

2007年



黑博士考研 命题研究精品系列

考研数学17年真题 详解与命题研究

- 组 编 黑博士考研信息工作室
- 主 审 北京大学数学教授 柯懋振
- 主 编 铁 军 李 强 (著名数学命题研究专家)

1990-2006

(
数
学
四
)

- ➔ **教育部考试中心**: 总结命题特点, 揭示命题规律和命题重复性
引导考生针对性备考和高效复习, 把握复习的重点和难点
- ➔ **命题组成员**: 直击命题考点, 把握命题热点, 指点命题迷津
透视真题, 点拨思路, 一题多解, 分析透彻, 评注全面
- ➔ 教育部考试中心60多位命题专家15年的心血和集体才智

人民日报出版社
· 北 京 ·

考研命题研究报告精品系列

2007 年硕士研究生入学考试

历年真题详解与命题研究

考 研 数 学 (四)

(中高级版·精华预测)

主 审	北京大学数学教授	柯懋振
主 编	铁 军 李 强	(著名数学命题研究专家)
编 著	清华大学著名数学教授	黄建东
	北京大学著名数学教授	周华强
	清华大学著名数学教授	林祥源
	北京大学著名数学教授	陈跃祥
	清华大学著名数学教授	蔡昌林
	北京理工大学数学博士	魏柏芳
	上海交通大学数学博士	王东明

人 民 日 报 出 版 社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学历年真题详解与命题研究 / 铁军 李强 编著

—北京: 人民日报出版社, 2004.6

(考研历年真题详解与命题研究)

ISBN 7 - 80153 - 866 - 8

I. 考… II. ① 铁… ② 李… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 030524 号

考研数学 (四) 历年真题详解与命题研究

编 著: 铁军 李强

责任编辑: 安 申

封面设计: 何志娟

出版发行: 人民日报出版社 (北京市金台西路 2 号 邮编: 100733)

经 销: 新华书店

印 刷: 新世纪印刷厂

开 本: 787×1092 1/16

字 数: 2000 千字

印 张: 75

印 数: 10000 册

印 次: 2006 年 4 月第 5 版 2006 年 4 月第 5 次印刷

书 号: ISBN 7-80153-866-8/G · 480

总 定 价 (全七册): 160.00 元

若发现黑博士系列图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题
请拨打下面电话联系调换: 13636715467

前言

实践将再次证明：现在你翻开的这本书，对顺利通过每年竞争激烈的硕士研究生数学入学考试来说，是至关重要的。这曾是一本引起广大考生和辅导教师强烈关注的精品书。本书自 2000 年出版以来，已是第五版了。它囊括了教育部考试中心的 60 多位考研数学命题专家 16 年的全部命题心血和集体才智，同时浓缩了笔者对考研数学多年的研究和辅导体会，也自然蕴涵着考生高分致胜的全部技巧和法宝，而你要做的就是：去充分地利用、研究、体会并总结此书所传递的规律和信息。

从 2003 年起，数学考研试卷总分由 100 分增加到了 150 分，分数是考研公共课中最高的。这说明数学在考研科目中的地位是最重要的。从往年的经验看：对于大多数考生而言，数学乃考研核心课程，数学成绩是否合格，将直接关系到考生的考研成败。如果数学不及格，即使总分上线，也不会被录取。显然，激烈的竞争对考生在数学方面提出了相对更高的要求。对于考生来说，熟悉考试的形式和题型无疑会增加获胜的机会。

“研究过去，找出规律；认识现在，掌握重点；预测未来，轻取高分”是本课题的核心内容。多年经验证明：“实际上往年的试题就是复习的重点”。以至于有人断言：“数学复习归纳成一句话，就是反复琢磨历年真题！”本套丛书收集了从 1990 年至 2006 年的理工类数学（一）、（二）和经济类数学（三）、（四）考研真题，分四类成册并对每道题目进行了精辟透彻的分析和讲解，给出了命题评注、技巧分析，为考生深入了解考研数学命题的形式、内容、要求、题型和难度提供了极其有益的帮助和思路，为从中找到考研数学高分复习的方法和思路，提高复习效率探索出了一条科学而规律的致胜途径。

本书的六大独有特色和总结出之命题规律概览

1. 根据最直接、最宝贵的第一手资料，总结命题特点和考试规律。本书汇集了 16 年的历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些试题是考研同学了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，考研题是命题组专家的智慧结晶，它不仅具体地反映了《考试大纲》所规定的对考生数学知识、能力和水平的测试要求，而且全面展现了考研试卷的结构，各部分试题分布，考研试题的特点，每部分内容的考点、重点和难点；同时还蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题的趋势，本书以历届考研试题为基本素材，对每一道试题进行了独到、深刻、详细的解答和分析，对考生关心的问题进行了深入的分析、研究和总结，力图揭示命题的规律和趋势。

2. 引导考生针对性备考和高效复习，握住自己复习的进程和重点。数学要考三门课，要复习的内容极为丰富，难度的确很大。考研数学复习不能落入俗套，要有创新思路，既要寻找适合自己特点的的路子，又要清醒地把握住自己复习的进程和重点，做到临考不乱，胸有成竹。数学应该如何复习？数学的重点是什么？大多数学生心中无数。数学考研自 1987 年统一命题以来，已经经历了 19 年，积累了一千多道题，这些试题完全覆盖了考试大纲的方方面面。我们经过长期跟踪研究发现，近年来考研试题中有相当

一部分与往届试题完全类似,解题思路几乎完全一样。考研试题凝聚了命题专家的智慧,充分体现了考试的要求。所以,实际上往年的试题就是复习的重点。以至于有人指出:数学复习归纳成一句话,就是反复琢磨历年真题!下表是各章命题重要性和命题频度统计表,可以提醒考生增强复习的针对性,时刻牢记把握重点!

第一部分 高等数学(共5章)		
第一章	函数 极限 连续	共考过约 31 题,约 125 分
★★★第二章	一元函数微分学(一级重点章)	共考过约 55 题,约 277 分
★★第三章	一元函数积分学(二级重点章)	共考过约 41 题,约 198 分
★★★第四章	多元函数微积分学(一级重点章)	共考过约 48 题,约 296 分
第五章	常微分方程与差分方程	共考过约 3 题,约 21 分

第二部分 线性代数(共5章)		
第一章	行列式(非重点章)	共考过约 14 题,约 47 分
★★★第二章	矩阵(一级重点章)	共考过约 27 题,约 103 分
★第三章	向量(二级重点章)	共考过约 16 题,约 82 分
★★★第四章	线性方程组(一级重点章)	共考过约 15 题,约 102 分
★★★第五章	特征值与特征向量(一级重点章)	共考过约 19 题,约 140 分

第三部分 概率论与数理统计(共5章)		
第一章	随机事件和概率	共考过约 19 题,约 66 分
★★第二章	随机变量及其概率分布(二级重点章)	共考过约 23 题,约 139 分
★★★第三章	二维随机变量及其概率分布(一级重点章)	共考过约 21 题,约 162 分
★★第四章	随机变量的数字特征(二级重点章)	共考过约 12 题,约 53 分
第五章	大数定律的中心极限定理(非重点章)	共考过 4 题,18 分

3. 一题多解,全面评注,技巧分析。本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础上,每题都给出了注释,而且对所有试题均给出了详细解答,不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析,而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结,并尽量做到一题多解,使考研同学能够举一反三,触类旁通;同时通过具体题目,对考生常犯的错误进行了分析,使考生引以为戒;另外针对考生普遍感到很多考研试题拿到后往往难以下手的问题,对于这样的试题在解答之前都有一个分析,通过分析解题思路和解题方法,以提高读者的破题能力。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更

省时省力。

4. 惊人地发现其命题内在的规律性及重复性。提示考研数学命题内在的规律性是本书的一大特点,本书所选题目主要采用历年试题,其出发点是“黑箱原理”:考研题库好比一个黑箱,它的内容我们无法尽知,但它使用得越多,它的内容暴露得越多,也越能反映出它的真实内容。实际上,分析1990~2006年的历年考研试题,透过各种繁多的甚至是让人摸不着头脑的变换的题目表面,可以惊人地发现其命题内在的规律性及重复性。在本书每一个大类的“考点破译与解题定式思路”部分,就提示了考研数学命题内在的规律。我们另一项研究发现对考生也是极有参考价值的,也是一个公开的“秘密”:考研数学虽然分为理工类(数学一、二)和经济类(数学三、四),但在近几年的试卷中不难发现,数学一、二、三、四试卷之间有不少借鉴和参考。特别是有这种现象,例如,前几年数学一考过的题,今年数学三、四可能拿来考了,或有完全类似的题;也可能前几年考的是客观题,今年改为非客观题了。所以,对于往届试题中的客观题,除了掌握解客观题的技巧外,还应该掌握常规的解法,也许下一次就用上了;还有,工学类考生也要做经济类的试题,经济类考生也要做工学类的试题,考试就会更有把握。

5. 大胆预测重点题目和重点题型。经过深入分析历年试题、考研大纲、当年的考试政策等多方因素,我们发现一些有价值的结论:前二三年内的考点基本不重复出,而是出同一大类的其余考点;而四五年后,重复的概率则相当大,甚至有的原样稍作变化即重复出现。故本书预测的原则就是综观1990~2006年历年考题,以近三年定考试趋向,以近4~7年甚至更远(同时结合近三年)定重复概率,同时将各年各类题型以不同的加权值代入,计算出各类题型最可能的出现概率,再根据今明两年的考试政策等多方因素加以调整,对新大纲的增补要求,按增补重点单独考虑,得出2007年的预测(可参见黑博士《数学成功指导》、《数学典型1000题》)。可以说,在全国各类考研辅导中,本书首次将科学的预测方法引入到数学考研辅导中;对各考点,从编者总结出一系列相关题型的应试解题定式思路。因此,完全可以负责任地说:只要掌握80%的定式思路,你的数学成绩可以轻松突破105分。

6. 一条重要经验,一定记住:模棱两可与纯熟掌握在实际考试中将会是天壤之别,这是总结历届考研成功者与失败者关键差异之所在。在此,编者以十二分的苦心忠告欲考研的同学们,对本书提到的基本考点、基本题型、常用公式(如微分方程通解公式等),一定要达到纯熟掌握的程度;要熟练做题,重点做典型1000题和历年真题,不能一看全会,一做全错;公式要提前记住,决不可在考前才突击记忆。

需要说明的是,从考研数学复习的技术方面来说,考研数学复习是有规律可循的。组织编写“考研历年真题详解与命题研究”系列丛书(共七册),最首要的目的就是“研究过去,找出规律;认识现在,掌握重点;预测未来,轻取高分”,要把我们对考研命题规律的把握,对答题的方法和技巧的总结,以及多年亲自辅导学生所得的第一手资料和全部经验带给考生。更重要的是,研究生数学入学考试历年真题无疑凝结着广大参加命题的数学教师及命题专家的智慧 and 心血,是教育部《数学考试大纲》的精神和要求的具体体现,每一套试题既反映了《考研数学大纲》对考生数学的基础知识,综合运用能力

以及实际水平的要求,又蕴涵了命题的基本原则和规律。因此,历年真题就是最好的模拟试题,是广大考生了解考研试题特点、把握命题思路和趋势的第一手资料。

需要特别强调的是,最近几年的考试一再表明,每年新编制的考题都是历年来真题出题思路的沿袭,事实上,近几年的考题与往年的试题有相当的部分相类似的。

编者建议考生注意:

1. 刚开始复习时,不要急着去做套题,而应该首先明确《黑博士数学考点·重点·难点复习指导及预测》或新《数学大纲》考试的有关要求,接着结合较系统、权威的辅导教材《黑博士考研数学成功指导》及本书按章节进行系统、全面复习,掌握考试大纲中的基本概念、公式和方法,然后做较经典、权威的数学典型题《黑博士数学典型 1000 题》,最后强化做模拟套题《黑博士数学最后 30 天冲刺卷》及本书,这样才会有最佳的复习效果。

2. 在做题时,考生应严格要求自己在考试规定的时间内做完每一套题,在做题过程中,千万不要去看后面的答案及解析,等做完题后再对照答案对自己进行查漏补缺。通过对照来分析试题规律和自己的不足,以确定和调整自己后阶段的复习方向和重点。

3. 考生不要就题做题,而要通过历年真题的比较以及对本书详尽解析中解题方法指导的把握,发现一些规律性的东西,全面领会考试的精髓和命题趋势,使这些稀缺珍贵的资料和素材“为我所用、为我所有”,从而从本质上提高自身数学水平,并轻松应对考试获取高分。

值得一提的是需要说明的是,编写本书的作者均具有辅导考研数学的丰富经验,能够抓住数学考试的共性,同时还知道考研数学的独特性。我们相信,经过编者的精心打造,并辅以考生认真的态度,一定会让使用本书的考研人在数学上得到突破,轻松攻克考研堡垒,取得实现人生目标的宏伟成就!衷心希望本书能切实帮助考生在考试中充分发挥自己的真正水平,复习顺利,考研成功!

北京考研命题研究工作室
考试中心核心命题分析组

目 录

数学四历年真题详解·考点点拨与命题研究

(命题专家解析常考知识点与重点)

一、1990 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(1)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(1)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(5)
二、1991 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(15)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(15)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(19)
三、1992 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(30)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(30)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(33)
四、1993 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(42)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(42)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(45)
五、1994 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(54)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(54)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(57)
六、1995 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(67)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(67)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(70)
七、1996 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(81)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(81)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(84)
八、1997 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(94)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(94)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(97)
九、1998 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(106)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(106)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(109)

十、1999 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(120)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(120)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(123)
十一、2000 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(136)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(136)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(139)
十二、2001 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(152)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(152)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(155)
十三、2002 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(169)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(169)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(172)
十四、2003 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(184)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(184)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(187)
十五、2004 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(199)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(199)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(203)
十六、2005 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(216)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(216)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(220)
十七、2006 年研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究	(235)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(235)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题详解与分析评注	(239)

黑博士考研命题研究报告精品六大系列

- | | |
|-----------------------------------|---------|
| 1. 《英语历年真题详解与命题研究》(北航李养龙、孙瑜) | 23.00 元 |
| 2. 《政治历年真题详解与命题研究》(人大陈志良、杨凤城) | 19.80 元 |
| 3. 《数学历年真题详解与命题研究》(数学一)(北大柯懋振、铁军) | 23.00 元 |
| 4. 《数学历年真题详解与命题研究》(数学二)(北大柯懋振、铁军) | 19.80 元 |
| 5. 《数学历年真题详解与命题研究》(数学三)(北大柯懋振、李强) | 19.80 元 |
| 6. 《数学历年真题详解与命题研究》(数学四)(北大柯懋振、李强) | 19.80 元 |

数学历年真题详解·考点点拨与命题研究

(命题专家解析常考知识点与重点)

☞ 研究生入学考试数学四试题详解·考点点拨与命题研究

1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学四 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中的横线上.)

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3}\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = b$, 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续, 则常数 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x + 2$ 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_2 + x_3 = a_2, \\ x_3 + x_4 = -a_3, \\ x_4 + x_1 = a_4. \end{cases} \quad \text{有解, 则常数 } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ 应满足条件 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

(5) 已知随机变量 $X \sim N(-3, 1)$, $Y \sim N(2, 1)$, 且 X, Y 相互独立, 设随机变量 $Z = X - 2Y + 7$, 则 $Z \sim \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每一小题都给出代号为 A, B, C, D 的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内,每一小题选对得 3 分,不选或选错一律得 0 分.)

(1) 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是 【 】

(A) 偶函数. (B) 无界函数.

(C) 周期函数. (D) 单调函数.

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$, 且有 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为非零常数, 【 】

则

(A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.

(B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = a$.

(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = b$.

(D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = ab$.

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是

【 】

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不为零向量.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性无关.

(4) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则

【 】

(A) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

(B) $|A^*| = |A|$.

(C) $|A^*| = |A|^n$.

(D) $|A^*| = |A^{-1}|$.

(5) 已知随机变量 X 服从二项分布, 且 $E(X) = 2.4$, $D(X) = 1.44$, 则二项分布的参数 n, p 的值为

【 】

(A) $n = 4, p = 0.6$.

(B) $n = 6, p = 0.4$.

(C) $n = 8, p = 0.3$.

(D) $n = 24, p = 0.1$.

三、计算题(本题满分 20 分, 每小题 5 分.)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt$.

(2) 求不定积分 $\int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$.

(3) 设 $x^2 + z^2 = y\varphi(\frac{z}{y})$, 其中 φ 为可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(4) 计算二重积分 $\iint_D x e^{-x^2} dx dy$, 其中 D 是曲线 $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

四、(本题满分 9 分.)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告, 根据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电台广告费用 x_1 (万元) 及报纸广告费用 x_2 (万元) 之间的关系有如下经验公式:

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下, 求最优广告策略;

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略.

五、(本题满分6分.)

证明不等式 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} (-\infty < x < +\infty)$.

六、(本题满分4分.)

设 A 为 10×10 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算行列式 $|A - \lambda E|$, 其中 E 为 10 阶单位矩阵, λ 为常数.

七、(本题满分5分.)

设方阵 A 满足条件 $A^T A = E$, 其中 A^T 是 A 的转置矩阵, E 为单位阵. 试证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

八、(本题满分8分.)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时, 方程组有解?

(2) 方程组有解时, 求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3) 方程组有解时, 求出方程组的全部解.

九、(本题满分5分.)

从 $0, 1, 2, \dots, 9$ 等十个数字中任意选出三个不同的数字, 试求下列事件的概率:

$$A_1 = \{\text{三个数字中不含 } 0 \text{ 和 } 5\}, A_2 = \{\text{三个数字中含 } 0 \text{ 但不含 } 5\}.$$

十、(本题满分6分.)

甲、乙两人独立地各进行两次射击, 假设甲的命中率为 0.2 , 乙的命中率为 0.5 , 以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数, 试求 X 和 Y 的联合概率分布.

十一、(本题满分7分.)

某地抽样调查结果表明, 考生的外语成绩(百分制)近似正态分布, 平均成绩为 72 分, 96 分以上的占考生总数的 2.3% , 试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表]

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学四 试题详解与分析评注

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 2.

【考点点拨】本题考查的知识点是:求极限.

【思路分析】根式有理化化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限求解即可.

$$\text{【详解】 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}\sqrt{n}+\sqrt{n}-\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2.$$

【评注】本题属基础题型.

(2) $b+a$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:函数在一点连续的概念.

【思路分析】利用连续与导数的定义即可.

【详解】由于 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则

$$A = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + a \cos x}{1} = b + a.$$

【评注】由已知抽象函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$,一般利用导数定义:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(3) $\frac{9}{2}$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:平面图形面积计算.

【思路分析】利用定积分求面积即可.

【详解】所围平面图形的面积为

$$S = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

【评注】本题属基础题型.

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$.

【考点点拨】本题考查的知识点是:非齐次方程组有解的条件以及如何求方程组系数矩阵和增广矩阵的秩.

【思路分析】方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件为 $r(\bar{A}) = r(A)$.

【详解】方程组有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$, 对 $\bar{A}$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1 + a_4 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ & & 1 & 1 & -a_3 \\ & & & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

由解的判定定理知, 必

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

【评注】注意, 在求解或讨论非齐次(齐次)方程组时, 只能对方程组的增广矩阵(系数矩阵)施行初等行变换而不能作初等列变换.

(5) $N(0, 5)$.

【考点点拨】本题考查的知识点是: 正态分布的性质和期望方差的性质.

【思路分析】直接利用性质即可.

【详解】由已知, $E(X) = -3, D(X) = 1, E(Y) = 2, D(Y) = 1$, 且 X 与 Y 独立. 由正态分布的性质知

$$Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

其中 $\mu = E(Z) = E(X - 2Y + 7) = E(X) - 2E(Y) + 7 = -3 - 2 \times 2 + 7 = 0$,

$$\sigma^2 = D(Z) = D(X - 2Y + 7) = D(X) + 4D(Y) = 1 + 4 \times 1 = 5.$$

所以 $Z \sim N(0, 5)$.

【评注】注意 $D(C) = 0, D(CY) = C^2 D(Y)$ (C 为常数), 切勿写成

$$D(X - 2Y + 7) = D(X) - 2D(Y) + 7.$$

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 选(B).

【考点点拨】本题考查的知识点是: 函数的四个基本性态, 即单调性、奇偶性、周期性及有界性.

【详解】由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x e^{\sin x} = \infty$, 则 $f(x)$ 无界. 或考察 $f(x)$ 在 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的

函数值, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = +\infty$, 可见 $f(x)$ 是无界函数. 故应选(B).

【评注】本题也可以证明其他结论均不正确.

由 $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \neq f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 知(A)不正确; 由 $f(\frac{\pi}{4}) > 0, f(-\frac{\pi}{4}) > 0$,

而 $f(0) = 0$, 知(D)不正确. 证明(C)不正确可用反证法.

设 $g(x) = \tan x e^{\sin x}$, 于是 $g(x)$ 的定义域为

$$D = \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

且 $g(x)$ 的全部零点为 $x_n = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

若 $f(x) = xg(x)$ 以 $T(T > 0)$ 为周期, 则有

$$(x+T)g(x+T) = xg(x), \forall x \in D.$$

令 $x = 0$, 有 $Tg(T) = 0$, 即 $g(T) = 0$. 从而 $T = k\pi$, 其中 k 为某一正整数, 于是 $2k\pi$ 也是 $xg(x)$ 的周期. 代入即得, 对 $\forall x \in D$ 有

$$(x+2k\pi)g(x+2k\pi) = (x+2k\pi)g(x) = xg(x).$$

这表明 $2k\pi g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立, 于是 $g(x) \equiv 0$ 在 $x \in D$ 上成立. 导致了矛盾. 故 $f(x) = xg(x)$ 不可能是周期函数.

(2) 选(D).

【考点点拨】本题考查的知识点是: 导数的定义.

【思路分析】利用导数定义进行讨论.

【详解】由导数的定义知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = af'(0),$$

即 $f'(1) = af'(0) = ab$.

所以应选(D).

【评注】加强条件法: 算式 $f(1+x) = af(x)$ 两边直接求导, 得 $f'(1+x) = af'(x)$, 再令 $x = 0$ 得: $f'(1) = af'(0) = ab$.

(3) 选(C).

【考点点拨】本题考查的知识点是: 向量组线性相关与线性无关的条件.

【思路分析】利用向量组线性相关与线性无关的定义即可判断.

【详解】因为, 向量组(I) 线性相关 $\Leftrightarrow$ (I) 中必有一个向量可由该组中其余向量线性表示. 可知: 向量组(I) 线性无关 $\Leftrightarrow$ (I) 中任意一个向量都不能由该组中其余向量线性表示. 于是得(C) 正确. 注意其它选项都是 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关的必要条件而非充分条件.

【评注】注意区分“必要条件”、“充分条件”及“充要条件”.

(4) 选(A).

【考点点拨】本题考查的知识点是: 可逆矩阵与伴随矩阵.

【思路分析】涉及伴随矩阵 A^* 的问题, 首先联想到公式 $AA^* = A^*A = |A|E$.

【详解】对伴随矩阵基本关系式

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

两端取行列式, 有

$$|A| \cdot |A^*| = ||A|E| = |A|^n |E| = |A|^n.$$

由 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

因此,应选(A).

【评注】这是一个常见公式,在考研中已多次出现.

(5) 选(B).

【考点点拨】本题考查的知识点是:二项分布的数学期望和方差.

【思路分析】利用二项分布的参数与数字特征的关系.

【详解】由题设 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np = 2.4, D(X) = np(1-p) = 1.44$, 解得 $p = 0.4, n = 6$. 故(B) 正确.

【评注】要熟练掌握常见随机变量的分布及其应用, 并理解各分布中参数的概率意义以及它们与分布数字特征的关系.

三、(本题满分20分, 每小题5分.)

(1)

【考点点拨】本题考查的知识点是:变上限积分求导和洛必达法则.

【思路分析】本题的难点在于被积函数 $(1+t^2)e^{t^2-x^2}$ 中出现了 x , 但应注意 $e^{t^2-x^2} = e^{t^2} \cdot e^{-x^2}$, 其中 e^{-x^2} 可从积分号中提出.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【评注】对于变限积分, 如果在被积函数中含有变量 x , 应先利用换元法或将变量 x 的函数从积分号中提出来, 化为被积函数中不含变量 x 的变限积分, 再进行求导.

(2)

【考点点拨】本题考查的知识点是:求不定积分.

【思路分析】本题被积函数是三角函数与幂函数两类不同类型函数的乘积, 所以用分部积分法.

$$\begin{aligned} \text{【详解】方法一:原式} &= \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{8} \int \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin^3 \frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int x \sin^{-3} \frac{x}{2} d \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{8} \int x d \sin^{-2} \frac{x}{2} \\ &= \frac{-x}{8 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{-x}{8 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C. \\ &= -\frac{1}{8} x \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$