科学出版社普通高等教育规划教材 十一五

普通高等教育"十一五"规划教材

# 高等数学（上册）


朱永忠 主 编

郑苏娟 蒋国民 余维虹 钮 群 副主编

郁大刚 丁莲珍 胡庆云 李朝晖 编



科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

# 高等数学

## （上册）

朱永忠　主编
郑苏娟　蒋国民　余维虹　钮　群　副主编
郁大刚　丁莲珍　胡庆云　李朝晖　编

科学出版社
北　京

# 内 容 简 介

本书是编者在教育大众化的新形势下，根据多年的教学经验，并结合“高等数学课程教学基本要求”而编写的.

全书分上、下两册.上册内容分为三篇：第一篇为一元函数微分学，包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用；第二篇为一元函数积分学，包括不定积分，定积分，定积分的应用；第三篇为空间解析几何初步，包括向量代数与空间解析几何初步.每节后附有习题，每章后附有总习题及与本章教学相关的数学实验介绍，总习题中包含了近几年与本章内容有关的考研真题.上册书末还附有几种常用的曲线和 Mathematica 简介.编写力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

本书可供高等院校工科类各专业的学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学.上册/朱永忠主编.—北京：科学出版社，2008
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-021921-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 100512 号

责任编辑：昌　盛　李晓鹏 / 责任校对：陈丽珠
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 8 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2008 年 8 月第一次印刷　印张：20
印数：1—8 000　字数：377 000

**定价：28.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉)

# 前　言

本书是在教育大众化的新形势下，根据工科本科高等数学的教学基本要求、结合国家质量工程全面提高本科生素质教育的指导思想，在河海大学多年教学经验的基础上编写而成的.

全书分上、下两册. 共包括七部分内容：第一篇一元函数微分学：函数、极限与连续；导数与微分；微分中值定理与导数的应用；第二篇一元函数积分学：不定积分；定积分；定积分的应用；第三篇空间解析几何初步：向量代数与空间解析几何初步；第四篇多元函数微分学；第五篇多元函数积分学：重积分；曲线积分；曲面积分；第六篇无穷级数：数项级数；幂级数；傅里叶级数；第七篇常微分方程初步：一阶微分方程；二阶线性微分方程. 上册包括前面三篇内容，下册包括后面四篇内容. 每节后附有习题，每章后附有总习题及与本章教学相关的数学实验介绍，总习题中包含了近几年与本章内容有关的考研真题. 上册书末还附有 Mathematica 简介.

全书编写注重培养学生分析问题和解决问题的能力、自学能力、逻辑推理能力以及数学的基本应用能力，力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

参加本教材上册编写的有河海大学大学数学部朱永忠、郑苏娟、钮群、郁大刚、丁莲珍、胡庆云，河海大学常州校区数理部余维虹、李朝晖和淮阴工学院蒋国民老师，全书最后由朱永忠老师定稿.

由于编者的水平有限，本教材中一定存在不妥之处，恳请广大专家和读者批评指正.

编　者

2008 年 5 月

# 目　　录

## 第一篇　一元函数微分学

# 第二篇 一元函数积分学

# 第三篇 空间解析几何初步

# 第一篇　一元函数微分学

# 第 1 章　函数、极限与连续

高等数学是一门研究变量的数学，广泛应用于自然科学与社会科学的许多领域. 函数是变量关系的数学描述，极限方法是研究变量的基本方法. 自然界中许多自然现象在数量关系上都具有连续性，连续函数是一类最基本最常见的函数，是高等数学研究的主要对象. 因此，函数、极限与函数的连续性是高等数学的基础. 本章将介绍这些基本概念以及它们的一些主要性质.

## 1.1　函　　数

### 1.1.1　集合、区间及邻域

1. 集合

在数学中，常把具有某种特定性质的总体称为一个**集合**. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 集合通常用大写字母表示，如 $A,B,\cdots$，集合的元素通常用小写字母表示，如 $a,b,\cdots$. 设 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ **属于** $A$，记作 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ **不属于** $A$，记作 $a\notin A$. 今后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，今后所提到的数都是实数. 例如，把全体实数集合记作 $\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}_+$，即 $\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$. 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$. 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}\text{ 且 }q\neq0,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$.

如果集合 $A$ 的每一个元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，或者称 $A$ **包含于** $B$，或 $B$ **包含** $A$，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\Phi$. 例如，集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$ 就是一个空集.

如果集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 $A$ 与 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

2. 区间

区间是用得较多的数集，数集$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**，记作$(a,b)$，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

$a$ 和 $b$ 称为区间的端点，它们均不属于$(a,b)$.

类似地可定义以 $a,b$ 为端点的闭区间，半开半闭区间.

**闭区间**

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

**半开半闭区间**

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

上述以 $a,b$ 为端点的区间都叫做**有限区间**，它们的长度都是 $b-a$. 此外还有**无穷区间**，如$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$.

类似地有$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，特别$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}=\{x|x$ 是实数$\}$.

区间是实数集合 $\mathbf{R}$ 的一部分，在几何上可以用实数轴上的点来表示. 例如，区间$[a,b]$，$(a,b)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$分别如图 1.1(a)，(b)，(c)，(d)所示.

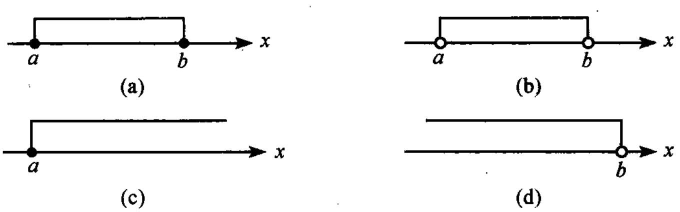


图 1.1

3. 邻域

邻域也是一种常用的集合. 设 $x_0$ 与 $\delta$ 是两个实数且 $\delta>0$，称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 $x_0$ 的 $\delta$ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

点 $x_0$ 称为该邻域的**中心**，$\delta$ 为该邻域的**半径**(图 1.2).

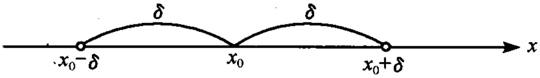


图 1.2

显然,邻域$U(x_0,\delta)$内的任何点$x$到点$x_0$的距离都小于$\delta$,可用$|x-x_0|<\delta$表示.当$\delta$越小时$x$与点$x_0$就越接近,因此$U(x_0,\delta)$表示与点$x_0$的距离小于$\delta$的一切点的全体,该邻域又可记作

$$U(x_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, |x-x_0|<\delta\right\}.$$

如果把邻域的中心去掉,所得到集合称为点$x_0$的**去心$\delta$邻域**,记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-x_0|<\delta\right\}.$$

为了方便,有时把开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点$x_0$的左$\delta$邻域,把开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为点$x_0$的右$\delta$邻域.

### 1.1.2 函数

#### 1. 函数概念

**定义1** 设$x$和$y$是两个变量,$D$是一个给定的数集.如果对于每一个数$x\in D$,变量$y$按照一定的法则总有确定的值和它对应,则称$y$是$x$的**函数**,记作$y=f(x)$.数集$D$叫做函数的**定义域**,$x$叫做**自变量**,$y$叫做**因变量**.

当$x$取数值$x_0\in D$时,与$x_0$对应的$y$的数值称为函数$y=f(x)$在$x_0$处的函数值,记作$f(x_0)$.当$x$取遍$D$的每一个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

在几何上,点集$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$就称为函数$y=f(x)$的**图形**(或**图像**).通常也把函数$y=f(x)$的图形叫做曲线$y=f(x)$.

函数$y=f(x)$中表示对应关系的记号$f$也可改用其他字母,如“$g$”,“$F$”,“$\varphi$”等.如果在同一个问题中,讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.例如,自由落体运动中,设物体下落的时间为$t$,下落的距离为$s$.如果开始下落的时刻是$t=0$,从高度为$H$处作自由下落,那么$s$与时间$t$之间的对应关系是$s=\frac{1}{2}gt^2$,$t$的取值范围应是$\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$,即这个实际问题的函数的定义域为$\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用数学式子表达的函

数，这时约定函数的定义域就是使得数学式子有意义的一切实数组成的集合，称为函数的**自然定义域**. 例如，$f(x)=\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$，$f(x)=\frac{1}{1-x}$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

定义的函数 $y=f(x)$，如果在确定的对应法则下，对于定义域内的每个 $x$，只有唯一的一个 $y$ 值与之对应，这种函数称为**单值函数**. 如果对应的 $y$ 值多于一个，则称这样的函数为**多值函数**. 例如，方程 $x^2+y^2=a^2$，如果将满足这个方程的 $x$ 与 $y$ 之间的关系作为对应法则，那么当 $x=\pm a$ 时，对应 $y=0$ 一个值，但当 $x$ 取开区间$(-a,a)$内任一个值时，对应的 $y$ 有两个值，这样的函数称为多值函数，并把 $y_1(x)=\sqrt{a^2-x^2}$和 $y_2(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$称为这个多值函数的两个**单值分支**.

以后凡是没有特别说明时，函数都指单值函数.

最后再次强调，在函数关系中起决定作用的是定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 这两个基本要素，两个函数是否相等(即为同一个函数)，取决于函数的这两个要素是否完全相同. 例如，函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$与 $g(x)=x$ 就是两个不同的函数，这是因为它们的对应法则不同，因而值域也就不同.

下面举几个函数的例子.

**例 1**　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0\end{cases}$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,+\infty)$，它的图形如图 1.3 所示.

**例 2**　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.4 所示.

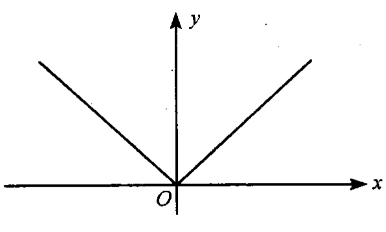


图 1.3

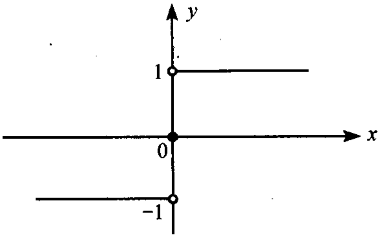


图 1.4

对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$或$|x|=x\operatorname{sgn}x$.

**例 3**　取整函数.

对任意的 $x\in\mathbf{R}$，用记号$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数，从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=[x]$，称此函数为**取整函数**，$[x]$称为 $x$ 的**整数部分**.

例如，$\left[\frac{1}{2}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[2]=2$，$[-3.9]=-4$.

$y=[x]$的定义域是 **R**，值域是 **Z**，它的图形如图 1.5 所示. 取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,\quad x\in[n,n+1),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

取整函数 $y=[x]$ 具有下列性质：

对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $x-1<[x]\leqslant x$ 或 $[x]\leqslant x<[x]+1$.

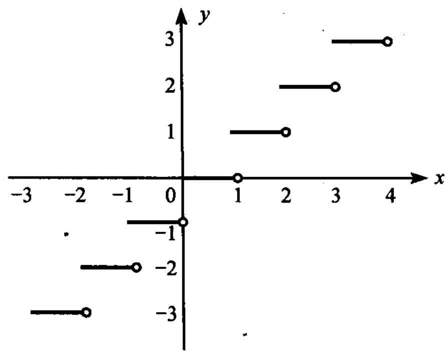


图 1.5

从上面的例子中可以看到，有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的式子来表示，这样的函数称为**分段函数**.

**例 4** 函数 $y=f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是一个分段函数，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，对应的函数值 $f(x)=2x+1$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时对应的函数值 $f(x)=\sqrt{x}$. 这个函数的图形如图 1.6 所示.

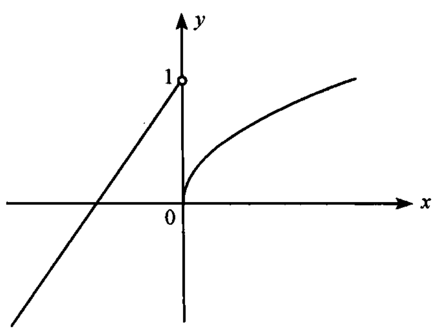


图 1.6

分段函数在科学技术和日常生活的实际应用中也是经常会遇到的，下面举例说明.

**例 5** 根据国家规定，个人月收入 $x$ 不足 1600 元不纳税，超过 1600 元而小于 2100 元的部分按 5% 纳税，超过 2100 元而小于 3600 元的部分按 10% 纳税，则个人月收入 $x$ 与缴纳所得税 $y$ 的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1600,\\ (x-1600)\dfrac{5}{100}, & 1600<x\leqslant 2100,\\ 25+(x-2100)\dfrac{10}{100}, & 2100<x\leqslant 3600.\end{cases}$$

## 2. 函数的几种特性

**有界性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 $M$，使得对任一 $x\in X$，都满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**.

如果这样的 $M$ 不存在，就称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**. 换言之，如果对任意给定的一个正数 $M$（不论多大），总有某个 $x\in X$，使得 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**.