高校经典教材同步辅导

九章丛书

概率论与数理统计

（浙大三版）

辅导

主编／牛丽英 赵广涛

编写／九章系列课题组

■知识点窍■逻辑推理

■习题全解■全真考题

■名师执笔■题型归类

赠 习题全解

新版

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

概率论与数理统计辅导

（浙大三版）

主编　牛丽英　赵广涛
主审　孙怀东
编写　九章系列课题组
周奎伟　宋彩霞
黄树森　杨富云

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计(浙大三版) / 牛丽英,赵广涛主编.—北京:人民日报出版社,2004.9

ISBN 7-80153-967-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①牛…②赵… Ⅲ.高校—教学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099672 号

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计(浙大三版)

主　　编:牛丽英　赵广涛
责任编辑:曲　易
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:295 千字
开　　本:787×960　1/16
印　　张:20.75
印　　数:3000
版　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-967-2/G·550
定　　价:19.20 元(全五册·128.00 元)

前　言

本书是高等教育出版社出版的《概率论与数理统计》(浙江大学，第三版)一书的辅导及习题全解. 全书按教材各章顺序编排，与教材题号一致，对各章全部习题都做了详尽解答. 同时，本书亦可作为一本概率统计的参考书独立使用，以帮助读者更好的学习该课程.

本书各章均由五部分组成：

◆**知识结构网络图**：以图表的形式概括各章知识点及其之间的联系，使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

◆**重要概念、定理及公式**：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研经常涉及的内容进行了详细的归纳和解释。目的是使读者在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

◆**典型题型及例题解析**：本书尽可能归纳了这门课程所涉及的重要题型，这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的，具有一定的代表性。读者通过对典型的“思路点拨”和例题的“逻辑推理”的理解，可以更好的掌握和理解此类题型的解法，从而达到举一反三、触类旁通的效果。

◆**全真考题解析**：精选历年经典考研题并给出详细的解题思路和解答过程。供读者提高解题能力和备考硕士研究生之用。

◆**自测题及解答**：要掌握一门课程，做一定的习题是非常必要的。本书精心选编了部分习题，供读者模拟练习之用，部分习题可能具有一定的难度，读者可以参考其后的自测题解答仔细揣摩，使读者的解题技能得到提高。

在成书过程中，编者参考了众多优秀的著作和教材，由于篇幅所限未能

一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢。

由于时间仓促和编者水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评，指正。

编　者

2005 年 6 月

目　录

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、知识结构网络图

- 随机事件 —— 事件关系和运算
  - 样本空间、事件定义
  - 事件间的运算关系
  - 运算形式和法则
- 概率
  - 定义和性质
    - 定义
      - 统计定义
      - 古典定义
      - 几何定义
    - 性质
      - 非负，有界
      - 单调不减
      - 连续可加
  - 计算
    - 古典概率
    - 几何概率
    - 条件概率
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式
  - 独立试验序列概型
    - 事件独立性
    - 伯努利概型

二、重要概念、定理及公式

1. 随机事件

(1) 基本概念

随机试验在概率论中，我们将具有以下三个特点的试验称为随机试验：

① 可以在相同的条件下重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确所有可能结果；

③ 进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现.

样本空间　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间.

样本点　样本空间的元素，即 E 的每个结果.

随机事件　试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件.

事件发生　在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

必然事件　样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件.

不可能事件　试验中不可能发生的事件.

(2) 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k,(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集. 则事件间有以下几种基本关系：

事件的包含　若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生(图 1－1).

事件的相等　若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

事件的和　事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 也记作 $A+B$(图 1－2).

事件的积　事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A,B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB(图 1－3).

事件的差　事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生，B 不发生时事件 $A-B$ 发生(图 1－4).

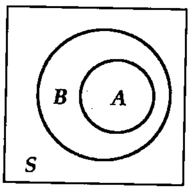

图1-1

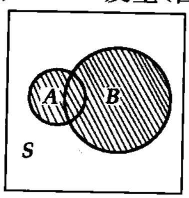

图1-2

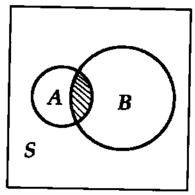

图1-3

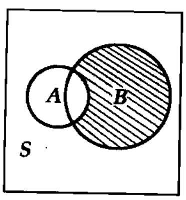

图1-4

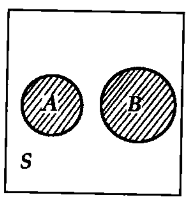

图1-5

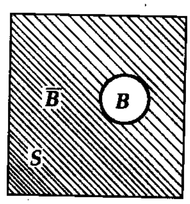

图1-6

事件的互斥(互不相容)　若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的．这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生(图 1－5)．基本事件是两两互不相容的．

事件的逆(对立)　若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件．又称事件 A 与事件 B 互为对立事件．这指的是对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生．B 的对立事件记为 $\overline{B}$，$\overline{B} = S - B$(图 1－6)．

2. 概率的定义和基本性质

(1) 概率的定义

① 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次，当 n 逐渐增大时，比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，且 n 越大，摆动幅度越小．则称此常数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$．

② 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同，而事件 A 由其中 m 个事件 $w_{i1}, w_{i2}, \cdots, w_{im}$ $(m \leqslant n)$ 组成，则事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$．

(2) 概率的性质

① $P(\varnothing) = 0$；

② 有限可加性　若 n 个事件 $A_1, \cdots A_n$ 满足 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

③ 逆事件的概率　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

④ 单调性　设 A、B 是两个事件，且 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$，且

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

⑤ 连续性　设事件列 $A_1, A_2, \cdots$ 满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$，则

$$\lim_{x \to \infty} P(A_n) = P(A)$$

⑥ 加法定理　若 A、B 是任意两个事件，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

3. 古典概型(等可能概型)

(1) 定义

具有以下两个特点的试验称为**等可能概型**：

①试验的样本空间只包含有限个元素；

②试验中每个基本事件发生的可能性相同.

它在概率论发展初期曾是主要的研究对象,所以也称为**古典概型**:

(2)古典概型中事件概率的计算公式

若事件 A 包含 k 个基本事件,即 $A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$,这里 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数.则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件的总数}}$$

4. 条件概率

(1)定义

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

(2)乘法公式

设 $P(A)>0,P(A_1,A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(3)全概率公式和贝叶斯公式

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组,则

①$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$为全概率公式.

②$P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},j=1,2,\cdots,n$

为 Bayes 公式(贝叶斯公式或逆概率公式).

5. 事件的独立性

(1)定义

设 A、B 是两事件,如果满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2)独立事件的性质

①事件 A 与事件 B 独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立;

②$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立与 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立是不同的的概念,前者蕴涵后者,但反之不成立;

③A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$,$(P(A)>0)$;

④$P(B|A)=1-P(\overline{B}|A),(P(A)>0)$；

$P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

三、典型题型的解题方法与技巧

题型Ⅰ　事件的表示方法及其运算

【解题提示】 事件是空间的子集，因此要想正确的表示事件必须首先写出正确的样本空间，并进而弄清楚不同事件之间的关系；对于事件的运算，其与集合运算相对应.

【例 1—1】 连续进行三次独立射击，设 A_i“第 i 次射击命中”，$i=1,2,3$；B_j 恰好命中 j 次”，$j=0,1,2,3$；C_k=“至少命中 k 次”，$k=0,1,2,3$.

(1)试用 A_i 表示 B_j 和 C_k；$i=1,2,3$，j、$k=0,1,2,3$.

(2)试用 B_j 表示 C_k；j、$k=0,1,2,3$.

【解】 (1) $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；　$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$；

$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；　$B_3=A_1A_2A_3$；

$C_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1+A_2+A_3$；　$C_1=A_1+A_2+A_3$；

$C_2=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$；　$C_3=A_1A_2A_3$.

(2)

$$C_0=B_0+B_1+B_2+B_3;$$
$$C_1=B_1+B_2+B_3;$$
$$C_2=B_2+B_3;$$
$$C_3=B_3.$$

【点评】 由本例可见

$A_1+A_2+A_3=B_0+B_1+B_2+B_3=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$；

等式左端是三个相容事件的和，而右端各项互不相容，就是说任意事件的和，可以化为不相容事件的和，这在计算概率时是经常应用的，一般方法如下：

设 A,B,C 为任意事件，则

$$A+B=A+(B-A)=A+B\overline{A}.$$

$$A+B+C=A+(B-A)+(C-A-B)=A+B\overline{A}+C\overline{A}\overline{B}.$$

【例 1—2】 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度

值，则事件 E 等于.

(A) $\{T_{(1)}\leqslant t_0\}$ (B) $\{T_{(2)}\leqslant t_0\}$ (C) $\{T_{(3)}\leqslant t_0\}$ (D) $\{T_{(4)}\leqslant t_0\}$

【解】 由题意可知只有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，事件 E 就发生. 由于 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$，$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ 表示 4 个温控器显示的温度都不低于 t_0；$\{T_2\geqslant t_0\}$ 表示至少有 3 个温控器显示的温度都不低于 t_0；$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ 表示至少有两个温控显示器的温度不低于 t_0；$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$ 表示至少一个温控器显示的温度不低于 t_0. 因此仅选(C).

题型Ⅱ 随机试验的样本空间的描述

【解题提示】 随机试验具有以下三种特点：①可以在相同的条件下重复地进行；②每次试验的可能结果不止一个，且能事先明确试验的所有可能结果；③进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现. 随机试验的每一个可能结果称为随机事件，相对于观察目的不能再分解的事件称为基本事件. 所有基本事件的全体称为样本空间，记做 Ω(或 S).

【例 1－3】 将一颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数. 令 $A=\{$两次掷出的点数相同$\}$，$B=\{$点数之和为 10$\}$，$C=\{$最小点数是 4$\}$.

(1)写出试验的样本空间；

(2)用样本点表示事件 A,B,C 以及 $A\cup B,ABC,A-C,C-A,B\overline{C},A\cup(BC)$.

【解】 (1)每次掷骰子都有 6 个可能结果，令第一次出现 1 点，且第二次出现 1 点的表示方法为“11”，其他类似，因此样本空间可表示为

$$\Omega=\{11,12,\cdots,16,21,22,\cdots,26,\cdots,61,62,\cdots,66\},$$

Ω 共包含有 36 个元素.

(2)通过以上分析可知 $A=\{11,22,33,44,55,66\}$；$B=\{46,55,64\}$，$C=\{44,45,46,54,64\}$.

$$A\cup B=\{11,22,33,44,55,66,46,64\},$$
$$ABC=\varnothing,$$
$$A-C=\{11,22,33,55,66\},$$
$$C-A=\{45,46,54,64\},$$
$$B\overline{C}=\{55\},$$
$$A\cup(BC)=\{11,22,33,44,55,66,46,64\}.$$

【例 1－4】 写出下列随机试验 E 的样本空间 Ω，如果 Ω 是有限集，计算样本空间的容量 V_Ω(Ω 中样本点的总数目)：

(1)E：一个小班进行一次数学考试，试录其平均成绩(百分制)；

(2)E:10件产品中有3件是次品,每次从该10件中任取1件(取后不放回),直将3件次品都取出为止,记录抽取的次数;

(3)E:连续生产某种产品,直到生产出10个正品为止,记录产品总件数;

(4)E:某射击手向靶射击,直到击中为止,记录击中的各种情况;

(5)E:向xoy平面上的单位圆内($x^2+y^2<1$)投点,记录落点的坐标,

【解】 (1) 试验E的样本空间为$\Omega=\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{1000\cdot n}{n}$,$n$为小班人数,因此,样本空间的容量为$V_\Omega=100n+1$;

(2) 试验E的样本空间为$\Omega=\{3,4,\cdots 10\}$,因此,样本空间的容量为$V_\Omega=8$;

(3) 试验E的样本空间为$\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$;

(4) 用ω_i表示第i次击中,$\overline{\omega_i}$表示第i次不中,则试验E的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\overline{\omega}_1\ \omega_2,\overline{\omega}_1\ \overline{\omega}_2\ \omega_3,\cdots,\overline{\omega}_1\ \overline{\omega}_2\cdots\ \overline{\omega}_{n-1}\omega_n,\cdots\}$$

Ω为无限集;

(5) 试验E的样本空间为$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

题型Ⅲ　事件运算的性质的应用

【解题提示】 事件运算的性质主要包括事件之间的交换律、结合律、分配律及摩根律,此外在事件关系运算中还有①$A=AB+A\overline{B}$,其中AB与$A\overline{B}$互不相容;②A,B互不相容,$A-B=A,AB=\varnothing$;③$A\supset B$时,$A+B=A,AB=B$.

【例1-5】 设袋内有10个编号为1～10的球,从中任取一个,观察其号码:

(1) 写出此试验的样本空间;

(2) 若A表示"取得的球的号码是奇数",B表示"取得的球的号码是偶数",C表示"取得的球的号码小于5",则:①$A\cup B$,②AB,③$\overline{C}$,④$\overline{A}\ \overline{C}$,⑤$\overline{B\cup C}$,⑥$\overline{BC}$,⑦$A\setminus C$各表示什么事件?

(3) 事件A与B是否互不相容?

(4) AC与$\overline{AC}$是否互不相容?是否对立?

【解】 (1) 若用w_i表示"取得的球的号码为i"($i=1,2,\cdots,10$),则这个试验的样本空间为$\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_{10}\}$.

(2)①$A\cup B$表示"取得的球的号码或者是偶数,或者是奇数",它是必然事件,即$A\cup B=\Omega$.

②AB表示"取得的球的号码既是奇数又是偶数",它是不可能事件,即$AB=\varnothing$.

③$\overline{C}$表示"取得的球的号码是大于或等于5",即　$\overline{C}=\{w_5,w_6,\cdots,w_{10}\}$.

④$\overline{A}\ \overline{C}$表示"取得的球的号码是大于5的偶数",即$\overline{A}\ \overline{C}=\{w_6,w_8,w_{10}\}$.