



荣获第三届爱因斯坦

世界发明博览会国际金奖

殷红博◎著

关键期与潜能开发系列丛书

guan jian qi yu qian neng kai fa xi lie cong shu

幼儿**数学**发展 关键期基础训练

中国文联出版社

抓住孩子关键期 走好人生第一步

·关键期与潜能开发系列丛书·

幼儿数学发展关键期基础训练

殷红博◎著

中国戏剧出版社

序

人类心理发展关键期的研究是从奥地利动物心理学家洛伦兹 (K. Z. Lovenz) 对动物行为发展规律的研究开始的。

洛伦兹首先研究的是鹅的认母行为，1935年洛伦兹在研究刚出生的小鹅的行为时发现，小鹅在刚出生的20个小时以内，有明显的认母行为。它追随第一次见到的活动物体，并把它当成“母亲”。当小鹅第一个见到的是鹅妈妈时，就跟鹅妈妈走，而当小鹅见到的是洛伦兹时，就跟随洛伦兹走，并把他当成“母亲”。

可是，洛伦兹后来又发现，如果在出生后的20小时内不让小鹅接触到活动物体，过了一、二天后，无论是鹅妈妈还是洛伦兹，尽管再努力与小鹅接触，小鹅都不会跟随，即小鹅这种认母行为丧失了。

于是，洛伦兹把这种无需强化的，在一定时期容易形成的反应叫做“印刻” (imprinting) 现象。“印刻”现象发生的时期叫做“发展关键期”。

重要的是，这种“关键期”现象，不仅在小鹅身上发生，许多的研究还发现，几乎所有哺乳动物都有这种“关键期”现象，并且在人类身上也有类似的现象。洛伦兹因为“关键期”理论的提出和研究而荣获诺贝尔奖。

洛伦兹后，人们开始把主要精力放在人类各种行为（包括心理、技能、知识掌握等行为）的“关键期”的研究中。于是

提出了人类心理发展“关键期”理论。所谓人类心理发展“关键期”理论是指：人类的某种行为和技能，知识的掌握，在某个时期发展最快，最容易受影响。如果在这个时期施以正确的教育可收到事半功倍的效果，一旦错过这个时期，就需要花费几倍的努力才能弥补，或者将永远无法弥补。例如：幼儿5岁以前是人类语言能力尤其是口语能力全面发展的时期。如果在5岁以前，幼儿缺乏最基本的语言训练或接触，这个幼儿将很难学会人类的语言了。印度“狼孩”的事实是许多人都知道的。在出生后不久，两个孩子被狼叼走，七、八年后才回到人类社会。尽管进行了各种教育训练，但“狼孩”几乎无法学会人类的语言。前一段时间我国大量报导了一个“猪孩”的事实。无知的父母让孩子从小与猪生活在一起，很少管教孩子，结果孩子长大后几乎不会说话，不适应人类社会，却很理解猪的叫声和行为。

经过几十年的研究，广大心理学家、生理学家以及脑科学家普遍认为，人类的各种能力与行为存在着发展关键期的现象是人类生理发展规律决定的。研究发现人的脑功能与大脑的组织结构的发展和成熟是相吻合的，也就是说关键期的存在是人的大脑发展的客观规律所决定的。如果在某一能力发展的关键期进行科学系统的训练，相应的脑组织就会得到理想的发展成熟，如果错过了一些脑功能和脑结构的关键期的相应训练，会使一些脑组织造成长期难以有效弥补的发育不足，这将带来脑功能的发展局限，外在表现为人的一些能力和行为发展不足、落后。

认识人类心理发展的关键期是重要的，是开发人类潜能培养高素质人才的开始。然而更重要的是要创造设计出一套科学、系统、操作性强、适应性广的针对关键期的训练方法。因

为不科学的训练方法，在关键期会造成更大的负作用。世界各国尤其我国这方面的教训尤为深刻。

人的智能是由上百种能力组成的综合结构系统，而其中有些能力是整个智力结构的基础，其它的能力都是在这些能力的基础上发展起来的。只有这些基础性能力发展好了，即在它们的发展关键期得到了科学、系统的训练，整个智力结构才能优化发展，潜能得到最佳的开发。

经过十余年对我国 6000 多名幼儿的实验研究（尚未对国外幼儿进行对比研究），我们认为 4 至 8 岁是人类潜能开发的最核心的和最重要的时期，是人类能力结构以及整个心理机制开始形成、建构的关键期。我们研究发现了我国幼儿在 5 岁左右三个重要的关键期。

第一，5 岁左右是幼儿掌握数学概念，进行抽象运算，以及综合数学能力开始形成的关键期。

第二，4 岁至 5 岁是幼儿记忆流畅性和记忆备用性以及整体记忆能力开始形成的关键期。

第三，5 岁半左右是幼儿掌握语法，理解抽象词汇以及综合语言能力开始形成的关键期。

（国内外研究认为，记忆能力、数学能力、语言能力是人类智力结构的最主要的基础能力，对人类其它能力的发展起着决定性的作用，如果在其发展的关键期得到科学训练，使这三种能力得到理想发展，将对以后其它能力的发展奠定坚实的基础。国内外许多超常儿童就是这样培养出来的。）

我们在经过广泛科学的调查、设计、以及反复实验、跟踪研究的基础上，在国内首次创造设计出三套适合于关键期的幼儿记忆能力、数学能力、语言能力发展的综合训练方法和简单实用、操作性很强的程序化教材，填补了国内幼儿教育领域关

于关键期理论与实践方面的空白。经过多年的幼教实践，得到了理想的教育效果，绝大多数幼儿综合智能有明显改善，学习名列前茅，并多次在国内外比赛中获奖，有的学生高中毕业后直接考入美国大学深造。

对人类关键期的研究，在国内尚属初级阶段，我们的研究仍需进一步完善和深入，希望这套丛书能起到抛砖引玉的作用，吸引更多的人来关注研究关键期问题，使这项研究更上一个层次，早日培养出我国的牛顿、爱因斯坦式的杰出人才。

殷红博

1999年8月于北京

引 言

2、数学能力是人类智能结构中最重要基础能力之一。人类认识自然界的一个重要方面,就是认识自然界的各种数量关系和形状、空间概念,并通过利用这些数量关系和形状、空间概念改造自然。一个不具备优秀数学能力的人是无法进入未来的高科技社会的。

3、人类优秀的数学能力不是天生的,而是后天适时的科学系统训练的结果,其中最重要的就是在数学能力的发展关键期得到理想的训练。

4、研究表明幼儿期是人类数学能力开始发展的重要时期,其中2岁半左右是幼儿计算能力发展的关键期,5岁左右是幼儿掌握数学概念、进行抽象运算,以及综合数学能力开始形成的关键期。如果关键期得到科学系统并且具有个性化的训练,幼儿相应的数学能力会得到理想的发展,而一旦错过关键期则会造成发展不足,以后就是花费几倍的气力也难以补偿。如果在关键期受到非科学而杂乱的教育,则会严重影响幼儿数学能力的发展,出现严重偏差,为以后的发展造成阻碍。)

我们根据我国幼儿数学概念形成特征和综合数学能力以及思维能力的发展规律,经过十余年的研究实验,创造设计了一整套针对我国5岁左右幼儿数学概念和抽象运算发展关键期的“幼儿数学抽象诱导综合训练法”(YW训练法)。这套训练法可操作性强,简单实用,具有优越的可变化性,经过数千人次的跟

踪实验、反复研究取得了理想的教学效果。经过训练的幼儿不仅在心算能力、掌握数学概念以及掌握空间概念方面显著超过同龄人,而且在注意力、记忆能力、思维能力和处理大量信息能力方面也远远超过同龄人。同时在非智力心理素质方面,经过训练的幼儿独立性、自信心、进取心、竞争心理、自我控制力、以及意志品质和求知欲都有了不同程度的提高。进入小学、中学后学习一直名列前茅,不少学生在国内外竞赛中获奖。

5岁左右是幼儿数学概念和抽象运算能力发展的关键期,但是到了5岁才开始训练已经晚了,而过了5岁的幼儿急需进行补偿性训练。因此本书的训练主要适合于5岁至6岁的幼儿的训练,也适合于4岁幼儿的提前预备训练和小学一、二年级幼儿的补偿训练。只要能尽早达到本书的教学要求,幼儿的数学能力以及相关的智力和非智力心理素质都会得到有效的发展。

由于我们的经验水平有限,书中不足之处恳请读者批评指正。

作 者

目 录

序	/1
引 言	/1
第一章 关键期数学训练与幼儿数学能力的发展	/1
第二章 关键期数学训练与幼儿智力结构的建构	/11
第三章 关键期数学训练与幼儿非智力心理素质	/18
第四章 关键期数学训练的原则与方法	/25
第五章 幼儿数学能力发展关键期基础训练程序	/49
第六章 高级 YW 训练程序	/139
第七章 如何引导幼儿进入数学王国	/237

· 第一章 ·

关键期数学训练与 幼儿数学能力的发展

1、(数学是关于事物数量与形体本质关系的科学,它与人类的生存、社会的进步休戚相关。数学是人类掌握自然科学和社会科学的基础,数学知识正深入到各项科学以及我们生活的各个方面,成为基础科学的科学。一个不具有数学知识的人很难想象如何生活在现代社会,当然未来社会对人的数学知识的掌握和数学能力的水平要求会更高。)>->?

广义上讲,能力是指人能顺利完成某项活动,解决问题的个性心理特征。它是在掌握一定知识、技能的基础上形成的,与人的遗传素质亦有很大关系。而数学能力是指人在掌握一定数学知识、技能的基础上形成的个性心理特征,表现出人对事物量和形的认识,以及运用数学知识解决各种问题的顺利程度。著名瑞士心理学家皮亚杰和美国心理学家布鲁纳都认为数学能促进儿童认知能力的发展,也就是说人的智力水平的高低与数学能力有明显的关系。我们的研究表明,幼儿年龄越小,幼儿数学能力与幼儿智力水平的相关性越大,亦即年龄越小的幼儿如果他的数学能力水平越高,那么他的智力水平也就越高,数学能力会促进幼儿整个智力水平的快速发展。

人的数学能力虽然有其一定的遗传素质的影响(天生的数学天才仅占人口的万分之一),但主要还是后天教育、训练的结果,几乎国内外所有的数学家无不是受到好的教育和以后自己

勤奋努力的结果。

计算能力是人类数学能力中的基础能力,而心算能力则代表着计算能力的最高水平。

一般的人如果没有经过长期专门训练,心算能力是较低级的,只能进行很简单的心算,如百以内、千以内的加减法,百以内的乘、除法,并且计算速度较慢,准确性也差。而经过科学训练的心算能力强的人却可以进行千以内、万以内的乘除法,甚至可以进行多位数的乘方、开方等心算。

数学能力并非是一种孤立发展的能力,它与人的许多能力有密切的关系。在幼儿期尤其与幼儿的思维能力、语言能力以及幼儿接受处理信息的能力有直接的关系。人的数学能力是多方面的,下面简单介绍数学能力的组成部分,以供家长教育幼儿时参考:

如: (1) 使数学材料形式化的能力,即从内容中抽象出形式,从具体的数量和空间形式中进行抽象,运用关系和联系的结构进行运算。

(2) 概括数学材料的能力,即能从不相关的材料中发现最重要的东西,以及从外表不同的材料中看出共同点的能力。

(3) 运用数字和其他符号进行运算的能力。

(4) 连续而有节奏的逻辑推理能力。

(5) 缩短、简化推理过程的能力。

(6) 逆转心理过程的能力,即从正方向思维转到逆方向思维的能力。

(7) 灵活而敏捷的思维能力。

(8) 数字记忆的能力。

(9) 空间概念的能力。

(10) 求证的能力。

(11) 独立掌握数据的能力。

[在幼儿期(一般指3至7.8岁),幼儿的数学能力发展水平还

较低,掌握的数学知识也很有限,这主要表现为以下的特征:

第一,幼儿的思维以具体和形象为主。这主要是指幼儿的思维是一种具体形象思维,离不开具体事物或其表象。例如问幼儿:“树上有6只鸟,飞走3只还有几只?”很多幼儿就无法说出结果;而如果让幼儿看一幅图,图上画着树上有6只鸟飞走了3只,这样幼儿就能马上说出:“树上还有3只鸟。”又如我们对幼儿说:“4加上3等于多少?”幼儿可能会感到困难,而如果给幼儿一些小木棒,幼儿就会很快地正确计算出来了。

第二,幼儿掌握的概念不稳定。在幼儿阶段,由于幼儿对语义的理解水平较低,加上抽象逻辑思维水平正处于萌芽阶段,因此,他们掌握的概念往往是不稳定的,容易受事物外部特征的影响。例如,等量的沙子放在两个相同的杯子里,幼儿会明白两个杯子里的沙子一样多。如果把一个杯子里的沙子倒在地上,由于沙子平铺在地上,幼儿就会说:“杯子里的沙子比地上的多。”又如拿两根一样长的木棒展示给幼儿,幼儿能判断它们同样长,但如果把一根木棒截成三段然后问幼儿:“把三段接起来与另外一根木棒哪个长?”幼儿会回答:“没有截断的那一根长。”

第三,幼儿接受信息的量有限。在幼儿阶段,幼儿在一定时间里,所能接受的信息的量是很有限的,大约只有成人的十分之一至五分之一,这主要与幼儿的记忆能力与意义联系能力较差有关。例如,我们给幼儿讲故事如果故事只涉及到1、2个观念、法则,幼儿可能很快理解掌握。而如果超过3、4个观念,幼儿就无法掌握,甚至一个也掌握不好。

第四,幼儿短小时内处理大量信息的能力较差。幼儿也许可以连续一个小时注意力集中地看动画片,但是很难连续10分钟集中注意力解数学题。幼儿在短小时内处理大量信息的能力是很有限的,这对他们的知识的理解和能力的发展起了很大的阻

碍作用。例如，一个幼儿可以一分钟解3道数学题，但如果让他连续10分钟解数学题，就只能解15道左右。研究发现如果一个幼儿在短时间处理信息的量提高了，对于他的整个智力的发展有极好的推动作用。

第五，幼儿抽象逻辑思维能力开始萌芽。幼儿由于大脑发育和生活经验的局限，对事物外部的认识较强，而对事物本质的认识很有限。但是到了幼儿中期（4至5岁左右）和晚期（5至6岁左右），幼儿的抽象逻辑思维开始萌芽，抽象概括能力也开始逐渐形成，这些都为幼儿数学能力的快速发展打下了基础。）

（国内外的研究表明，虽然幼儿期幼儿思维能力刚萌芽，尚未得到理想的发展，但已经为幼儿的数学能力的发展打下了较好的基础，为幼儿数学能力的发展作出了理解与运用上的准备。而且重要的是，如果这一时期幼儿的数学能力得到训练，数学知识的理解和掌握会反过来促进幼儿抽象思维能力的发展和提高，两者相辅相成协调发展，并为幼儿全面智力发展提供优势条件。

我们知道人的各种能力的发展都有其关键期，幼儿的数学能力发展有两个关键期，一个是2岁半左右，是人的计算能力发展的关键期；^①另一个在5岁左右，是幼儿掌握数学概念，进行抽象运算，以及综合数学能力开始形成的关键期。在这个时期尽管幼儿数学能力的水平较低，但许多幼儿的潜在数学素质已能观察到，正是进行系统训练开发的最佳时期。而一旦错过关键期，则需花费极大气力也许仍难以补偿。

为此，我们针对5岁左右幼儿掌握数学概念、进行抽象运算的关键期，为4岁至8岁的幼儿创造设计了以心算训练和数学概念掌握为核心的“幼儿数学抽象诱导综合训练法”（YW

^① 参见《零岁开始的数学能力教育》，殷红博著。

训练法)。经过几千人次的多年实验得到了明显效果,对幼儿数学能力的发展有深远的意义。

① YW 训练能有效提高幼儿计算速度和正确性,从而全面发展幼儿的综合计算能力

衡量计算能力的标准有两个:一个是计算速度,另一个是正确性。在进行 YW 训练时,要求幼儿在极短的时间里对听到的算式进行心算并快速说出答案,这就要求幼儿必须具备对数字和语言快速反应的能力,即快速反应算式、快速进行计算、快速说出答案。这种快速的思维活动,经过一段时间的训练,逐渐被大脑巩固下来,形成快速系列反应的条件反射,这种条件反射一旦形成,幼儿的计算速度就明显提高了。我们曾进行过对比实验,训练一组幼儿用笔算的方法进行速算,另一组幼儿用 YW 训练的方法进行速算。结果发现,在训练刚开始的阶段,笔算的一组计算速度不仅快些,而且正确率高。但一个月后,进行 YW 训练的一组计算速度逐渐提高,在两三个月后,进行 YW 训练的一组加减法计算速度与正确率比笔算的一组高 1.5 倍左右,而乘除法计算速度与正确率提高了 2.5~3 倍。

② YW 训练能有效训练幼儿在计算中摆脱对实物和形象的依赖,顺利过渡到抽象运算水平

幼儿刚开始加、减法计算时利用实物帮助理解题意是必要的,但是一旦利用实物掌握了加、减法的意义与运算法则,就应立即摆脱实物,只有这样才能进一步促进计算能力和综合数学思维的发展,否则将对幼儿数学能力发展产生阻碍作用。一

些儿童甚至到了二年级仍需要借助实物来帮助计算，这样的儿童的计算能力是低水平的，若不及时纠正，那么他们的综合计算能力就难正常发展，从而影响他们综合数学能力的发展，影响对数概念的理解。另外有些一、二年级的儿童虽然经过一段时间的学习，已经摆脱实物和利用手指进行计算，但仍无法摆脱对数字形象的依赖，即不见到具体的算式就很难进行计算。如见到“ $5+6=$ ”的算式，他们能较顺利地算出答案“11”，但如果只是听到家长问“5 加上 6 等于多少”，他们仍无法进行计算。这种对数字形象的依赖，对于他们数学能力的进一步发展是有害的。而进行 YW 训练不但能使幼儿尽早摆脱实物与形象的依赖，而且也能尽快摆脱对数字形象的依赖，是训练幼儿抽象运算能力的最好方法。我们的实验发现，经过短时间的训练，原来依赖于实物和形象进行计算的儿童都摆脱了实物和形象的羁绊，不仅提高了计算速度和计算正确率，而且也增强了对数学知识的兴趣，同时也增强了学习数学的自信心。

③ YW 训练能有效促进幼儿对各种计算的意义和法则的理解、掌握

我们研究发现进行 YW 训练，能有效促进幼儿理解加、减法和乘、除法的意义。例如，训练前幼儿对于大数字加上小数字的计算速度比小数字加上大数字的计算速度快 40%。如计算“ $18+3$ ”要比计算“ $3+18$ ”速度快。而经过 YW 训练一两个月后，幼儿计算上述两种类型的计算题的速度和正确率几乎相同了。另外众所周知，一般几乎所有人进行加法计算的速度都比进行减法计算速度快而正确，这主要是决定于人早期对数字的学习习惯和运算经验，但在学习中对幼儿的心理产生了负面的影响。许多幼儿，甚至一、二年级的小学生害怕进行减

法训练，这种学习心理的负面效应对幼儿整个的学习心理产生不良的影响。我们的对比研究证明，幼儿经过3个月左右的YW训练，其减法计算速度和正确率已接近加法计算，为加法计算的95%。而没有经过YW训练的幼儿减法计算速度和正确率仅有加法的70%左右。

另外，YW训练还能有效地促进幼儿理解掌握各种运算的运算法则。我们通过实验研究发现：

(1) 经过YW训练的幼儿掌握加法的交换率达到100%，而没有经过YW训练的只有45%左右。

(2) 经过YW训练后，幼儿掌握加法中两加数与和之间的关系并能举一反三自觉运用的达到100%，而没有经过YW训练的幼儿只有40%左右的能掌握。（加数与和之间的关系即和减去任一个加数之差等于另一个加数。）

(3) 经过YW训练的幼儿掌握减法中减数、被减数和差之间的关系达到100%，而没有经过训练的幼儿只有35%左右能掌握。（减数、被减数和差之间的关系为，被减数等于减数与差之和。被减数减去差等于减数。）

(4) 经过YW训练的幼儿掌握乘法意义并能自如运用的达到100%，而没有经过训练的幼儿只能掌握30%左右。（乘法的意义即积等于被乘数个乘数之和。）

(5) 经过YW训练的幼儿掌握乘法与除法互为逆运算关系并能正确运用的达到100%，而没有经过训练的只有25%左右能掌握。（乘法与除法互为逆运算关系为，乘法中积除以一个乘数所得商等于另一个乘数；除法中的商乘以除数等于被除数。）

④ YW训练能有效提高幼儿数字记忆能力

人类能够识记各种记忆材料，如语言、数字、形象、运动

等，但人类识记各种材料的难易程度是不一样的。其中数字是最难记忆的，其次是语言（口头语言比书面语言难记忆）。数字之所以难以记忆，并不是因为它字形复杂难以记忆，而在于它的字义的抽象性。我们曾做过以下的测验，让一年级的学生用相同的时间记忆三组材料，第一组材料为 12 个两位数，第二组材料为学生所熟悉的 12 个汉字，第三组材料为 12 张物品图片。测验的结果是，12 个数字平均记住了 4.8 个，12 个汉字平均记住了 6.9 个，12 张图片平均记住了 8.1 个。在幼儿园的大班我们也做过类似的测验，测验的结果是，12 个数字平均记住 2.6 个，12 个汉字平均记住 3.8 个，12 张图片平均记住 5.1 个。

YW 训练能够有效地训练幼儿数字记忆能力，因为在训练时，幼儿常常在无法看到而只能听到算式的情况下计算，所以他们必须凭借记忆，一边把数字记住，一边进行计算，这样难度是较大的。在这一系列的思考运算活动中，就达到了训练幼儿数字记忆的目的。经过两个月左右 YW 训练，幼儿数字记忆能力显著提高。（当然，幼儿综合记忆能力也随之而提高，这将在下节中详谈。）幼儿园中大班的幼儿数字记忆能力平均提高 2.2 倍以上，小学一年级学生则平均提高 1.5 倍以上，二年级学生则平均提高 80% 以上。

⑤ YW 训练能有效发展幼儿解题思路的灵活性

培养幼儿的数学思维能力除了发展幼儿的抽象逻辑思维能力外，最重要的就是发展幼儿思维的灵活性。我们研究发现，经过 YW 训练后，幼儿的解题思路的灵活性显著提高，超过同龄人 60% 以上。他们常常表现为对于任何一道题都不是马上就着手解答，而是首先想一下是否有最快的解答方法，尤其对于一些数字较多难度较大的题，他们更是快速思考，争取找到