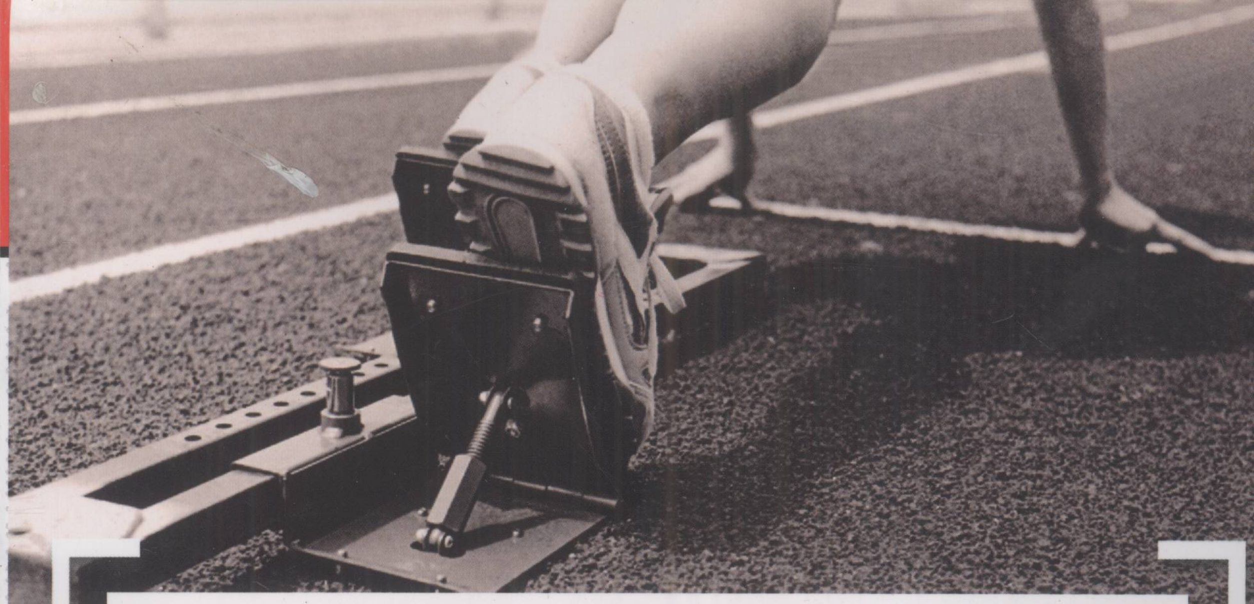

奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的数论问题

◇沈文选 张垚 冷岗松 唐立华/编著

湖南师范大学出版社

奥林匹克数学中的数论问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

◇沈文选　张垚　冷岗松　唐立华/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的数论问题／沈文选，张垚，冷岗松等编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2009.8

(奥赛经典丛书·专题研究系列)

ISBN 978－7－5648－0036－9

Ⅰ.奥…　Ⅱ.①沈…②张…③冷…　Ⅲ.数论课—中学—教学参考资料　Ⅳ.0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 135407 号

奥林匹克数学中的数论问题

沈文选　张　垚　冷岗松　唐立华　编著

◇组　　稿：颜李朝　廖小刚
◇责任编辑：颜李朝
◇责任校对：胡晓军
◇出版发行：湖南师范大学出版社
　　地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
　　电话/0731.88853867　88872751　传真/0731.88872636
　　网址/http://press.hunnu.edu.cn
◇印刷：长沙化勘印刷有限公司

◇开本：730×960　1/16 开
◇印张：32.5
◇插页：0.25
◇字数：700 千字
◇版次：2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978－7－5648－0036－9
◇定价：38.00 元

前　　言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动.多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,去与其他"高手"互相琢磨,激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进.这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自 1986 年参加国际数学奥林匹克以来,所取得成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先的水平.其中,到 2007 年止,湖南的学生已取得 10 块金牌、3 块银牌的好成绩.这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望.为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系.为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,2003 年,湖南师范大学成立了"数学奥林匹克研究所".研究所组建近一年来,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书,分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷.这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感.从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

由于这套丛书篇幅较大,2009 年又进行了修订,有些部分可能整理欠完善,敬请专家、同行和读者不吝指正.

编　者
2009 年 8 月

目 录

第一章 整数的离散性与封闭性运算

【基础知识】

1. 整数的离散性

任何两个整数 x、y 之间至少相差 1，因此有不等式：

$x<y\Leftrightarrow x+1\leqslant y$.

2. 整数的封闭性运算

任何两个整数的和、差、积以及乘方运算的结果仍为整数. 因此，这几种运算是整数的封闭性运算.

【典型例题与基本方法】

例 1 求整数 a、b、c，使它们满足条件：

$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$.

解 由题设条件 $a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c$ 及整数的离散性，有

$a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c$,

上式配方变形得 $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0$.

由于 $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2\geqslant 0$，$\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2\geqslant 0$，$(c-1)^2\geqslant 0$，

从而 $a-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b}{2}-1=c-1=0$.

故 $a=1$，$b=2$，$c=1$ 为所求.

例 2 （第 2 届全俄数学奥林匹克题）证明不存在整数 a，b，c，d，使得表达式 ax^3+bx^2+cx+d，当 $x=19$ 时，值为 1；当 $x=62$ 时，值为 2.

证明 设 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

若存在满足题目要求的整数 a,b,c,d,则

$P(19)=a\cdot 19^3+b\cdot 19^2+c\cdot 19+d=1$, ①

$P(62)=a\cdot 62^3+b\cdot 62^2+c\cdot 62+d=2$. ②

②－①得

$a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)=1$,

即 $43[a(62^2+62\cdot19+19^2)+b(62+19)+c]=1$.

此式的左边是 43 的倍数，显然不能等于 1.

因而满足题目要求的整数 a，b，c，d 不存在.

例 3 （2003 年西部数学奥林匹克题）将 1、2、3、4、5、6、7、8 分别放在正方体的八个顶点上，使得每一个面上的任意三个数之和均不小于 10. 求每一面上四个数之和的最小值.

解 设某个面上的四个数 a_1、a_2、a_3、a_4 之和达到最小值，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$. 由于小于 5 的三个不同的正整数之和最大为 9，故 $a_4\geqslant6$，因此

$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant16$.

如图 1－1，我们取正方体的上面依次为 1、7、3、6，下面依次为 4、8、2、5，则右侧面为 $6+3+2+5=16$，这表明 16 是可以达到的.

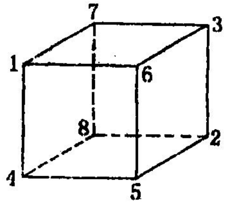

图 1－1

例 4 （2002 年女子数学奥林匹克题）求所有的正整数对 (x,y)，满足 $x^y=y^{x-y}$.

解 若 $x=1$，则 $y=1$；若 $y=1$，则 $x=1$.

若 $x=y$，则 $x^y=1$，所以 $x=y=1$.

下面讨论 $x>y\geqslant2$ 的情形. 由题设

$$1<\left(\frac{x}{y}\right)^y=y^{x-2y},$$

所以 $x>2y$，且 x 是 y 的倍数.

设 $x=ky$，则 $k\geqslant3$，且

$k^y=y^{(k-2)y}$,

所以 $k=y^{k-2}$.

因为 $y\geqslant2$，所以 $y^{k-2}\geqslant2^{k-2}$，又用数学归纳法或二项式定理易证，当 $k\geqslant5$ 时，$2^k>4k$，故 k 仅可能为 3 或 4.

当 $k=3$ 时，$y=3$，$x=9$；当 $k=4$ 时，$y=2$，$x=8$.

所以，所求的全部正整数对为 (1，1)，(9，3)，(8，2).

例 5 （第 5 届美国数学邀请赛题）求 k 的最大值，使 3^{11} 可以表示为 k 个连续正整数之和.

解 假设 3^{11} 表示成连续 k 个正整数之和，

$3^{11}=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)$, ①

其中 n 为非负整数，k 为正整数.

我们求满足①式的 k 的最大值.

$3^{11}=nk+\frac{k(k+1)}{2}$,

$2\cdot 3^{11}=2nk+k(k+1)$,

$2\cdot 3^{11}=k(2n+k+1)$.

显然 $k<2n+k+1$.

要使等式右边较小的因数 k 尽可能地大，又必须使 n 非负，则最大的可能是

$k=2\cdot 3^5$，$2n+k+1=3^6$.

此时可解得 $n=121$.

因此有

$3^{11}=122+123+\cdots+607$.

所求的最大的 k 为 $2\cdot 3^5=486$.

例 6 （1993 年德国数学奥林匹克题）是否存在自然数 n，使 $n!$ 的前面四位数为 1993?

解 存在.

设 $m=1000100000$，当 $k<99999$ 时，若 $(m+k)!=\overline{abcd\cdots}$，则

$$\begin{aligned}(m+k+1)!&=(m+k)!\times(m+k+1)\\&=\overline{abcd\cdots}\times 10001\cdots\\&=\overline{abcx\cdots},\text{其中 } x=d \text{ 或 } d+1.\end{aligned}$$

于是,设 $m!=\overline{abcd\cdots}$,则 $(m+1)!,(m+2)!,\cdots,(m+99999)!$ 中每一个的前四位数与前一个的相等或增加 1. 而且(由于左起第五位数字增加 a),至多经过 10 个数,前四位数就需增加 1. 这样 100000 个数 $m!,(m+1)!,\cdots,(m+99999)!$ 的前四位数跑遍 10000 个值,其中必有 1993 出现.

【解题思维策略分析】

1. 逐步逼近，缩小范围

例 7 一个正整数的立方是一个四位数，这个正整数的四次方是一个六位数，这里用到的 10 个数字，恰好是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 各出现一次，一个不重，一个不漏. 试求出这个正整数.

解 设这个正整数为 n. 如果 n 是一位数，那么 n^3 最多是三位数，n^4 最多是四位数，n^3 与 n^4 写在一起一定用不到 10 个数目字，所以 n 不可能是一位数.

如果 n 是三位数，即使是最小的 100，n^3 也是个七位数了，n^4 更超过七位，n^3 与 n^4 写在一起一定超过 10 个数目字，也与题设的条件不合. 因此，n 必是一个两位数.

当 n 是一个两位数时，n^4 比 n^3 至少要多一位. 所以 n^3 不能多于四位，n^4 不能

少于六位．由于 $22^3=10648$，已经是五位数，所以 n 一定小于 22；又由于 $17^4=83521$，只是一个五位数，不到六位，所以 n 一定大于 17．因此，n 只能是 18，19，20，21 这四个数中的某一个．

通过计算不难发现：$20^3=8000$，$19^4=130321$，$21^4=194481$，都出现数字重码现象，与题目的条件不合，应予排除．剩下的唯一有可能合乎条件的数就只有 18 了．由于 $18^3=5832$，$18^4=104976$，而且 10 个数目字不重不漏地出现，从而所求的正整数为 18 这个数．

类似地可求解如下答案也为 18 的问题：

问题 一个正整数分别乘以 1，2，3，4，5 后，把 5 个乘积依次排列起来，恰好出现 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 10 个数目字，一个不重，一个不漏，试求出这个正整数．

2．提炼特征，寻求规律

例 8 设函数 f：$\mathbf{N}^+\to\mathbf{N}^+$ 是严格递增的，且对每个 $n\in\mathbf{N}^+$ 都有 $f[f(n)]=kn$．求证：对每个 $n\in\mathbf{N}^+$，都有 $\frac{2kn}{k+1}\leqslant f(n)\leqslant\frac{(k+1)n}{2}$，$(k\in\mathbf{N}^+)$．

证明 由于 f 严格递增，且取正整数值，所以 $f(n+1)>f(n)$．

于是由整数的离散性，有 $f(n+1)\geqslant f(n)+1$．

从而，对于 $m\in\mathbf{N}^+$，有 $f(n+m)\geqslant f(n)+m$．

所以，对 $m\geqslant n$ 的正整数，有 $f(m)=f(n+m-n)\geqslant f(n)+m-n$，即有 $f(m)-m\geqslant f(n)-n$．

取 $m=f(n)$，得 $f[f(n)]-f(n)\geqslant f(n)-n$，

即有 $f(n)\leqslant\frac{1}{2}\{f[f(n)]+n\}=\frac{1}{2}(kn+n)=\frac{(k+1)n}{2}$．

用 $f(n)$ 代上式中的 n，有 $f[f(n)]\leqslant\frac{k+1}{2}\cdot f(n)$．

又 $kn=f[f(n)]\leqslant\frac{1}{2}(k+1)\cdot f(n)$，即有 $f(n)\geqslant\frac{2kn}{k+1}$．

故 $\frac{2kn}{k+1}\leqslant f(n)\leqslant\frac{(k+1)n}{2}$．

例 9 （IMO－19 试题）设 $f(n)$ 为一个在所有正整数集合 $\mathbf{N}^+$ 上有定义且在 $\mathbf{N}^+$ 上取值的函数，证明：如果对每一个正整数 n，$f(n+1)>f[f(n)]$，则对每一个 n，有 $f(n)=n$．

证明 由题设，可推测应有 $f(n+1)>f(n)$，即 $f(n)$ 单调递增．我们放在后面再证这个结论．

这时，由 $f[f(n)]<f(n+1)$，有 $f(n)<n+1$．

注意到整数的离散性，有 $f(n)\leqslant n$.

而 $f(1)<f(2)<\cdots<f(n-1)<f(n)$，即知它们必须是前 n 个不同的正整数，故 $f(n)=n$.

下面证明 $f(n)$ 严格递增，即证 $f(1),f(2),f(3),\cdots$ 中 $f(1)$ 最小，$f(2)$ 次小，$f(3)$ 再次小，$\cdots$.

由题设 $f(n+1)>f[f(n)]$，知 $f(n+1)$ 不是最小的，即在 $f(2),f(3),\cdots$ 中自变量大于 1 的函数值都不是最小的，因而只有 $f(1)$ 是最小的.

再考虑 $f(2)-1,f(3)-1,\cdots$.

令 $F(n)=f(n+1)-1$，则

$F(n+1)=f(n+2)-1>f[f(n+1)]-1=f[F(n)+1]-1=F[F(n)]$.

于是，知 $F(n)$ 具有 $f(n)$ 的性质.

即知 $F(1)=f(2)-1$ 在 $f(2)-1,f(3)-1,\cdots$ 中是最小的，亦即知 $f(2)$ 在 $f(1),f(2),f(3),\cdots$ 中是次小的.

依上可证，$f(3)$ 再次小，$\cdots$. 故 $f(n)$ 单调递增.

例 10 （1990 年前苏联教委推荐试题）试找出这样的 a 值，它们使得方程 $x^2-ax+9a=0$ 的根是整数.

解 设 x_1，x_2 是方程 $x^2-ax+9a=0$ 的整数根，于是由韦达定理得

$x_1+x_2=a$,

$x_1x_2=9a$.

于是 $x_1x_2=9(x_1+x_2)$,

$x_1x_2-9x_1-9x_2+81=81$,

$(x_1-9)(x_2-9)=81$.

注意到，对 81 有如下 6 种形式的因数分解：

$81=1\cdot 81=(-1)\cdot(-81)=3\cdot 27=(-3)\cdot(-27)=9\cdot 9=(-9)\cdot(-9)$.

因而可知 $a=x_1+x_2=(x_1-9)+(x_2-9)+18$，可得下面 6 个数：

$\pm 82+18$，$\pm 30+18$，$\pm 18+18$，即

$a=100$，-64，48，-12，36，0.

于是当 a 取上述 6 个整数值时，所给方程有整数根.

例 11 （第 9 届美国数学邀请赛题）有多少个实数 a，使得 $x^2+ax+6a=0$ 只有整数解.

解 设方程 $x^2+ax+6a=0$ 有整数解 m，n （$m\leqslant n$），则有

$m+n=-a$,

$mn=6a$.

于是有$-6(m+n)=mn$，即

$(m+6)(n+6)=36$.

因为$36=1\cdot36=2\cdot18=3\cdot12=4\cdot9=6\cdot6$，所以

满足$m\leqslant n$的解(m,n)有

$(-42,-7),(-24,-8),(-18,-9),(-15,-10)$,

$(-12,-12),(-5,30),(-4,12),(-3,6),(-2,3),(0,0)$.

对应的$a=-(m+n)$的值为

49，32，27，25，24，-25，-8，-3，-1，0. 共10个.

例12 （第14届全俄数学奥林匹克题）当$x=-1$，$x=0$，$x=1$，$x=2$时，多项式$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$取整数值. 求证对于所有的整数x，这个多项式取整数值.

证明 考虑恒等式

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d.$$

由于$P(0)=d$，$P(1)=a+b+c+d$是整数，则d是整数，$a+b+c$是整数.

$P(-1)=2b-(a+b+c)+d$是整数，则$2b$是整数.

$P(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d$是整数，则$6a$是整数.

又因为$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$，$\frac{x(x-1)}{2}$都是整数，于是

$P(x)=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$对任意的整数$x$，都是整数.

例13 计算：$\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{2n位}+\underbrace{11\cdots1}_{n+1位}-\underbrace{66\cdots6}_{n位}}$.

解 令$a=\underbrace{11\cdots1}_{n位}$，则

$$10^n=\underbrace{99\cdots9}_{n位}+1=9a+1,$$

$$\underbrace{44\cdots4}_{2n位}=4a\cdot10^n+4a=4a(9a+2),$$

$$\underbrace{11\cdots1}_{n+1位}=10a+1,\ \underbrace{66\cdots6}_{n位}=6a.$$

故原式$=\sqrt{4a(9a+2)+10a+1}-6a$

$=\sqrt{(6a+1)^2}=6a+1$

$=\underbrace{66\cdots6}_{n-1位}7$.

【模拟实战】

1. (2005年罗马利亚数学奥林匹克题)已知 n 是一个整数,设 $p(n)$ 表示它的各位数字的乘积(用十进制表示).(1)求证:$p(n)\leqslant n$;(2)求使 $10p(n)=n^2+4n-2005$ 成立的所有 n.
2. (第48届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)求方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2004}$的全部整数解.
3. (第48届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)我们在一个立方体的每个面上写一个正整数,然后,在每个顶点处再写一个数,该数等于过这个顶点的三个面上的整数的乘积.已知该立方体各个顶点上的数字之和为70,求该立方体各个面上的数字之和.
4. (第4届斯洛文尼亚数学奥林匹克题)对每一个正整数 n,是否都存在 n 个连续的整数,使得它们的和等于 n.
5. (2003—2004年度德国数学竞赛题)已知数列 a_1,a_2,a_3,…定义如下:

   $a_1=1$,$a_2=1$,$a_3=2$,$a_{n+3}=\dfrac{1}{a_n}(a_{n+1}a_{n+2}+7)$,$n>0$.

   证明:对于所有的正整数 n,a_n 是整数.
6. (2004年克罗地亚数学竞赛题)求所有多于两位的正整数,使得每一对相邻数字构成一个整数的平方.
7. (第36届奥地利数学奥林匹克题)设 a 是整数,且 $|a|\leqslant 2005$,求使得方程组 $\begin{cases}x^2=y+a,\\y^2=x+a\end{cases}$ 有整数解的 a 的个数.
8. (2006年塞尔维亚和黑山队选拔赛试题)将集合 $S=\{1,2,\cdots,2006\}$ 分成两个不交的子集 A 和 B,且满足

   (1)$B\in A$;

   (2)若 $a\in A$,$b\in B$,$a+b\in S$,则 $a+b\in B$;

   (3)若 $a\in A$,$b\in B$,$ab\in S$,则 $ab\in A$.

   求 A 中元素的数目.
9. (2003年台湾集训题)求所有函数 f:$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,对所有 m,$n\in\mathbf{N}$ 满足 $f(m^2+n^2)=f^2(m)+f^2(n)$且 $f(1)>0$.
10. (第9届中美洲及加勒比海地区数学奥林匹克题)设 S 是有限整数集.假设对于任两个不同的元素 p、$q\in S$,存在三个元素 a、b、$c\in S$(a、b、c 不必不同,且 $a\neq 0$),使得多项式 $F(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $F(p)=F(q)=0$.试确定 S 中元素

个数的最大值.

11. (2007 年捷克-斯洛伐克-波兰数学竞赛题) 已知 $n\in\{3900, 3901, \cdots, 3909\}$. 求满足下述条件的 n：集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 可分拆成若干个三元数组，且每一个数组中有一个数等于其他两数之和.

第二章　整数的相除

【基础知识】

1. 一条基本定理

定理（带余除法）　若 a，b 是两个整数，其中 $b\neq0$，则存在唯一的一对整数 q 和 r，使得

$$a=bq+r\ (0\leqslant r<|b|),$$

其中 q 称为商数，r 称为余数.

2. 定义

(1) 在上述带余除法中，当 $r=0$ 时，则称 a 能被 b 整除，或者 b 整除 a，记为 $b\mid a$，并约定 $0\mid 0$. 易见当 a，b 均为正整数时，有 $b\leqslant a$.

(2) 若 $b\mid a$，则 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数（因数），若 $b\neq\pm1$，则 b 叫做 a 的真约数.

(3) 若 a 不能被 b 整除，则记作 $b\nmid a$.

(4) 如果 $a^t\mid b$，$a^{t+1}\nmid b$，$t\in\mathbf{N}^+$，记作 $a^t\parallel b$.

3. 欧几里得（Euclid）辗转相除法

设 a，b 是任意两个正整数，由带余除法，知

$$a=bq_1+r_1(0<r_1<b),$$

$$b=r_1q_2+r_2(0<r_2<r_1),$$

……

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n(0<r_n<r_{n-1}),$$

$$r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1}(r_{n+1}=0),$$

于是 $r_n=(a,b)$.

4. 关于整除的一些简单性质

(1) $b|0,\pm1|a,a|a(a\neq0)$.

(2) 若 $b|a,a\neq0$,则 $1\leqslant|b|\leqslant|a|$.

(3) 若 $a|b,k\in\mathbf{Z}$,则 $a|kb$.

(4) 若 $a|b,a|c$,则 $a|(b\pm c)$.

推论 1　若 $a|b$，$a|(b\pm c)$，则 $a|c$.

推论 2　若 $a|b$，$a|c$，m、$n\in\mathbf{Z}$，则 $a|(mb+nc)$.

(5) 若 $a|b$，则 $a^m|b^m$.

(6) 若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$.

(7) 若 $a|c$，$b|c$，$(a,b)=1$，则 $ab|c$.

(8) 若 $a|bc$，$(a,b)=1$，则 $a|c$.

(9) 若 p 为素数，$p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$.

推论 3　若 p 为素数，$p\mid a^m$，则 $p\mid a$.

(10) 设 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$，则 $a\mid b\Leftrightarrow\alpha_i\leqslant\beta_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$.

(11) 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=0$，$b$ 能整除 a_1，a_2，…，a_k 中的 $k-1$ 个，则 b 能整除另一个.

5. 几个相除结论

(1) 任何 n 个连续整数之积一定能被 n 整除.

(2) 任何 n 个连续整数之积一定能被 $n!$ 整除.

(3) $(a+b)^n$ 被 a 除的余数是 b.

【典型例题与基本方法】

例 1　(2005 年俄罗斯数学奥林匹克题) 试找出不能表示为$\dfrac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$的形式的最小的正整数，其中 a、b、c、d 都是正整数.

解　所求的最小正整数是 11.

我们有：

$$1=\frac{4-2}{4-2},\ 3=\frac{8-2}{4-2},\ 5=\frac{16-1}{4-1}=\frac{2^5-2}{2^3-2},$$

$$7=\frac{16-2}{4-2},\ 9=2^3+1=\frac{2^6-1}{2^3-1}=\frac{2^7-2}{2^4-2},$$

$$2=2\cdot1=\frac{2^3-2^2}{2^2-2},\ \cdots,\ 10=2\cdot5=\frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

假设

$$11=\frac{2^a-2^b}{2^c-2^d},$$

不失一般性，可设 $a>b$，$c>d$，记 $m=a-b$，$n=c-d$，$k=b-d$，于是得到

$$11(2^n-1)=2^k(2^m-1).$$

上式左端为奇数，因此 $k=0$. 易知 $n=1$ 不能使上式成立. 而如果 $m>n>1$，则 2^n-1 与 2^m-1 被 4 除的余数都是 3，从而上式左端被 4 除的余数为 1，右端却为 3，此为

矛盾.

例 2 (1972 年第 6 届全苏数学奥林匹克题)(1)设 a,m,n 是自然数,$a>1$. 证明:如果 a^m+1 能被 a^n+1 整除,那么 m 能被 n 整除.(2)设 a,b,m,n 是自然数,同时 a 和 b 互素,且 $a>1$. 证明:如果 a^m+b^m 能被 a^n+b^n 整除,那么 m 能被 n 整除.

证明 注意到(1)是(2)的特例,即(2)中 $b=1$ 的情形,所以我们只证明(2).

首先证明如下两个引理:

引理 1:若 $a^n+b^n \mid a^k+b^k$,$(a,b)=1$,则 $a^n+b^n \mid a^{k-n}-b^{k-n}$.

引理 2:若 $a^n+b^n \mid a^l-b^l$,$(a,b)=1$,则 $a^n+b^n \mid a^{l-n}+b^{l-n}$.

这两个引理容易由 $(a,b)=1$ 以及下面的两个恒等式得到:

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}+b^{k-n}),$$

$$a^l-b^l=a^{l-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

设 $m=nq+r,0\leqslant r\leqslant n$,则由引理 1,2 可知

$$a^n+b^n \mid a^r+(-1)^q b^r. \qquad ①$$

这是因为 r 可以从 m 减去 nq 得到.

由于 $0\leqslant |a^r+(-1)^q b^r|<a^n+b^n$,因此要满足①式，必须 $r=0$ 及 q 是奇数.

这就得到 $m=nq$，即 $n \mid m$.

例 3 (IMO-25 试题) 求正整数 a，b，使之满足:

(1) $ab(a+b)$不被 7 整除;

(2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ 被 7^7 整除.

验证你的答案.

解 我们有

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

由(1)和(2)知应有 $7^7 \mid 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$,亦即 $7^3 \mid a^2+ab+b^2$.

下面我们来求满足

$$(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2=7^3=343 \qquad ①$$

的正整数 a，b.

由于 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}(a+b)^2$，于是由①可得估计式

$$343\leqslant(a+b)^2\leqslant457,$$

解得 $19\leqslant a+b\leqslant21$.

令 $a+b=19$，由①得 $ab=18$，联立解得 $a=18$，$b=1$，容易验证，这是一对满足 (1) 和 (2) 的正整数.

例 4 (1992 年“友谊杯”国际数学竞赛题) 求最大自然数 x，使得对每一个自然数 y，x 能整除 $7^y+12y-1$.

解 当 $y=1$ 时，$7^y+12y-1=18$，因此 $x\mid18$，从而 $x\leqslant18$.

下面用数学归纳法证明：

$18\mid 7^y+12y-1$.

当 $y=1$ 时，显然.

若 $y=k$ 时，$18\mid 7^k+12k-1$.

当 $y=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&7^{k+1}+12(k+1)-1\\=&7\cdot7^k+7\cdot12k-7-6\cdot12k+18\\=&7(7^k+12k-1)-72k+18.\end{aligned}$$

由归纳假设

$18\mid7^k+12k-1$,

又 $18\mid-72k+18$,

于是 $18\mid7^{k+1}+12(k+1)-1$,

即 $y=k+1$ 时命题成立.

从而对所有的自然数 y，$18\mid7^y+12y-1$.

于是最大的自然数 $x=18$.

例 5 （IMO－39 试题）试确定使 ab^2+b+7 整除 a^2b+a+b 的全部正整数对 (a,b).

解 设正整数对 (a,b) 满足 $ab^2+b+7\mid a^2b+a+b$，则有

$ab^2+b+7\mid a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b)$，即

$ab^2+b+7\mid 7a-b^2$.

(i) 当 $7a-b^2=0$，即 $7\mid b$ 时，

设 $b=7k$，则 $7a=7^2k^2$，$a=7k^2$，此时有

$a^2b+a+b=k(ab^2+b+7)$.

故 $(a,b)=(7k^2,7k)$ 是题目的解.

(ii) 当 $7a-b^2>0$ 时，有 $7a-b^2\geqslant ab^2+b+7$，

$7a>ab^2$，$b^2<7$，知 $b=1$ 或 2.

若 $b=1$，则 $a+8\mid a^2+a+1$.

设 $a+8=u$，则 $a^2+a+1=(u-8)^2+(u-8)+1=u^2-15u+59$.

由 $u\mid u^2-15u+59$，得 $u\mid59$，

于是 $u=19$ 或 57，得 $a=11$ 或 49.

此时又得到两组解 $(a,b)=(11,1)$ 或 $(49,1)$.

若 $b=2$，则 $4a+9\mid7a-4$.