搅拌机构、运动转换机构、洗衣机、开门机构[3]、摆盘式发动机[40]、[41]、以及加工机械，特别是纺织、印刷、轻工机械中[33]。

事实上，若将球面机构的球面半径延长至无穷大，则球面机构就可变成平面机构，因此平面机构可看作是球面机构的特殊情况，对球面机构的运动学问题的处理可用类似平面机构运动学问题的方法。例如，研究平面机构的运动学问题的 Euler－Savary 方程就有其研究球面机构运动学问题的对应方程。因此，对于平面机构的运动学问题的深入了解对于研究球面机构运动学问题的研究是很有帮助的。

然而平面机构必竟只是球面机构的特例，球面机构和平面机构之间还是有着许多重要的区别。在球面几何中大圆相应于平面几何中的直线，虽然两个大圆可以是垂直的，或者是以某个角度相交的，但并不存在互相平行的大圆，在球面上的任何两个大圆都必须相交，这与平面几何中的两条直线的情况是不一致的。因此，尽管在平面和球面之间存在某些相似性和可比性，应用于平面机构的许多定理却一般并不能直接或完全不能用于球面机构。例如，平面机构运动学中的拐圆(inflection circle)在球面机构运动学中对应着相当复杂的球面拐曲线，而平面机构运动学中的 Carter－Hall 圆在球面机构运动学中不再对应球面圆。

如果考虑机构的发展是从平面机构到球面机构，而后又从球面机构到空间机构的，那么球面机构是介于平面机构和空间机构之间的机构。正如对平面机构运动学的深入广泛的研究有助于对球面机构运动学的研究一样，对球面机构运动学的深入和广泛的研究对空间机构运动学的发展也是很有帮助的。

球面机构长期以来受到机构学者的注意，早在 16 世纪，Cardano 就描述了至今还广泛使用的万向联轴节[5]，19 世纪末的机构学者把它称为锥面链（conic chain）或锥面机构（conic mechanism），因为机构上的每一点与中心点的联线在空间中的运动轨迹是锥面[6]，1947 年文〔53〕用几何方法讨论了球面机构的许多重要性质。近代的机构学者注意到球面机构与平面机构类似，都是二维空间的机构，因而把它们都归于二次链(quadric chain)，平面机构是平面形式的二次链，球面机构则是锥面的二次链(conic quadric chain)或锥面二次机构(conic linkage)[5][6]，认为它是平面机构在三锥空间里的对应机构。从 60 年代起，现代的机构学者称之为球面机构，并把它当作一种特殊的空间机构来进行研究。

很自然地，对球面机构的早期研究主要集中于四杆机构，特别是有大量的关于球面四杆机构的输入—输出运动的分析与综合的研究文章，如文〔4〕～〔6〕，〔12〕～〔18〕，〔20〕〔21〕〔22〕〔24〕〔26〕〔27〕〔29〕〔30〕，对这些问题的研究一直延续到近年，如文〔31〕〔33〕～〔36〕，〔38〕〔42〕〔44〕〔45〕，这些文章中大多数都是利用球面几何和球面三角学的原理建立输入—输出角关系式后再进行适当的处理，用代数或几何的方法进行再现函数机构的综合。有部分文章涉及球面四杆机构的组成和动力学，如文〔7〕〔9〕〔19〕〔28〕〔37〕〔39〕～〔41〕。还有部分文章涉及球面机构的瞬时运动学，如文〔10〕〔29〕〔30〕〔36〕〔47〕。

多年来，国内外学者已对平面机构作了广泛而深入的研究，大量的研究工作都是围绕着连杆点的运动学问题进行的，因为连架杆都只能绕着其固定铰链点作转动或摆动，运动的形式很简单，只有连杆才能作一般的平面运动，连杆及连杆上的点的运动才能表现出多种多样的形式。类似的，在球面机构中，也只有连杆才能作一般的球面运动，但是关于球面四杆机构的连杆曲线的研究还比较少。我们知道，连杆曲线在机构的运动分析和综合中有着重要的作用，因而推导连杆曲线方程并分析连杆曲线的形态、特征的问题

早就引起了机构学者的广泛的兴趣。对于平面四杆机构，人们早就用许多不同的方法得出了机架位于坐标系中任意位置上的四杆机构的连杆上的一点的轨迹方程，它是具有九个参数的六次方程，并对该曲线的形状、特征和形态作了大量的研究。由于空间机构的复杂性，对空间机构的连杆曲线的研究进展较慢[8]。文〔53〕在 1947 年得出了机架位于直角坐标系中特定位置的球面四杆机构的连杆曲线方程。H. Worle[48] 在 1962 年，G. Dittrich 和 H. Zakel[49] 在 1975 年又分别用较简单的方法得出了机架位于特定位置的球面四杆机构的连杆曲线方程。因为这些曲线方程的参数中未能包含机架在坐标系中的位置参数，故而只有六个参数，这无疑是球面机构研究的严重不足。如文〔11〕在进行球面四杆构机的轨迹综合时，除了应用 H. Worle 的公式外，还要另外考虑该机构的机架在坐标系中的位置和方位，因而遇到了很大的困难，所得的结果误差也很大。因此，作出机架位于任意位置的球面四杆机构的连杆上任一点的轨迹方程是一个十分迫切的任务。

与平面机构和空间机构的轨迹分析与综合问题一样，球面机构的连杆上某点的轨迹分析和轨迹综合也是很重要的。文〔11〕〔15〕〔20〕〔23〕〔42〕〔43〕〔45〕〔50〕〔51〕〔52〕都是关于轨迹综合问题的，但笔者至今未见过连杆点位置分析的报告，也未见过有关求连杆点的运动速度和加速度的报告。

关于使固结在球面四杆机构的连杆上的刚体通过球面上 n 个有限分离位置的综合问题，有如下一些文章：文〔53〕用几何方法研究解决了球面运动中的布尔梅斯特曲线和布尔梅斯特点的问题；文〔13〕〔14〕在用空间位移矩阵和空间坐标系研究一般空间运动的基础上，将球面四杆机构作为特例进行研究，提出了布尔梅斯特锥面和布尔梅斯特轴线的代数方程；文〔31〕用矩阵法得出了布尔梅斯特点的六次代数方程，但此法并不很方便；文〔15〕用一般的空间位移矩阵和优化方法，研究了球面四杆机构的刚体导引问题以及

球面四杆机构的再现函数和再现轨迹问题，该文所给的一个例题涉及到制造一个模拟人类股关节运动的外部机械装置的可行性研究，这个装置可用于整形外科；文〔29〕〔30〕用空间坐标系和空间位移矩阵得出了运动参数和结构参数之间的关系式，然后对这些关系式进行处理，得到关于求解布尔梅斯特点的六次方程；文〔42〕则是用几何投影的方法研究了再现函数、轨迹和刚体导引的问题。

现有文献中对球面六杆机构的研究报告还很少。文〔22〕用一般的球面四杆机构的输入—输出方程叠加后建立目标函数，再用优化方法设计球面六杆再现函数机构。文〔23〕将文〔15〕的方法扩展用于研究球面六杆再现轨迹机构的综合。笔者至今未见过研究球面四杆和六杆刚体导引机构运动分析的文章，除了文〔43〕外，也未见过其它研究球面六杆刚体导引机构运动综合的文章。

在研究球面四杆或六杆的刚体导引或轨迹再现机构的问题时，除了早期的几何法或投影方法之外，研究者总是使用一般的空间位移矩阵作为基本的数学工具，然后用研究空间机构的一般方法，加上一些约束条件，使球面机构成为空间机构的特例。这种研究方法和发展是很自然的，因为空间机构的研究在近十几年内发展迅速，作为空间机构研究基础的空间位移矩阵已为许多人所熟悉并获得了广泛的应用。球面机构既是一种特殊的空间机构，那么在研究它时使用空间位移矩阵并加以特有的约束条件自然是可行的。但是，正如平面机构问题虽然也可以用空间位移矩阵并加以平面约束来处理，但这样的处理方式并不方便一样，空间位移矩阵加上球面约束的处理方式用于球面机构也不方便。没有人用空间位移矩阵加平面约束的方法去处理平面机构问题，因为平面机构是比空间机构简单的机构，因此自有其方便简单的数学工具（如矢量法、三维矩阵法）。球面机构与平面机构类似，都是三族机构，球面上的刚体与平面上的刚体一样，都只有三个自由度，那么，可以推想，处理球面机构的问题也应和处理平面机构问题一样，从其本身

的特点出发，直接去解决问题，而不是先上升到一般的空间机构问题，然后再退回到特殊的球面机构问题，这样很可能会简单方便得多。因此，寻找一种特殊的用于球面机构的新方法，使球面机构的运动分析和综合过程变得比较简单些，这是本书所致力要解决的主要问题。

在现有文献中，无论是研究球面四杆还是六杆机构的综合问题，当要实现的位置数大于五时，都是使用优化方法。在建立目标函数时都是根据杆的定长约束条件，使机构处于各个位置上时约束杆的长度变化最小，而不考虑机构的装配条件，这样优化所得的机构很可能实际上无法在一次装配后实现所有位置，更无法保证其按指定顺序运动。因而在完成优化后还必须用作图或分析的方法检验所得的机构是否满足装配条件和运动顺序条件，这是相当麻烦的。特别是当所要实现的位置数较多时，可能要试很多次才能得出满足装配条件和运动顺序条件的机构。此外，由于这样建立的目标函数并不能直接反映所产生的运动与给定运动之间的偏差，因而目标函数的最小点不一定就是运动偏差的最小点。笔者未曾见过讨论精确设计球面六杆机构使其主动件输入转角与刚体的给定的五个位置相配合的文章。

球面单环多杆机构的边角关系近年来也引起了机构学者的注意，这不单是由于这些球面机构本身提供了现实应用的可能，更重要的是由于在研究空间机构的诸多方法(如图解法，矢量法，四阶位移矩阵法，对偶数矩阵法，对偶四元数法，旋转变换张量法，酉交矩阵法)中，球面三角法是一种较为简便的方法[25][32][54][55][56]。

空间机构分析的球面三角法的理论基础是 B·B·Добровольский 的变换原理[54]，它说明球面多边形的三角表达式和当量的空间多边形的对偶角的三角表达式是一样的，因此球面多边形(球面单环多杆机构)的边角关系是用球面三角法研究空间机构运动问题的基础。

J·Duffy 用球面三角法广泛地研究了单环多杆机构。他将四杆机构分为两个球面三角形，分别应用正弦定理、余弦定理和正余弦定理，然后消去多余的内角和边，得到四杆机构的边角关系。又将五杆机构分为一个四边形和一个三角形，分别应用边角关系式并消去多余项，得到五杆机构的边角关系式……，如此依次得到球面单环四杆、五杆、六杆、七杆机构的边角关系式，并将它们应用于空间机构的位移分析。J·Duffy 的研究成果无疑是空间机构研究的一大进步，其不足之处则是他引用的许多公式几何意义不甚清楚，使人感到过于繁杂，这影响了球面三角法的广泛使用。

鉴于目前对球面机构的研究还很不充分完善，本书旨在建立一种方便实用的研究球面机构的新方法，并用此新方法研究球面机构的连杆曲线，研究球面机构连杆点的运动分析和再现轨迹的机构综合，研究球面机构连杆的运动分析与刚体导引机构的综合，并研究球面单环机构的边角关系及其在空间机构运动分析中的应用。书中各章主要内容如下：

第一章是本书的基础部分。注意到球面机构是特殊的空间机构，它和平面机构类似，都是三族机构，球面上的刚体与平面上的刚体一样，都只有三个自由度，为了寻求一种类似于处理平面机构问题的数学方法来处理球面机构问题，本章首先引进了类似于平面坐标系的球面坐标系，为了使球面上的点与一对球面坐标值实现一一对应的关系，特别规定当 $\varphi_M=\pm 90°$ 时 $\theta_M=0$。然后又引进了坐标线、φ 直线、球面上两直线的夹角和球面直线的倾角等概念，使对刚体在球面上的位置的描述与刚体在平面上的位置的描述对应起来。

该章然后导出了已知球面坐标值的两点之间的距离的公式。在此基础上又讨论了球面上的刚体绕任意点转动时的位置关系及刚体上的三点间的位置关系，这些都是在以后各章中讨论刚体在球面上的运动时所必需的。对应于平面矢量的概念，该章还引进了

球面矢量的概念，这主要是为了在第二章中对连杆点的运动分析作准备。为了在第三章中讨论机构综合的方便，该章还讨论了球面上的圆和直线方程。因为本书主要是关于球面机构的分析与综合问题的，为了在以后各章中展开对这些问题的研究，该章对机构分析与综合的基本问题和基本知识也进行了介绍。最后，还简单介绍了本书中所用的数学工具最优化方法。

第二章推导了机架位于球面坐标系中任意位置的球面四杆机构的九参数连杆曲线方程，它是八次代数方程。在此基础上还讨论了 Stephenson－1 型六杆机构的连杆曲线方程。为了克服机构综合中的分支问题和运动顺序问题，该章又导出了球面四杆机构、球面六杆 Stephenson－1 型、Stephenson－2 型、Watt－1 型和 Watt－2 型机构的以输入转角为参数的连杆曲线方程，得到了对应于每一个输入转角的连杆上某点位置的显性表达式。这些参数表达式然后被用于进行球面机构连杆点的运动分析及再现轨迹机构的综合。这种综合的方法与现在广泛使用的按定长约束条件建立目标函数的综合方法相比有很显著的优点：它没有分支问题，即由所选定的一种装配方式必能近似地实现所要求的运动位置；它能满足运动位置与输入转角之间的配合要求，包括运动顺序性要求；目标函数直接反映了所实现的运动与给定运动之间的误差。该章最后分别用文〔11〕和〔23〕中的例题设计了两个新的机构，与原文中设计的机构相比，新机构显然优于原机构。

第三章借鉴平面机构的刚体导引机构的综合方法，讨论了实现二、三、四、五个有限分离位置的刚体导引的球面四杆机构的综合问题，并建立了球面上的布尔梅斯特曲线的三次代数方程和布尔梅斯特点的六次代数方程。该章又讨论了球面四杆刚体导引机构的运动分析问题，并在此基础上探讨了球面四杆刚体导引机构的优化综合问题。这种优化设计的方法与现有的优化设计方法相比，也有类似于在第二章中所表现的优点，即无分支问题，满足运

动位置与输入转角之间的配合要求，目标函数直接反映了运动偏差。该章同时也讨论了用定长约束条件建立目标函数的方法，它的优点是计算量较小。

第四章中逐个讨论了对球面六杆刚体导引 Stephenson－1 型、Stephenson－2 型、Watt－1 型、Watt－2 型机构进行运动分析的方法和以位置偏差为目标函数的优化设计方法，讨论了这些机构与 Stephenson－3 型机构用定长约束条件建立目标函数进行优化设计的方法。另外还讨论了在被导引刚体的给定位置数 $n\leqslant5$ 时的精确设计方法，这里所使用的运动转换法原理与平面机构设计中所使用的运动转换法原理类似，设计所得的机构可以满足给定的输入转角的配合要求。该章最后计算了一道例题。

第五章首先讨论了起点位于球面坐标系中任意位置的球面开链机构末端的位置分析的递推公式，然后在研究单环多杆机构时将其拆分为两个开链机构和一个连接杆，利用前面所得的开链机构末端的位置公式和定长杆的约束条件建立起球面四杆、五杆、六杆、七杆机构的边角关系式，可以与文〔25〕一样得到所谓的“正弦定理”、“余弦定理”，“正余弦定理”以及它们的各种补充定理。由于本章是直接应用两个开链来建立单环机构的边角关系的，因而能很清楚直观地揭示这些关系式的几何意义。适当地选择拆杆的方法可以使所得的边角关系式中不含某些不想要的参量。该章同时还讨论了利用变换原理和所得的球面机构的边角关系建立相应的空间机构运动关系的方法。

与平面机构运动学问题一样，球面机构运动学问题也是一个相当广泛的课题。长期以来，已有许许多多的机构学者发表了众多的论文和专著，如文〔2〕。限于篇幅，本书只能讨论有限运动学问题。

为了使本书能够较全面地包括球面机构有限运动学的各主要方面的内容，第六章介绍了关于设计球面四杆再现函数机构的问

题，如使其两连架杆实现数对对应角位移的问题。第七章综合性地介绍了球面四杆机构的演化，并讨论了几种特定类型的球面四杆机构的运动特性。

本书中所涉及的所有数值计算都是在 IBM4341 上进行的。

本书的大多数内容都来自笔者数年来的研究成果。为了使本书的内容更全面，也编入了部分其它学者的论著中的有关内容。第七章由何开明编著，其余都由李璨编著。

本书中的许多研究成果是笔者在张启先教授和汪钟正教授的悉心指导下完成的，在本书的编写过程中，汪钟正教授又给予了极大的支持和帮助，提出了很多宝贵的意见，对此笔者表示衷心的敬意和感谢。

由于笔者的水平有限而且时间匆忙，误漏欠妥之处在所难免，请广大读者批评指正。

李　璨

1996 年 10 月

目　录