【全国名校一线特高级教师联合编写】

GAOKAOGELEIXINTIXINGJIEXI

高考各类新题型解析

[杨霞芬 杨林仙] 总主编

高考各类新题型解析

高考夺魁很轻松，清华北大不是梦！

数学（文科）

考试用书

武秀琴 主编

一网打尽 —— 囊括全国各大省市高考试题

三箭齐发 —— 考点尽收 重点突破 难点详解

掌握趋势 —— 紧扣新大纲 整合新课程 解读新趋势

冲刺高考 —— 科学设计 讲练结合 事半功倍 轻松夺魁

全国百佳图书出版单位 百佳

中国时代经济出版社

【全国名校一线特高级教师联合编写】

GAOKAOGELEIXINTIXINGJIEXI

高考各类新题型解析

高考各类新题型解析

数学（文科）

考试用书

主编：武秀琴

中国时代经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考各类新题型解析·数学（文科）/武秀琴主编. —北京：中国时代经济出版社，2010. 1
ISBN 978－7－80221－903－8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 武… Ⅲ. 数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 096645 号

高考各类新题型解析·数学（文科）

武秀琴 主编

出　版	中国时代经济出版社
地　址	北京市西城区车公庄大街乙5号 鸿儒大厦B座
邮政编码	100044
电　话	（010）68320825（发行部） （010）88361317（邮购）
传　真	（010）68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	880×1230　1/16
版　次	2010年1月第1版
印　次	2010年1月第1次印刷
印　张	21.625
字　数	650千字
定　价	32.00元
书　号	ISBN 978－7－80221－903－8

编写说明

新课程理念冲击并改变着我们的固有观念，新高考需要我们运用新的思维方法去探索，重新审视高考命题的导向。要想在高考中取得理想的成绩，需要具备扎实的知识、灵活的思维和准确的表达等素养。素养的形成源自艰苦努力的积累。在高考的考场上，我们要靠智慧来答题，而不是记忆。智慧要在不懈的实践和不懈的反思中形成。基于上述理念，我们特请国内重点中学长期从事高三教学工作特高级教师编写了本套丛书。

考点扫描：紧扣新教材，落实新大纲要求，梳理知识脉络，展示知识要点，把握准确的高考信息。

应试对策：针对各专题的重点、难点讲解复习的方法和策略以及基本的解题思路和技巧，使学生掌握高考命题的规律、命题手法和解决问题的思维规律。

高考题解：试题从近五年全国各类高考题中遴选，题目经典新颖，内容丰富翔实。注重基础知识的同时，突出培养学生灵活解决问题的综合能力，力求解题效益的最大化。

跟踪训练：依据新课程要求，从近五年高考题中选题，重点选取考生易出错的知识点的题目进行针对训练，使学生体验高考，探索解题规律。

本书最后还配有三套学科内综合的模拟题，帮助考生进行高考前的热身，帮助考生在最后的复习中拾遗补阙，争取最大的收益。

编者

. Contents 目录 .

专题一　集合

考点扫描

考点1　集合的概念

①集合是原始概念，不能有明确的定义，我们只能给出描述性的定义：具有某一共同属性的一组对象的全体叫做集合，其中的每一个对象都叫做集合的元素.

②集合中的元素具有确定性、无序性和互异性.

③集合的表示方法，常用的有列举法和描述法和图示法.

(1)列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内.

(2)描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内.

(3)图示法：用封闭的曲线表示集合的方法.

④集合的分类：

按照集合中元素的多少，集合分为三大类：

有限集——含有有限个元素的集合叫做有限集；

无限集——含有无限个元素的集合叫做无限集；

空集——不含任何元素的集合叫做空集，通常用 Φ 表示.

要注意空集 $\varnothing$ 与集合 $\{\varnothing\}$ 的区别；注意 $\varnothing$ 与 $\{0\}$ 的区别.

⑤常用数集及其记法：

非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$；正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；整数集，记作 $\mathbf{Z}$；有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；实数集，记作 $\mathbf{R}$.

考点2　集合与集合的关系

①子集：对于集合 A、B，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 就叫做集合 B 的子集，记作：$A\subseteq B$ 或 $A\subset B$.

②真子集：如果集合 A 是 B 的子集，而且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 就叫做 B 的真子集，记作：$A\subsetneqq B$.

③集合相等：如果集合 A 是集合 B 的子集，而且集合 B 是集合 A 的子集，那么就说集合 A、B 相等，记作 $A=B$.

④子集的性质

1) $A\subseteq A$；2) $\varnothing\subseteq A$，特别地 $\varnothing\subseteq\varnothing$；3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

4)若集合 A 是 n 个元素的集合，则集合 A 有 2^n 个子集(其中 2^n-1 个真子集)；

考点3　集合的运算

①交集与并集

(1)交集定义：一般的，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集. 即 $A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$. 如图 1－1 中的阴影部分表示 $A\cap B$.

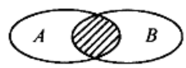


图 1－1

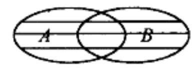


图 1－2

(2)并集定义：一般的，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集. 即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 如图 1－2 中的阴影部分表示 $A\cup B$.

(3)简单性质：

1) $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；

2) $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$；

3) $(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$；$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$；

4) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$；$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

②全集与补集

(1)包含了所要研究的各个集合的全部元素的集合称为全集，记作 U；

(2)若 S 是一个集合，$A\subseteq S$，则 $C_SA=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$ 称 S 中子集 A 的补集；

(3)简单性质：1) $\complement_S(\complement_SA)=A$；

2) $\complement_SS=\varnothing$，$\complement_S\varnothing=S$；

3) $\complement_S(A\cap B)=(\complement_SA)\cup(\complement_SB)$；

(4) $\complement_S(A\cup B)=(\complement_SA)\cap(\complement_SB)$.

应试对策

有关集合的高考试题，考查重点是集合与集合之间的关系，近年试题加强了对集合的计算化简的考查，并向无限集发展，考查抽象思维能力，在解决这些问题时，要注意利用几何的直观性，注意运用 Venn 图解题方法的训练，注意利用特殊值法解题，加强集合表示方法的转换和化简的训练. 考试形式多以一道选择题为主，分值约 5 分. 建议在复习时要注意集合的基本概念、运算和工具作用.

高考题解

例 1 (1)(2008 山东)满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)(2007 全国Ⅰ)设 $a,b\in\mathbf{R}$,集合 $\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$,则 $b-a=$ ( )

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

(3)(2009 福建)若集合 $A=\{x|x>0\}$ $B=\{x|x<3\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x|x<0\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|x>4\}$　　D. $\mathbf{R}$

(4)(2009 浙江)设 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|x>0\}$,$B=\{x|x>1\}$,则 $A\cap\complement_U B=$ ( )

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|x<0\}$　　D. $\{x|x>1\}$

解析:(1)本小题主要考查集合子集的概念及交集运算.集合 M 中必含有 a_1,a_2,则 $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M=\{a_1,a_2,a_3\}$.

【答案】 B.

【点评】 该题考查集合子集个数公式.如果一个集合有 n 个元素,那么它的子集有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.想一想:若 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_8\}$,而其他条件不变呢?(提示:相当于一个含有 6 个元素的集合的子集的个数).

(2)根据集合相等的定义可知 $\begin{cases}a=\frac{b}{a}\\a+b=0\\1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}\Rightarrow b-a=2$,

【答案】 C.

【点评】 集合中的元素具有确定性、无序性、互异性.

(3)解法一:利用数轴可得容易得答案 B.

解法二:(验证法)用 x=1 验证.由交集的定义,可知元素 1 在 A 中,也在集合 B 中,故选 B.

【答案】B

【点评】本题考查的是集合的基本运算.属于容易题.

(4)对于 $\complement_U B=\{x|x\leqslant 1\}$,$\therefore A\cap\complement_U B=\{x|0<x\leqslant 1\}$.

【答案】B.

【点评】本小题主要考查了集合中的补集、交集的知识,在集合的运算考查对于集合理解和掌握的程度,当然也很好地考查了不等式的基本性质.

例 2 (1)(2009 陕西)某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组,每名同学至多参加两个小组,已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26,15,13,同时参加数学和物理小组的有 6 人,同时参加物理和化学小组的有 4 人,则同时参加数学和化学小组的有________人.(用数字作答)

(2)(2008 江苏)$A=\{x|(x-1)^2<3x-7\}$,则 $A\cap\mathbf{Z}$ 的元素个数为________.

(3)(2007 湖南)设集合 $A=\{(x,y)|y\geqslant|x-2|,x\geqslant 0\}$,$B=\{(x,y)|y\leqslant -x+b\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,

①b 的取值范围是________________.

②若 $(x,y)\in A\cap B$,且 $x+2y$ 的最大值为 9,则 b 的值是________.

解析:(1)由条件知,每名同学至多参加两个小组,故不可能出现一名同学同时参加数学、物理、化学课外探究小组,设参加数学、物理、化学小组的人数构成的集合分别为 A,B,C,则 $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=0$,$\mathrm{card}(A\cap B)=6$,$\mathrm{card}(B\cap C)=4$,

由公式 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

易知 $36=26+15+13-6-4-\mathrm{card}(A\cap C)$,故 $\mathrm{card}(A\cap C)=8$.即同时参加数学和化学小组的有 8 人.

【答案】 8.

(2)本小题考查集合的运算和解一元二次不等式.由 $(x-1)^2<3x+7$ 得 $x^2-5x-6<0$,$\therefore A=(-1,6)$,因此 $A\cap\mathbf{Z}=\{0,1,2,3,4,5\}$,共有 6 个元素.

【答案】 6

(3)①如图 1—3 所示,由图象可知 b 的取值范围是 $[2,+\infty)$;②若 $(x,y)\in A\cap B$,则 (x,y) 在图中的四边形内,$t=x+2y$ 在 $(0,b)$ 处取得最大值,所以 $0+2b=9$,所以 $b=\frac{9}{2}$.

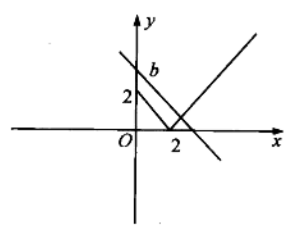


图 1—3

【答案】 ①$[2,+\infty)$　②$\frac{9}{2}$.

例 3 (2007 北京)已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$ 其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$,由 A 中的元素构成两个相应的集合 $S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$,$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$,其中 (a,b) 是有序实数对,集合 S 和 T 的元素个数分别为 m,n.若对于任意的 $a\in A$,总有 $-a\notin A$,则称集合 A 具有性质 P.

(Ⅰ)检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P,并对其中具有性质 P 的集合写出相应的集合 S 和 T;

(Ⅱ)对任何具有性质 P 的集合 A,证明:$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$;

(Ⅲ)判断 m 和 n 的大小关系,并证明你的结论.

（Ⅰ）解：集合$\{0,1,2,3\}$不具有性质P，$\{-1,2,3\}$具有性质P，其相应的集合S,T是$S=\{(-1,3),(3,-1)\}$，$T=\{(2,-1),(2,3)\}$；

（Ⅱ）证明：首先由A中的元素构成的有序实数对共有k^2个，

$\because 0\in A,(a_i,a_i)\in T(i=1,2,\cdots,k)$，

又$\because$当$a\in A$时，$-a\notin A$，

$\therefore$当$(a_i,a_j)\in T$时，$(a_j,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$，于是集合$T$中的元素的个数最多为

$n=\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{1}{2}k(k-1)$，即$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

（Ⅲ）解：$m=n$，证明如下：

①对于$(a,b)\in S$，根据定义$a\in A,b\in A,a+b\in A$，$(a+b,b)\in T$

如果(a,b)与(c,d)是S中的不同元素，那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立，于是$a+b=c+d$与$b=d$中至少有一个不成立，故$(a+b,b)$与$(c+d,d)$也是T中的不同元素．可见S中的元素个数不多于T中的元素个数，即$m\leqslant n$；

②对于$(a,b)\in T$，根据定义$a\in A,b\in A$，则$a-b\in A$，从而$(a-b,b)\in S$

如果(a,b)与(c,d)是T中的不同元素，那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立，于是$a-b=c-d$与$b=d$中至少有一个不成立，故$(a-b,b)$与$(c-d,d)$也是S中的不同元素．可见T中的元素个数不多于S中的元素个数，即$n\leqslant m$.

由①②可知$m=n$.

跟踪训练

一、选择题

1.（2008 安徽）若A为全体正实数的集合，$B=\{-2,-1,1,2\}$则下列结论正确的是（　　）

A. $A\cap B=\{-2,-1\}$

B. $(\complement_R A)\cup B=(-\infty,0)$

C. $A\cup B=(0,+\infty)$

D. $(\complement_R A)\cap B=\{-2,-1\}$

2.（2008 海南、宁夏）已知集合$M=\{x|(x+2)(x-1)<0\}$，$N=\{x|x+1<0\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(1,2)$

3.（2009 陕西）设不等式$x^2-x\leqslant 0$的解集为M，函数$f(x)=\ln(1-|x|)$的定义域为N，则$M\cap N$为（　　）

A. $[0,1)$　　B. $(0,1)$

C. $[0,1]$　　D. $(-1,0]$

4.（2008 辽宁）已知集合$M=\{x|-3<x<1\}$，$N=\{x|x\leqslant -3\}$，则$M\cup N=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{x|x\geqslant -3\}$

C. $\{x|x\geqslant 1\}$　　D. $\{x|x<1\}$

5.（2008 全国Ⅱ）设集合$M=\{m\in\mathbf{Z}|-3<m<2\}$，$N=\{n\in\mathbf{Z}|-1\leqslant n\leqslant 3\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

6.（2008 陕西）已知全集$U=\{12345\}$，集合$A=\{1,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则集合$\complement_U(A\cap B)=$（　　）

A. $\{3\}$　　B. $\{4,5\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,4,5\}$

7.（2008 天津）设集合$U=\{x\in\mathbf{N}|0<x\leqslant 8\}$，$S=\{1,2,4,5\}$，$T=\{3,5,7\}$，则$S\cap(\complement_U T)=$（　　）

A. $\{1,2,4\}$　　B. $\{1,2,3,4,5,7\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,4,5,6,8\}$

8.（2008 浙江）已知集合$A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则$A\cup B=$

A. $\{x|x\geqslant -1\}$　　B. $\{x|x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

9.（2007 山东）已知集合$M=\{-1,1\}$，$N=\left\{x|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{0\}$

C. $\{-1\}$　　D. $\{-1,0\}$

10.（2007 全国 1）设$S=\{x|2x+1>0\}$，$T=\{x|3x-5<0\}$，则$S\cap T=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{x|x<-\frac{1}{2}\}$

C. $\{x|x>\frac{5}{3}\}$　　D. $\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\}$

11.（2007 安徽）若$A=\{x|x^2=1\}$，$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{3\}$　　B. $\{1\}$

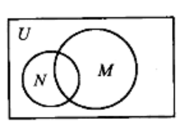
C. $\varnothing$　　D. $\{-1\}$

12.（2007 江苏）已知全集$U=\mathbf{Z}$，$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x^2=x\}$，则$A\cap C_U B$为（　　）

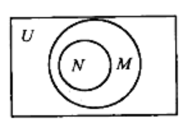
A. $\{-1,2\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

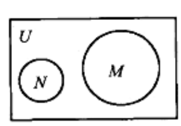
13.（2009 年广东）已知全集$U=\mathbf{R}$，则正确表示集合$M=\{-1,0,1\}$和$N=\{x|x^2+x=0\}$关系的韦恩(Venn)图是（　　）



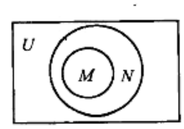
A



B



C



D

14. (2009北京)设集合 $A=\{x|-\frac{1}{2}<x<2\}$,$B=\{x|x^2\leqslant 1\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{x|-1\leqslant x<2\}$　　B. $\{x|-\frac{1}{2}<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|x<2\}$　　D. $\{x|1\leqslant x<2\}$

15. (2006江苏)若 A、B、C 为三个集合,$A\cup B=B\cap C$,则一定有 ( )

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$

C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

16. (2006湖北)有限集合 S 中元素个数记作 card(S),设 A、B 都为有限集合,给出下列命题:

①$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 card$(A\cup B)=$card$(A)+$card(B);

②$A\subseteq B$ 的必要条件是 card$(A)\leqslant$card(B);

③$A\not\subseteq B$ 的充分条件是 card$(A)\leqslant$card(B);

④$A=B$ 的充要条件是 card$(A)=$card(B).

其中真命题的序号是 ( )

A. ③、④　　B. ①、②

C. ①、④　　D. ②、③

17. (2006安徽)设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

18. (2006辽宁)设集合 $A=\{1,2\}$,则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

19. (2005江西)设集合 $I=\{x||x|<3,x\in Z\}$,$A=\{1,2\}$,$B=\{-2,-1,2\}$,则 $A\cup(C_IB)=$ ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

20. (2005江苏)设集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{2,3,4\}$,则$(A\cap B)\cup C=$ ( )

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

21. (2005湖南)设 P、Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,$P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

22. (2009山东)集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,则 a 的值为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

二、填空题

1. (2008上海)若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$、$B=\{x|x\geqslant a\}$ 满足 $A\cap B=\{2\}$,则实数 $a=$________

2. (2008上海春)已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $2\leqslant x<3\}$,$B=\{x|-2\leqslant x<4\}$,则 $A\cup B=$________.

3. (2008重庆)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{2,3,4\}$,$B=\{4,5\}$,则 $\complement_UA\cap(\complement_UB)=$________.

4. (2009北京文)设 A 是整数集的一个非空子集,对于 $k\in A$,如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$,那么 k 是 A 的一个"孤立元",给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$,由 S 的3个元素构成的所有集合中,不含"孤立元"的集合共有________个.

5. (2009湖南)某班共30人,其中15人喜爱篮球运动,10人喜爱乒乓球运动,8人对这两项运动都不喜爱,则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

6. (2009湖北)设集合 $A=\{x\mid\log_2x<1\}$,$B=\left\{x|\frac{x-1}{x+2}<1\right\}$,则 $A\cap B=$________.

三、解答题

1. (2005北京)记函数 $f(x)=\log_2(2x-3)$ 的定义域为集合 M,函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N.求:

(1)集合 M,N;

(2)集合 $M\cap N$,$M\cup N$.

2. (2005天津)已知 $m\in\mathbf{R}$,设 P:x_1 和 x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个实根,不等式 $|m^2-5m-3|\geqslant|x_1-x_2|$ 的任意实数 $a\in[-1,1]$ 恒成立;Q:函数 $f(x)=x^3+mx^2+(m+\frac{4}{3})x+6$ 在$(-\infty,+\infty)$上有极值.求使 P 正确且 Q 正确的 m 的取值范围.

专题二 函数概念与表示

考点扫描

考点1 函数的概念

设 A、B 是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数. 记作：$y=f(x)$，$x\in A$ 其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数的值域.

注意：(1)"$y=f(x)$"是函数符号，可以用任意的字母表示，如"$y=g(x)$"；

(2)函数符号"$y=f(x)$"中的 $f(x)$表示与 x 对应的函数值，一个数，而不是 f 乘 x.

考点2 构成函数的三要素:定义域、对应关系和值域

(1)解决一切函数问题必须认真确定该函数的定义域，函数的定义域有三种形式：

①自然型：指函数的解析式有意义的自变量 x 的取值范围(如：分式函数的分母不为零，偶次根式函数的被开方数为非负数，对数函数的真数为正数，等等)；

②限制型：指命题的条件或人为对自变量 x 的限制，这是函数学习中重点，往往也是难点，因为有时这种限制比较隐蔽，容易忽略；

③实际型：解决函数的综合问题与应用问题时，应认真考察自变量 x 的实际意义.

(2)求函数的值域是比较困难的数学问题，中学数学要求能用初等方法求一些简单函数的值域问题.

①配方法(将函数转化为二次函数)；②判别式法(将函数转化为二次方程)；③不等式法(运用不等式的各种性质)；④函数法(运用基本函数性质，或抓住函数的单调性、函数图象等).

考点3 两个函数的相等

函数的定义含有三个要素，即定义域 A、值域 C 和对应法则 f. 当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定之后，函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则为函数的两个基本要素，当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

考点4 区间

(1)区间的分类：开区间、闭区间、半开半闭区间；

(2)无穷区间；

(3)区间的数轴表示.

考点5 映射的概念

一般地，设 A、B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射. 记作"$f:A\to B$".

函数是建立在两个非空数集间的一种对应，若将其中的条件"非空数集"弱化为"任意两个非空集合"，按照某种法则可以建立起更为普通的元素之间的对应关系，这种对应就叫映射.

注意：(1)这两个集合有先后顺序，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是截然不同的. 其中 f 表示具体的对应法则，可以用文字叙述.

(2)"都有唯一"包含两层意思：一是必有一个；二是只有一个，也就是说有且只有一个的意思.

考点6 常用的函数表示法

(1)解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式；

(2)列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系；

(3)图象法：就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

考点7 分段函数：若一个函数的定义域分成了若干个子区间，而每个子区间的解析式不同，这种函数又称分段函数.

考点8 复合函数：若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么 $y=f[g(x)]$称为复合函数，u 称为中间变量，它的取值范围是 $g(x)$的值域.

应试对策

函数是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考中都占据相当大的比例. 从近几年来看，对本部分内容的考查形式稳中求变，向着更灵活的的方向发展，对于函数的概念及表示多以下面的形

式出现:通过具体问题(几何问题、实际应用题)找出变量间的函数关系,再求出函数的定义域、值域,进而研究函数性质,寻求问题的结果.

高考对函数概念与表示考察是以选择题或填空题为主,以解答题形式出现的可能性相对较小,本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性依然很大.建议在第二轮复习时要回归课本,真正理解函数的概念和相关性质,同时要熟练掌握函数与其他知识点、如导数、不等式等之间的联系.

高考题解

例1 (1)(2008湖北)函数 $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$ 的定义域为 ( )

A. $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　B. $(-4,0)\cup(0,1)$
C. $[-4,0)\cup(0,1]$　D. $[-4,0)\cup(0,1)$

(2)(2009江西)函数 $y=\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域为 ( )

A. $[-4,1]$　B. $[-4,0)$
C. $(0,1]$　D. $[-4,0)\cup(0,1]$

(3)(2005江西)函数 $f(x)=\frac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$ 的定义域为 ( )

A. $(1,2)\cup(2,3)$　B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$
C. $(1,3)$　D. $[1,3]$

解析:(1)函数的定义域必须满足条件:

$$\begin{cases}x\neq 0\\ x^2-3x+2\geqslant 0\\ -x^2-3x+4\geqslant 0\\ \sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}>0\end{cases}$$

$\Rightarrow x\in[-4,0)\cup[0,1)$

【答案】 C

(2)解析:由 $\begin{cases}x\neq 0\\ -x^2-3x+4\geqslant 0\end{cases}$ 得 $-4\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$,故选D.

【答案】D

(3)由题意可知,$\begin{cases}\log_2(-x^2+4x-3)\neq 0,\\ -x^2+4x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 2,\\ 1<x<3.\end{cases}$

【答案】 A

【点评】 本组题是求定义域的一道常规题目,函数的定义域(或变量的允许取值范围)看似非常简单,然而在解决问题中若不加以注意,常常会误入歧途,导致失误.此外在用函数方法解决实际问题时,必须要注意到函数定义域的取值范围对实际问题的影响.

例2 (2005广东)在同一平面直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.现将 $y=g(x)$ 图像沿 x 轴向左平移2个单位,再沿 y 轴向上平移1个单位,所得的图像是由两条线段组成的折线(如图2—1所示),则函数 $f(x)$ 的表达式为 ( )

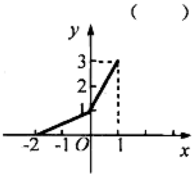


图2—1

A. $f(x)=\begin{cases}2x+2,-1\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{x}{2}+2,0<x\leqslant 2\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}2x-2,-1\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{x}{2}-2,0<x\leqslant 2\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x-2,1\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{x}{2}+1,2<x\leqslant 4\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}2x-6,1\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{x}{2}-3,2<x\leqslant 4\end{cases}$

解析:将图象沿 y 轴向下平移1个单位,再沿 x 轴向右平移2个单位得如图2—2,从而可以得到 $g(x)$ 的图象,故 $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-1,0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-4,2<x\leqslant 3.\end{cases}$

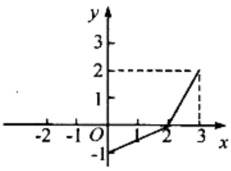


图2—2

∵函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,

$\therefore f(x)=\begin{cases}2x+2,-1\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{x}{2}+2,0<x\leqslant 2.\end{cases}$

【答案】 A

【点评】 也可以用特殊点检验获得答案

例3 (2009北京)已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x,\ x\leqslant 1,\\ -x,\ x>1,\end{cases}$ 若 $f(x)=2$,则 $x=$________

解析:由 $\begin{cases}x\leqslant 1\\ 3^x=2\end{cases}\Rightarrow x=\log_3 2$,$\begin{cases}x>1\\ -x=2\Rightarrow x=-2\end{cases}$ 无解,故应填 $\log_3 2$.

【答案】$\log_3 2$

【点评】本小题主要考查分段函数和简单的已知函数值求 x 的值.属于基础知识、基本运算的考查.

例4 (2007湖北)为了预防流感,某学校对教室用药熏消毒法进行消毒.已知药物释放过程中,室内每立方米空气中的含药量 y(毫克)与时间 t(小时)成正比;药物释放完毕后,y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$($a$ 为常数),如图2—3所示.据图中提供的信息,回答下列问题:

(Ⅰ)从药物释放开始,每立方米空气中的含药量 y(毫克)与时间 t(小时)之间的函数关系式为________;

(Ⅱ)据测定,当空气中每立方米的含药量降低到0.25毫克以下时,学生方可进教室,那么,药物释放开始,至少需

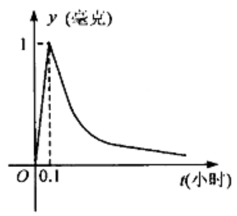


图 2—3

要经过________小时后，学生才能回到教室.

解析：(Ⅰ)由题意和图示，当 $0\leqslant t\leqslant 0.1$ 时，可设 $y=kt$ (k 为待定系数)，由于点 $(0.1,1)$ 在直线上，$\therefore k=10$；同理，当 $t>0.1$ 时，可得 $1=\left(\frac{1}{16}\right)^{0.1-a}\Rightarrow 0.1-a=0\Rightarrow a=\frac{1}{10}$

(Ⅱ)由题意可得 $y\leqslant 0.25=\frac{1}{4}$，即得 $\begin{cases}10t\leqslant\frac{1}{4}\\0\leqslant t\leqslant 0.1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}\leqslant\frac{1}{4}\\t>0.1\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{40}$ 或 $t\geqslant 0.6$，由题意至少需要经过 0.6 小时后，学生才能回到教室.

【答案】 (Ⅰ)$y=\begin{cases}10t\ (0\leqslant t\leqslant 0.1)\\\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}\ (t>0.1)\end{cases}$ (Ⅱ)0.6

例 5 (2005 浙江)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

(Ⅰ)求函数 $g(x)$ 的解析式；

(Ⅱ)解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$；

(Ⅲ)若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

解：(Ⅰ)设函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 $Q(x_q,y_q)$ 关于原点的对称点 (x,y)，

则 $\begin{cases}\frac{x_q+x}{2}=0\\\frac{y_q+y}{2}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_q=-x,\\y_q=-y.\end{cases}$ $\because$ 点 $Q(x_q,y_q)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，$\therefore -y=-x^2+2x$，故 $g(x)=-x^2+2x$

(Ⅱ)由 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$ 可得 $2x^2-|x-1|\leqslant 0$，当 $x\geqslant 1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，此时不等式无解，当 $x<1$ 时，$2x^2+x-1\leqslant 0$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，因此，原不等式的解集为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

(Ⅲ)$h(x)=-(1+\lambda)x^2+2(1-\lambda)x+1$

①当 $\lambda=-1$ 时，$h(x)=4x+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，$\therefore \lambda=-1$

②当 $\lambda\neq-1$ 时，对称轴的方程为 $x=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

(Ⅰ)当 $\lambda<-1$ 时，$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\leqslant -1$，解得 $\lambda<-1$.

(Ⅱ)当 $\lambda>-1$ 时，$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\geqslant -1$，解得 $-1<\lambda\leqslant 0$.

综上，$\lambda\leqslant 0$

跟踪训练

一、选择题

1. (2008 山东)设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1\\x^2+x-2,x>1\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ( )

A. $\frac{15}{16}$　　B. $-\frac{27}{16}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. 18

2. (2008 重庆)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的最大值为 ( )

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

3. (2007 陕西)函数 $f(x)=\lg\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 ( )

A. $[0,1]$　　B. $(-1,1)$
C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. (2007 江西)函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{x-4}$ 的定义域为 ( )

A. $(1,4)$　　B. $[1,4)$
C. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

5. (2006 广东)函数 $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是 ( )

A. $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$

C. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

6. (2006 湖北)设 $f(x)=\lg\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$，则 $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域为 ( )

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$
C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-4,-2)\cup(2,4)$

7. (2005 浙江)设 $f(x)=|x-1|-|x|$，则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

8. (2005 湖南)函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是 ( )

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$
C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

9.(2009 江西)已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,若对于 $x\geqslant0$,都有 $f(x+2)=f(x)$,且当 $x\in[0,2)$ 时,$f(x)=\log_2(x+1)$,则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为 ( )

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

10.(2009 山东)定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(4-x), & x\leqslant0\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0\end{cases}$,则 $f(3)$ 的值为 ( )

A. -1　B. -2　C. 1　D. 2

11.(2009 福建)下列函数中,与函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 有相同定义域的是 ( )

A. $f(x)=\ln x$　B. $f(x)=\frac{1}{x}$

C. $f(x)=|x|$　D. $f(x)=e^x$

二、填空题

1.(2008 上海春)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-1}$ 的定义域是______.

2.(2008 安徽)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为______.

3.(2007 山东)设函数 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$,$f_2(x)=x^{-1}$,$f_3(x)=x^2$,则 $f_1(f_2(f_3(2007)))=$______.

4.(2007 北京)已知函数 $f(x)$,$g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为______;当 $g[f(x)]=2$ 时,$x=$______.

5.(2007 浙江)函数 $y=\frac{x^2}{x^2+1}(x\in\mathrm{R})$ 的值域是______.

6.(2006 辽宁)设 $g(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant0.\\ \ln x, x>0.\end{cases}$ 则 $g(g(\frac{1}{2}))=$______

7.(2006 安徽)函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$,若 $f(1)=-5$,则 $f(f(5))=$______.

8.(2005 广东)函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$ 的定义域是______.

9.(2005 湖南)函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}\lg\sqrt{4-x}$ 的定义域是______.

10.(2005 江苏)函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为______.

三、解答题

1.(2006 重庆)已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$,

(Ⅰ)若 $f(2)=3$,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;

(Ⅱ)设有且仅有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$,求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

2.(2006 江苏)设 a 为实数,记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(Ⅰ)设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,求 t 的取值范围,并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$

(Ⅱ)求 $g(a)$

(Ⅲ)试求满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a

3.(2008 陕西)设函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+1$,$g(x)=ax^2-2x+1$,$a\neq0$.

(Ⅰ)若 $a>0$,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)当函数 $y=f(x)$,$y=g(x)$ 的图象只有一个公共点且 $g(x)$ 存在最小值时,记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$,求 $h(a)$ 的值域;

(Ⅲ)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(a,a+2)$ 内均为增函数,求 a 的取值范围.

4.(2006 北京)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5,其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$,$(2,0)$,如图 2—4 所示,求:

(Ⅰ)x_0 的值;

(Ⅱ)a,b,c 的值.

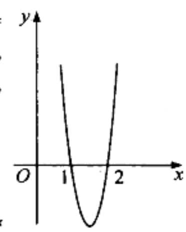


图 2—4

5.(2006 上海)对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$,规定:函数 $h(x)=\begin{cases}f(x)g(x), x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g\\ f(x), x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g\\ g(x), x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g\end{cases}$.

(1)若函数 $f(x)=-2x+3$,$x\geqslant1$,$g(x)=x-2$,$x\in\mathbf{R}$ 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2)求问题(1)中函数 $h(x)$ 的最大值;

(3)若 $g(x)=f(x+\alpha)$,其中 α 是常数,且 $\alpha\in[0,\pi]$,请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$,及一个 α 的值,使得 $h(x)=\cos2x$,并予以证明.

6.(2005 福建)已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象过点 $P(0,2)$,且在点 $M(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$.

(Ⅰ)求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(Ⅱ)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

7.(2009 湖南)已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx$ 的导函数的图象关于直线 $x=2$ 对称.

(Ⅰ)求 b 的值;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在 $x=t$ 处取得极小值,记此极小值为 $g(t)$,求 $g(t)$ 的定义域和值域.

专题三　反函数

考点扫描

考点1　反函数定义

一般的，函数 $y=f(x)(x\in A)$ 中，设它的值域为 C. 我们根据这个函数中 x,y 的关系，用 y 把 x 表示出来，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么 $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)(y\in C)$ 叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

考点2　反函数与函数的关系

(1)反函数与函数是相对的. 如果函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数就是 $y=f(x)$，即 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数；

(2)$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域，值域正好对调.（反函数的定义域是由原函数的值域确定，而不是由它的表达式确定）；

(3)在同一坐标系中 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称；

(4)原函数与反函数在对称的区间上单调性相同；

(5)偶函数没有反函数，奇函数可能有反函数，如果有反函数也是奇函数.

考点3　求反函数的步骤

(1)反解，即由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$；(2)对调，即把 $x=\varphi(y)$ 中的 x 写成 y，y 写成 x；(3)标出反函数的定义域（即原函数的值域）.

应试对策

反函数作为与函数概念紧紧相关的知识点，不仅涉及各种基本函数及其运算，还涉及数形结合等数学思想，历年的高考中都占有一席之地. 从近几年来看，对本部分内容的考查大多以选择题或填空题的形式出现，以解答题形式出现的可能性相对较小，本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性依然很大. 建议复习时要注意数学思想和方法，特别是数形结合的运用.

高考题解

例1　(1)(2008 陕西)已知函数 $f(x)=2^{x+3}$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $mn=16(m,n\in\mathbf{R}^+)$，则 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$ 的值为　(　　)

A. -2　　B. 1　　C. 4　　D. 10

(2)(2009 湖北)函数 $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}(x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{1}{2})$ 的反函数是　(　　)

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}(x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{1}{2})$

B. $y=\dfrac{1-2x}{1+2x}(x\in\mathbf{R},x\neq-\dfrac{1}{2})$

C. $y=\dfrac{1+x}{2(1-x)}(x\in\mathbf{R},x\neq1)$

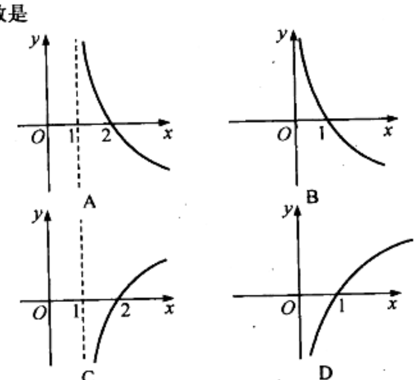
D. $y=\dfrac{1-x}{2(1+x)}(x\in\mathbf{R},x\neq-1)$

(3)(2007 天津)函数 $y=\log_2(x+4)(x>0)$ 的反函数是　(　　)

A. $y=2^x+4(x>2)$　　B. $y=2^x+4(x>0)$

C. $y=2^x-4(x>2)$　　D. $y=2^x-4(x>0)$

(4)(2006 山东)函数 $y=1+a^x(0<a<1)$ 的反函数的图象大致是　(　　)



(5)(2006 安徽)函数 $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数是　(　　)

A. $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$　　B. $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

C. $y=\begin{cases}\frac{x}{2},x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x},x<0\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}2x,x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x},x<0\end{cases}$

解析:(1) $f(x)=2^{x+3}\Rightarrow f^{(-1)}(x)=\log_2 x-3$ 于是 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)=\log_2 m-3+\log_2 n-3=\log_2 mn-6=\log_2 16-6=4-6=-2$.

【答案】 A.

(2)解析:可反解得 $x=\frac{1-y}{2(1+y)}$,故 $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2(1+x)}$ 且可得原函数中 $y\in\mathbf{R}$、$y\neq -1$,所以 $f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2(1+x)}$ 且 $x\in\mathbf{R}$、$x\neq -1$.

【答案】 D

(3)由 $y=\log_2(x+4)$ 得 $x+4=2^y$,即 $x=2^y-4$,故反函数是 $y=2^x-4$,再根据原函数的值域为反函数的定义域则有:$x>0$,则 $x+4>4$,∴$y=\log_2(x+4)>2$,故反函数的定义域为 $x>2$,则有 $y=2^x-4(x>2)$.

【答案】 C.

(4)∵$0<a<1$,∴原函数 $y=1+a^x$ 是减函数,∴它的反函数也是减函数,可知选项 C、D 错误,∵原函数的值域是 $y>1$,∴反函数的定义域是 $x>1$.

【答案】 A.

(5)当 $x\geqslant 0$ 时,$y=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}y$,$y\geqslant 0$,对应的反函数为 $y=\frac{1}{2}x$,$x\geqslant 0$;当 $x<0$ 时,$y=-x^2(x<0)\Rightarrow x=-\sqrt{-y}$,$y<0$,对应的反函数为 $y=-\sqrt{-x}$,$(x<0)$.

【答案】 A.

例 2 (1)(2009 上海) 函数 $f(x)=x^3+1$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.

(2)(2007 江西)已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,若函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点(3,1),则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点____________.

解析:(1)由 $y=x^3+1$,得 $x=\sqrt[3]{y-1}$,将 y 改成 x,x 改成 y 可得答案.

【答案】 $\sqrt[3]{x-1}$

(2)若函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点(3,1),则有 $1=f(3+1)\Rightarrow f(4)=1\Rightarrow f^{-1}(1)=4$. 所以函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点(1,4).

【答案】 (1,4)

例 3 (2008 上海春)已知函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)$.

(1)求证:函数 $f(x)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调递增;

(2)记 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)$ 的反函数. 若关于 x 的方程 $f^{-1}(x)=m+f(x)$ 在[1,2]上有解,求 m 的取值范围.

证明:(1)任取 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=\log_2(2^{x_1}+1)-\log_2(2^{x_2}+1)=\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}$,

∵ $x_1<x_2$, ∴ $0<2^{x_1}+1<2^{x_2}+1$,

∴ $0<\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<1$, $\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<0$,

∴ $f(x_1)<f(x_2)$,即函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调递增.

(2)解法一:∵ $f^{-1}(x)=\log_2(2^x-1)\ (x>0)$,

∴$m=f^{-1}(x)-f(x)$

$=\log_2(2^x-1)-\log_2(2^x+1)$

$=\log_2\frac{2^x-1}{2^x+1}=\log_2\left(1-\frac{2}{2^x+1}\right)$,

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{2}{3}$,

∴$\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{3}{5}$,

∴ m 的取值范围是$\left[\log_2\left(\frac{1}{3}\right),\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right]$.

解法二:∵ $f^{-1}(x)=\log_2(2^x-1)\ (x>0)$

∴方程可化为 $\log_2(2^x-1)=m+\log_2(2^x+1)$,

得 $x=\log_2\left(\frac{2^m+1}{1-2^m}\right)$,

∵ $1\leqslant x\leqslant 2$,

∴$1\leqslant\log_2\left(\frac{2^m+1}{1-2^m}\right)\leqslant 2$,

解得 $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant m\leqslant\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$.

∴ m 的取值范围是$\left[\log_2\left(\frac{1}{3}\right),\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right]$.

跟踪训练

一、选择题

1.(2009 全国Ⅰ)已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)=1+2\lg x(x>0)$,则 $f(1)+g(1)=$ (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2.(2009 四川)函数 $y=2^{x+1}(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 (　　)

A. $y=1+\log_2 x(x>0)$

B. $y=1+\log_2(x-1)(x>0)$

C. $y=-1+\log_2 x(x>0)$

D. $y=\log_2(x+1)(x>-1)$

3.(2008 湖南)函数 $f(x)=x^2(x\leqslant 0)$ 的反函数是 (　　)

A. $f^{-1}(x)=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$

B. $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}(x\geqslant 0)$

C. $f^{-1}=-\sqrt{-x}(x\leqslant 0)$

D. $f^{-1}(x)=-x^2(x\leqslant 0)$

4. (2008 天津)函数 $y=1+\sqrt{x}(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的反函数是 (　　)

A. $y=(x-1)^2(1\leqslant x\leqslant 3)$
B. $y=(x-1)^2(0\leqslant x\leqslant 4)$
C. $y=x^2-1(1\leqslant x\leqslant 3)$
D. $y=x^2-1(0\leqslant x\leqslant 4)$

5. (2008 重庆)函数 $y=10^{x^2-1}(0<x\leqslant 1)$ 的反函数是 (　　)

A. $y=-\sqrt{1+\lg x}(x>\frac{1}{10})$

B. $y=\sqrt{1+\lg x}(x>\frac{1}{10})$

C. $y=-\sqrt{1+\lg x}(\frac{1}{10}<x\leqslant 1)$

D. $y=\sqrt{1+\lg x}(\frac{1}{10}<x\leqslant 1)$

6. (2009 广东)若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数，且 $f(2)=1$，则 $f(x)=$ (　　)

A. $\log_2 x$　　B. $\frac{1}{2^x}$　　C. $\log_{\frac{1}{2}} x$　　D. 2^{x-2}

7. (2007 北京)函数 $f(x)=3^x(0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 (　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(1,9]$　　C. $(0,1)$　　D. $[9,+\infty)$

8. (2007 湖北)函数 $y=\frac{2^x+1}{2^x-1}(x<0)$ 的反函数是 (　　)

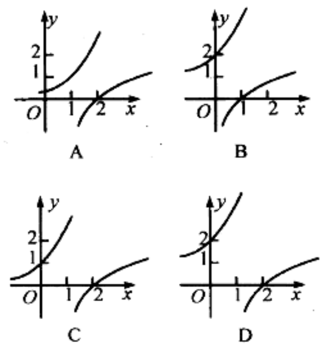
A. $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}(x<-1)$

B. $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}(x>1)$

C. $y=\log_2\frac{x-1}{x+1}(x<-1)$

D. $y=\log_2\frac{x-1}{x+1}(x>1)$

9. (2007 陕西)若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，则函数 $f(x-1)$ 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是 (　　)



10. (2005 江苏)函数 $y=2^{1-x}+3(x\in\mathbf{R})$ 的反函数的解析表达式为 (　　)

A. $y=\log_2\frac{2}{x-3}$　　B. $y=\log_2\frac{x-3}{2}$

C. $y=\log_2\frac{3-x}{2}$　　D. $y=\log_2\frac{2}{3-x}$

二、填空题

1. (2008 上海)若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=\log_2 x$，则 $f(x)=$________.

2. (2008 四川延考)函数 $y=e^{x+1}-1(x\in\mathbf{R})$ 的反函数为________.

3. (2007 全国Ⅰ)函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\log_3 x(x>0)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$________.

4. (2007 上海)函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.

5. (2006 江西)设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $[f^{-1}(n)+6]\cdot[f^{-1}(m)+6]=27$，则 $f(m+n)=$________

6. (2005 浙江)函数 $y=\frac{x}{x+2}(x\in\mathbf{R},x\neq -2)$ 的反函数是________.

7. (2005 湖南)设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$________

专题四　函数的基本性质

考点扫描

考点1　奇偶性

(1)定义:如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x 都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果函数 $f(x)$ 不具有上述性质,则 $f(x)$ 不具有奇偶性.如果函数同时具有上述两条性质,则 $f(x)$ 既是奇函数,又是偶函数.

注意:① 函数是奇函数或是偶函数称为函数的奇偶性,函数的奇偶性是函数的整体性质;②由函数的奇偶性定义可知,函数具有奇偶性的一个必要条件是定义域关于原点对称.

(2)简单性质:

①图象的对称性质:一个函数是奇函数的充要条件是它的图象关于原点对称;一个函数是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;

②设 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域分别是 D_1,D_2,那么在它们的公共定义域上:

奇函数+奇函数⇒奇函数,偶函数+偶函数⇒偶函数,

奇函数×奇函数⇒偶函数,偶函数×偶函数⇒偶函数,

奇函数×偶函数⇒奇函数

考点2　单调性

(1)定义:一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数(减函数);

(2)如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或是减函数,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

(3)设复合函数 $y=f[g(x)]$,其中 $u=g(x)$,A 是 $y=f[g(x)]$ 定义域的某个区间,B 是映射 $g:x\to u=g(x)$ 的象集:

①若 $u=g(x)$ 在 A 上是增(或减)函数,$y=f(u)$ 在 B 上也是增(或减)函数,则函数 $y=f[g(x)]$ 在 A 上是增函数;

②若 $u=g(x)$ 在 A 上是增(或减)函数,而 $y=f(u)$ 在 B 上是减(或增)函数,则函数 $y=f[g(x)]$ 在 A 上是减函数.

(4)判断函数单调性的方法

①利用定义证明函数 $f(x)$ 的单调性.

②利用导数判断函数的单调性.

(5)函数单调性的简单性质

①奇函数在其对称区间上的单调性相同;

②偶函数在其对称区间上的单调性相反;

③在公共定义域内:增函数+增函数⇒增函数;减函数+减函数⇒减函数;

增函数-减函数⇒增函数;减函数-增函数⇒减函数.

考点3　最值

(1)定义:

最大值:一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:①对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$;②存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$.那么,称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

最小值:一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:①对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\geqslant M$;②存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$.那么,称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

注意:

①函数最大(小)首先应该是某一个函数值,即存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$;

②函数最大(小)应该是所有函数值中最大(小)的,即对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$($f(x)\geqslant M$).

(2)判断函数的最大(小)值的方法:

① 利用二次函数的性质(配方法)求函数的最大(小)值;

② 利用图象求函数的最大(小)值;

③ 利用函数的单调性判断函数的最大(小)值;

④利用导数判断函数的最大(小)值;

考点4　周期性

(1)定义:如果存在一个非零常数 T,使得对于函数定义域内的任意 x,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数;

(2)性质: