

教育部高校学生司推荐

高教 2005 年版

全国各类成人高考复习考试辅导教材

■ 专科起点升本科 ■

高等数学 (一)

第 3 版

本书编写组



高等教育出版社

013
411

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(一)

第3版

本书编写组

高等教育出版社

810
1514

高等教育出版社

全国各类成人高考复习考试辅导教材

数学(一)

(一) 高等数学

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习考试辅导教材.(专科起点升本科)

高等数学(一)/本书编写组编.—3版.—北京:高等教育出版社,2005.1

ISBN 7-04-016249-0

I. 全... II. 本... III. 高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 129672 号

策划编辑 汤 悦 责任编辑 肖子东 封面设计 刘晓翔 责任绘图 尹 莉
版式设计 马静如 责任校对 金 辉 责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581115~58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京乾沣印刷有限公司		
开 本	850×1168 1/16	版 次	2000 年 9 月第 1 版
印 张	14.25		2004 年 12 月第 3 版
字 数	430 000	印 次	2005 年 1 月第 1 次印刷
		定 价	21.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:16249-00

出版前言

2004年,教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》.新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容,共编为5册,由高等教育出版社出版.

为了满足广大考生复习备考的需求,我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授,以及前大纲编写修订和考试命题研究人员,及时修订了与考纲配套的系列复习考试辅导教材.

本系列辅导教材依据2004年教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》的要求而编写,包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《艺术概论》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《生态学基础》、《医学综合》共10册.

本系列辅导教材融复习内容与考试内容于一体,不仅有助于考生复习并掌握扎实的基础知识,而且有利于考生把握考试的重点、难点,提高应试能力.其内容的编排与“大纲”的知识系统完全一致,不仅充分体现了“大纲”的知识能力要求,而且注重贴近考试实际,收录了大量的应用性和能力型练习题并附有解题指导和参考答案,使考生在整个学习进程中能够做到“学练结合”,及时检验复习效果,增强应考适应力和信心.

本套教材的编写,融入了诸多专家、命题研究人员和一线教师的心血;凝结着“从知识立意向能力立意转化”等现代教育思想的精华;体现了我们出版工作者在考试用书编写方面的整体策划思想.

由于编写时间仓促,书中难免还存在这样那样的不足或错误.为了不断改进和完善本系列教材,使之能更适合广大读者的要求,为考生提高复习备考能力和水平发挥更大作用,我们恳切希望各界人士提出批评指正意见.

高等教育出版社

2005年1月

编者的话

成人高等教育事业近年来得到迅速发展,尤其是专科起点本科班的发展更为显著.为了适应教育事业发展的要求,为成人高等教育事业的发展作贡献,尽最大可能给成人考生以有益的帮助,使其能适应形势变化,高等教育出版社组织编写了《全国各类成人高考复习考试辅导教材(专科起点升本科)》.

为了能为读者提供一本优秀的考试辅导书,本书编写人员认真研究了2004年版《考试大纲》,在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则:

1. 严格按照2004年版《考试大纲》规定的考试内容和考试要求编写.

2. 针对成人考生的特点,针对考试命题的基本原则而编写.针对考试命题的基本原则体现在本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容.避开复杂的运算与特殊的技巧性运算.针对成人考生的特点体现在突出基本概念的要害、基本性质的特点及基本计算方法的条理化.强调概念或公式的结构形式.书中选配大量的例题,以有助于读者达到理解掌握.在每个例题中加以分析讲解,侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法.有些例题的后面还给出一些说明,在说明中指出读者应该注意的问题或一些带有共性的问题特点,意在引导读者自学并提高效率.例题中包含了自1994年至2004年全国专升本考试高等数学(一)的试题,以有利于考生了解试题的广度与深度.例题包含了《考试大纲》中所规定的常见的基本题型.在以试题为例题的题中给出编号注明,如(9804)表示1998年试题中的第4题,(0021)表示2000年试题中第21题,这使读者能明确该题所出现的年份与该题在该年试卷中出现的位置.

为了加大例题的信息量,我们在选择题中给出了多选题,目的是训练考生对每个选项加以分析,以增强训练力度.在此需指出入学考试中的选择题都为单选题.如果考试中你能认定某个选项符合题目要求,其余的选项可不再讨论.

在每章中都给出小结,指出本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型.

在每节后选有同步练习题,并在各章后附以参考解答.

高等教育出版社考试用书分社对本书的出版做了大量的工作,作者表示诚挚谢意.

本书编写组

2004年11月

目 录

第一章 极限、连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限	3
同步练习一及参考解答	16
第三节 连续	18
同步练习二及参考解答	22
小结	24
第二章 一元函数微分学	26
第一节 导数	26
同步练习一及参考解答	36
第二节 微分	39
同步练习二及参考解答	42
第三节 微分中值定理	43
同步练习三及参考解答	45
第四节 洛必达法则	46
同步练习四及参考解答	51
第五节 导数的应用	53
同步练习五及参考解答	67
小结	70
第三章 一元函数积分学	73
第一节 不定积分	73
同步练习一及参考解答	83
第二节 定积分	86
同步练习二及参考解答	98
第三节 定积分的应用	103
同步练习三及参考解答	108
小结	109
第四章 向量代数与空间解析几何	111
第一节 向量代数	111
同步练习一及参考解答	115
第二节 平面与直线	116
同步练习二及参考解答	124
第三节 简单的二次曲面	126
同步练习三及参考解答	128
小结	129
第五章 多元函数微积分学	131
第一节 多元函数、极限与连续性	131
同步练习一及参考解答	132

第二节 偏导数与全微分	133
同步练习二及参考解答	145
第三节 二元函数的极值	148
同步练习三及参考解答	150
第四节 二重积分的概念与性质	150
同步练习四及参考解答	151
第五节 直角坐标系下计算二重积分	152
同步练习五及参考解答	160
第六节 极坐标系下计算二重积分	163
同步练习六及参考解答	167
第七节 二重积分的应用	167
同步练习七及参考解答	169
小结	170
第六章 无穷级数	173
第一节 无穷级数的概念与性质	173
同步练习一及参考解答	175
第二节 正项级数	175
同步练习二及参考解答	180
第三节 任意项级数	181
同步练习三及参考解答	184
第四节 幂级数	184
同步练习四及参考解答	188
第五节 将初等函数展开为幂级数	189
同步练习五及参考解答	193
小结	194
第七章 常微分方程	196
第一节 一阶微分方程	196
同步练习一及参考解答	203
第二节 可降阶的微分方程	204
同步练习二及参考解答	206
第三节 线性常系数微分方程	207
同步练习三及参考解答	212
小结	213
附录 2004 年全国各类成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)试题及参考答案	215

第一章 极限、连续

第一节 函数

2004 年教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科 高等数学(一)》考试大纲中的一个重要变化是去掉了函数的概念与性质的相关内容. 这意味着函数的相关内容不再单独命题. 但是极限、连续、导函数等部分还要研究函数的性质, 如单调性、有界性等. 为了便于读者复习, 本节只对函数的概念、基本性质进行简单复习, 不再讨论其相关练习题.

一、函数的定义

若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值, 变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应, 则称 y 为 x 的函数. 记为 $y = f(x)$.

常称 x 为自变量, y 为函数. 称使函数有定义的点的全体为函数的定义域.

由函数定义可以看出, 其关键特征是:

x 的允许范围, 即函数的定义域;

对应规则, 即函数的依赖规则.

因此说函数概念有两个基本要素为: 定义域, 对应规则(或称依赖关系).

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 才认为它们是同一个函数.

二、函数常用的三种表示方法

解析法, 如 $y = f(x)$; 图像法; 表格法.

三、函数解析表示法中常见的几种形式

1. 由一个解析式表示, 如 $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$.

2. 分段函数 如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的, 则称之为分段函数.

如

$$y = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 & 0 < x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数, 而是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的一个函数, 它是由三个解析式来表达.

3. 隐函数 如果函数的对应规则是由方程 $F(x, y) = 0$ 给出, 则称 y 为 x 的隐函数.

如由方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x = 1$ 确定的函数 $y = y(x)$ 为隐函数.

相对于隐函数来说, 人们称由解析表达式 $y = f(x)$ 确定的函数为显函数.

4. 参数方程表示的函数 如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来, 如

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

四、函数符号的运用

函数符号的运用问题可分为两类:

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式, 求函数 $f[g(x)]$ 的表达式.

这类问题相当于已知函数 $y = f(u)$ 及函数 $u = g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$.

2. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式, 求 $f(x)$ 的表达式.

这类问题的求解方法有两种:

- (1) 令 $u = g(x)$, 从中反解出 $x = \varphi(u)$, 求出 $f(u)$ 的表达式, 再将 u 换为 x , 即得 $f(x)$ 的表达式.
- (2) 将 $f[g(x)]$ 的表达式凑成 $g(x)$ 的函数关系式. 然后将所有 $g(x)$ 的位置换为 x , 则得 $f(x)$.

五、函数的性质

1. 单调性 设 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, 如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在该区间内单调增加.

如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在该区间内单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调.

上述区间可以为有限区间, 也可以为无穷区间; 可以为开区间, 也可以为闭区间.

如果没有指明区间, 而是说“ $f(x)$ 为单调函数”, 总应理解为 $f(x)$ 在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y = f(x)$ 单调性的方法:

(1) **依定义判定** 在给定的区间内任取两点 $x_1 < x_2$, 比较 $f(x_2)$ 与 $f(x_1)$. 如果总有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调增加; 如果总有 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

(2) **依导数的符号判定** 如果在某区间内总有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调增加; 如果在某区间内总有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

通常都采取第二种方法判定.

2. 奇偶性 设 $y = f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则有 $-x \in D$), 如果对于 D 内任意的点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数, 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为该区间内的奇函数.

上述区间可以为有限区间 $[-a, a]$ 或 $(-a, a)$, 也可以为 $(-\infty, +\infty)$.

判定函数奇偶性的方法一般是利用定义.

奇、偶函数的图像有如下特点:

奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称.

性质 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数; 两个奇(偶)函数之积必为偶函数; 奇函数与偶函数之积必为奇函数.

也可以利用上述性质判定函数的奇偶性.

3. 周期性 若存在 $T > 0$, 对于任意的 x , 恒有 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数, 使得上述关系式成立的最小正数 T , 称为 $f(x)$ 的最小周期, 简称为函数 $f(x)$ 的周期.

需指出并不是每个周期函数都有周期.

4. 有界性 设 $y = f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M > 0$, 对于该区间内任意的 x , 恒有 $|f(x)| < M$, 则称 $f(x)$ 在该区间内为有界函数.

上述区间可以为有限区间, 也可以为无穷区间; 可以为开区间, 也可以为闭区间.

如果没有指明区间, 而是说“ $f(x)$ 为有界函数”, 总应理解为 $f(x)$ 在其定义区间内为有界函数.

六、初等函数

1. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_x , 值域为 D_y . 若对 D_y 中的每一个值 y , 通过关系 $y = f(x)$, 有值 x 与之对应, 这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x = \varphi(y)$, 常称 $x = \varphi(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

相对于反函数 $x = \varphi(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

在研究函数时, 往往习惯于将 x 作为自变量, 将 y 作为因变量. 因此习惯上总把 $x = \varphi(y)$ 中的 y 换成 x , 将 x 换为 y , 从而得到 $y = \varphi(x)$. 通常情况下, $y = f(x)$ 的反函数都是指 $y = \varphi(x)$, 或记作 $f^{-1}(x)$.

反函数的图形的特点 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = \varphi(x)$ 这两条曲线在 xOy 坐标平面上关于直线

$y=x$ 对称.

需指出,不是每一个函数都存在反函数.如函数 $y=C$ 不存在反函数.

2. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为实数).

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$).

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$).

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

上述五类函数的定义域、单调性需记熟.

定义 上述五类函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

3. 复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$, 变量 u 是变量 x 的函数 $u=g(x)$.

定义 若对于 x 在某范围中的每一个确定的值,依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应,而对于 u 的此确定值, y 按确定的规则有值与之对应,则称 y 为 x 的复合函数.

若 $y=f(u), u=g(x)$, 则常记为 $y=f[g(x)]$. 称 x 为自变量, u 为中间变量, y 为函数.

需指出,并不是任何两个函数 $y=f(u), u=g(x)$ 都能复合成 x 的函数.例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$. 可以看出,不论 x 取什么值,相应的 u 总有不小于 2 的值存在.但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leq 1$, 因此可知 $\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的.换言之, $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的,并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

第二节 极 限

一、极限的概念与性质

1. 数列的极限

一列按一定顺序排列的数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 称为数列, 常记为 $\{x_n\}$.

若 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调(增加)上升数列.

若 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调(减少)下降数列.

单调上升数列与单调下降数列统称为单调数列.

若存在 $M>0$, 对任意的 n , 恒有 $|x_n| \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列.

在数列 $\{x_n\}$ 中, 如果自前向后任意取无穷多个项, 依次排列, 可以得到新数列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, 则称数列 $\{x_{n_k}\}$ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个子列.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果随着项数 n 的无限增大, 数列中的项 x_n 在变化过程中将与某常数 A 无限接近, 则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则称 $\{x_n\}$ 为收敛的, 否则称其为发散的.

收敛数列具有以下性质:

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值必定唯一;

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必为有界数列. 反之不真.

若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则数列 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 也必定收敛于 A .

此性质有两个主要应用:

(1) 判定数列 $\{x_n\}$ 发散. 如果存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A , 而 $\{x_{m_j}\}$ 收敛于 B , 且 $A \neq B$, 则可知 $\{x_n\}$ 必定发散.

如数列 $1, 0, 1, 0, \dots$ 中含有子列 $1, 1, \dots, 1, \dots$, 收敛于 1 . 同时有子列 $0, 0, \dots, 0, \dots$, 收敛于 0 . 因此可以断定数列 $1, 0, 1, 0, \dots$ 发散.

(2) 欲求数列 $\{x_n\}$ 的极限, 有时可以将其认作是某些数列的子列. 如果能判定后者收敛, 则可得知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 函数的极限

(1) $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限

如果 x 无限远离原点时, $f(x)$ 能与某常数 A 无限接近, 则称当 x 趋于无穷时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

如果 x 沿数轴正向无限远离原点时, 称 x 趋于正无穷, 记为 $x \rightarrow +\infty$.

如果 x 沿数轴负向无限远离原点时, 称 x 趋于负无穷, 记为 $x \rightarrow -\infty$.

由函数极限的定义可以得出, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

(2) $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限

若当 x 无限接近 x_0 时, 函数 $y = f(x)$ 无限接近常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

当 x 在数轴上从 x_0 的左侧无限接近 x_0 时, 即 $x < x_0$, 且 $x \rightarrow x_0$. 常记为 $x \rightarrow x_0^-$ 或 $x \rightarrow x_0 - 0$.

当 x 在数轴上从 x_0 的右侧无限接近 x_0 时, 即 $x > x_0$, 且 $x \rightarrow x_0$, 常记为 $x \rightarrow x_0^+$ 或 $x \rightarrow x_0 + 0$.

相应地有:

给定函数 $y = f(x)$ 及常数 A , 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 的左极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

给定函数 $y = f(x)$ 及常数 A , 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 的右极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

3. 极限的性质

性质 1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则必定存在 x_0 的某邻域, 在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处, 恒有 $f(x) > 0$.

性质 2 若 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 $A \geq 0$.

性质 3 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限都存在, 且相等, 此时三者值相同.

左极限与右极限是考察自变量从某一确定方向趋于 x_0 时, 函数的变化趋势. 它的用途主要有两个方面:

(1) 研究自变量趋于区间的端点时, 函数的极限问题;

(2) 研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形, 考察在分段点处的极限问题.

对于上述情形(2), 由性质 3 可知

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但两者不相等, 或两者至少有一个不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定不存在.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 且相等时, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定存在, 且此时三者相等.

有必要强调指出, 极限描述了在给定过程下函数的变化性态, 而极限值表示一个确定的常数值. $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是否有极限, 与 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关.

二、极限的四则运算

性质 1 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) \pm g(x)]$ 必定存在, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A \pm B$$

性质 2 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = AB$$

推论 如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$, n 为自然数, 则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} [f(x)]^n = [\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)]^n = A^n$.

性质 3 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x)} = \frac{A}{B}$$

例 1 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的().

- A. 必要条件 B. 充分条件
C. 充要条件 D. 无关条件

分析 由极限的定义可以看出, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在与函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关. 因此应

选 D.

例 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则()

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都不存在
B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 都存在
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 之中的一个存在
D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$ 存在与否与 $f(x), g(x)$ 有关

分析 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$ 存在, 则由极限性质可知,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x) \pm g(x)] - f(x)\} = \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在, 这与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在相矛盾, 这表明应选 A.

三、极限存在准则与两个重要极限

准则 I (夹逼定理) 如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足下列条件:

- (1) $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n = 1, 2, \dots$),
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

上述准则可以推广到求函数的极限:

如果在 x_0 的某邻域内(或 $|x| > M$) 时, 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

成立; 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A$$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于 A .

($x \rightarrow \infty$)

准则 II 单调有界数列必有极限.

由上述两个准则可以得出两个重要极限公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

后面三个极限公式属于同一类型.

有必要强调, 读者应熟记两个重要极限的结构形式特点:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e; \quad \lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$$

只要符合上述结构形式的, 极限公式总成立. 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$;

等等.

例 3 (9401) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 mx}{x^2}$ (m 为常数) 等于 ().

A. 0 B. 1 C. m^2 D. $\frac{1}{m^2}$

分析 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 mx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin mx}{mx}\right)^3 m^3 x = 0$, 而知应选 A.

例 4 (0301) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ 等于 ().

A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

分析 利用重要极限公式可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} \\ &= e^{-2}. \end{aligned}$$

可知应选 D.

例 5 (0406) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ = _____.

分析 利用重要极限公式可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} = e.$$

例 6 (9602) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+d}$ 等于 ().

A. e B. e^b C. e^{ab} D. e^{ab+d}

分析 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx+d} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{ab} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^d = e^{ab}. \end{aligned}$$

可知应选 C.

将此结论当作公式使用,将能简化运算.相仿,可以得出 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}+c} = e^{ab}$.也可以将这个结论当作公式使用.

例 7 (9421) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}}$, 其中 m, n 为常数.

分析 由于上述“公式”,可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}} = e^{mn}.$$

例 8 (9816) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x$.

分析 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = e^{-1}.$$

例 9 (0016) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 可以将所求极限的函数式先变型,化为重要极限形式.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

例 10 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}}$.

分析 所给极限与重要极限形式相近,可考虑化为标准形式求之.

(1) 先变形化为标准形式.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

(3)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right]^{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}} \\ &= e^{-1} \cdot e = 1. \end{aligned}$$

例 11 (0217) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 由例 9 变形求解,可解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e.$$

例 12 设 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$, 且 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} [3x^2 + 4f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

分析 由题目条件及夹逼定理可知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 1} [3x^2 + 4f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 4f(x) = 15$.

例 13 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

分析 注意当 $x \rightarrow 1$ 时, $\sin(x-1) \rightarrow 0, x^2-1 \rightarrow 0$, 因此不能利用极限的商的运算法则, 如果将 $(x-1)$ 看作一个整体, $x^2-1 = (x-1)(x+1)$, 可将所给函数比化为

$$\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

说明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$ 中将 $x-1$ 认作为一个整体, 则上述极限为重要极限 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square}$ 类型.

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

若在自变量 x 的某种变化趋向 $\square$ 下, 函数 $f(x)$ 以零为极限, 则称在 x 的这种趋向 $\square$ 下, $f(x)$ 为无穷小量 (或无穷小).

若在自变量 x 的某种变化趋向 $\square$ 下, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 它可以大于预先给定的任意大的正数, 则称在 x 的这种趋向 $\square$ 下, $f(x)$ 为无穷大量 (或无穷大).

称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 为无穷大量, 常常形式上记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

称当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 为无穷大量, 常常形式上记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

有必要指出无穷小量并不是表达量的大小, 而是表达量的变化性态, 或者说它是描述在某个过程中量的变化趋势.

零是可以作为无穷小量的唯一的数, 其他任何数, 即使其绝对值是很小很小的数, 也不是无穷小量, 必须将无穷小量与很小很小的数区分开来, 不可混为一谈.

同样无穷大量也是描述在某个变化过程中量的变化趋势, 它不是数, 即使绝对值再大的常数也不是无穷大量.

还要指出, 无穷小量与无穷大量总是与自变量的变化过程相联系的, 脱离过程谈无穷大量与无穷小量是没有意义的.

2. 无穷小量的性质

为了简便, 我们约定, 下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量都是指在同一过程而言. 在性质的叙述中省略不提.

性质 1 两个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质2 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质3 两个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质4 若 $f(x)$ 为无穷大量, 则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 若 $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

性质5 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量.

性质5 常称为极限基本定理.

性质4 表明, 可以说“无穷大量的倒数为无穷小量”, 但是不能笼统地说“无穷小量的倒数为无穷大量”.

五、无穷小量阶的比较

定义 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta = 0$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 较 β 为高阶无穷小量, 常记为 $\alpha = o(\beta)$.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 较 β 为低阶无穷小量.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, 则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 β 为同阶无穷小.

特别当 $A = 1$ 时, 称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 β 为等价无穷小, 常记为 $\alpha \sim \beta$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x$.

性质 若当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质常称为等价无穷小代换. 这个性质常常使用在极限运算中, 起到简化运算的作用, 但必须注意, 只能在乘除中使用, 不能在加减运算中使用.

六、常见的求极限的方法

需要指出, 极限的定义指明了概念, 并指明了极限值是个固定的常数值, 它并没有提供求极限的方法. 人们利用极限定义验证了 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} C = C$. 将此作为公式, 并利用下列方法:

(1) 利用极限的四则运算法则. 使用极限的四则运算法则必须注意要满足运算条件. 当把一个函数分解为几个函数的“和、差、积、商”求极限时, 必须使得每个“函数”都有极限, 且作为分母的“函数”的极限不能为零.

(2) 对于分式的极限. 若分母的极限为零, 而分子的极限不为零, 则需先求其倒数的极限, 若其值为零, 利用无穷小量与无穷大量关系可知所求分式的极限为 ∞ .

(3) 对于分式的极限, 若分子与分母极限都为零. 可考虑能否消去分子与分母的公因式, 将新分式化为(1)或(2).

(4) 对于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 为 x 的多项式. 可利用公式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ 0, & m > n \\ \infty, & m < n \end{cases}$$

(5) 利用两个重要极限及夹逼准则.

(6) 利用“无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量”等性质.

在求极限的运算中使用等价无穷小量的代换常能简化计算. 等价无穷小代换能使用在乘除法中, 不能在加减法中使用.

(7) 求分段函数在分段点处的极限时, 当函数在分段点两侧表达式不同时, 一定要用左极限与右极限来判定.

例 14 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列变量为无穷小量的有().

A. $\frac{1}{n}$

B. $\frac{(-1)^n + 1}{2}$

C. 2^n

D. $n[(-1)^n + 1]$

分析 由无穷小量定义可知, 只需判定是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

若 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 可知应该选 A.

若 $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$, 对于数列 $\{a_n\}$, 若考察其子列 $\{a_{2n}\} = \{1\}$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. 而其子列 $\{a_{2n-1}\} = \{0\}$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, 因此知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在. 故应排除 B.

若 $a_n = 2^n$, 可知随着 n 的增大, $a_n = 2^n$ 的值也增大, 当 n 足够大时, $a_n = 2^n$ 可大于任意给定的值. 因此应排除 C.

若 $a_n = n[(-1)^n + 1]$, 对于数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\} = \{2n\}$ 没有极限, 因此也应排除 D.

故本例应单选 A.

例 15 当 $x \rightarrow 2$ 时, 下列变量中为无穷大量的有().

A. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

B. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$

C. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

D. $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

分析 由无穷大量的定义可知, 只需判定是否 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$. 这里有必要指出, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ 只是一种形式记号, 它并不说明 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 2$ 时有极限, 而且意味着, 当 $x \rightarrow 2$ 时, $|f(x)|$ 将大于任意给定的正数.

由于 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$, 可知应排除 A.

对于 $f(x) = 2^{\frac{1}{x-2}}$ 应该加以分析.

当 $x \rightarrow 2^+$ 时, $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$, 对照 $y = a^x$ 的图形可知, $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$; 当 $x \rightarrow 2^-$ 时, $\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2^{\frac{1}{2-x}}}$, 对照无穷大量与无穷小量的关系可知, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2^{\frac{1}{2-x}}} = 0$, 可知

$\lim_{x \rightarrow 2} 2^{\frac{1}{x-2}}$ 不存在, 也不是无穷大量. 因此应排除 B.

考察 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \infty$, 可知应该选 C, D.

例 16 下列极限存在的有().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 7}{(x-1)^2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}$