漢譯

范氏高等代數

徐谷生譯

上册

藝文書社印行

漢譯范氏高等代數

目　　錄

第一編　數

第　一　章　自然數——數算，加法，乘法
第　二　章　減法與負數
第　三　章　除法與分數
第　四　章　無理數
第　五　章　虛數與複數

第二編　代數學

第　一　章　引論
第　二　章　基本算法
第　三　章　一元一次方程式
第　四　章　聯立一次方程式
第　五　章　除法變形
第　六　章　有理整式之因子
第　七　章　最高公因子與最低公倍式
第　八　章　有理分式
第　九　章　對稱函數
第　十　章　二項式定理
第十一章　開方
第十二章　無理函數　根式與分指數
第十三章　二次方程式
第十四章　二次方程式之討論　極大與極小
第十五章　準二次方程式
第十六章　可用二次方程求解之聯立方程式

70023

第十七章　不等式
第十八章　一次不定方程式
第十八章　比及比例　變數法
第二十章　等差級數
第二十一章　等比級數
第二十二章　調和級數
第二十三章　高級等差級數　遞差法　插入法
第二十四章　對數
第二十五章　排列與組合
第二十六章　多項式定理
第二十七章　或然率
第二十八章　算學歸納法
第二十九章　方程式論
第三十章　普通三次與四次方程式
第三十一章　行列式與消去法
第三十二章　無窮級數之收歛
第三十三章　無窮級數之算法
第三十四章　二項級數，指數級數，對數級數.
第三十五章　循環級數
第三十六章　無窮連乘積
第三十七章　連分式
第三十八章　連續函數之性質
答案
索引

漢譯范氏高等代數

第一篇 數

第一章 自然數——數算，加法，乘法

物羣及其基數

1. 物羣 日常所見事物，有單一的，也有成羣的．如手之指，多邊形之頂點，牛隊等，皆是成羣的．吾人不重視事物間各個之區別，而注意羣體之區別，常視一羣為個體，構成一羣之個體，叫此羣之元．

2. 等值羣 一一相當 在 ABC 與 DEF 兩字羣中，這羣之每一元，可與他羣中之一相當元，結成一對，一個對一個，如 A 可對 B，B 對 E，C 對 F．諸元能如此結對之二羣，叫等值羣．如此結合諸元之法，稱為導二羣於一對一之關係，或一一相當（或一一對應）之關係．

3. 定理 與同一第三羣等值之二羣，彼此等值．

由假設，二羣中之任一羣，能與第三羣構成一一相當之關係，若將此二羣中與第三羣同一元結合之元，彼此結對，則此二羣亦能構成一一相當之關係，故等值．

4. 基數 一切物羣可分為各類等值羣，任二羣若能構成一一相當之關係，稱為同類，否則為不同類．如 ABCD 與 EFGH 兩字羣為同類，而 ABCD 與 EFG 不同類．

一羣中物之個數，或其基數，為與其同類各羣之通性，他類羣與此類羣相異之點即在此．換言之：

一羣中物之個數，或其基數，為此羣及凡能與之一一相當之羣之通性．

物羣之基數為一種性質，將羣中各物任意排列之，或將羣中之物一一代以他物，此性質不變．因變更各物之排列，或一一代以他物，僅能將此羣化為另一等值之羣，§2．故此性質與羣中各物之排列，及各物之特性皆無關係．

5. 部分　若一羣之諸元爲他羣之若干元，而非其全體，則此羣稱爲他羣之部分．如 ABC 羣爲 ABCD 羣之部分．由此定義立得．

6. 若甲羣爲乙羣之部分，乙羣又爲丙羣之部分，則甲羣爲丙羣之部分．

7. 有限羣與無限羣　不能與其部分等值之羣，叫有限羣；能與其部分等值之羣，叫無限羣．如 ABC 爲有限羣，因其不能與其任何部分如 BC 者，構成一一相當之關係．但任何無窮的成列符號，如無窮數列 1, 2, 3, 4, …，則爲無限羣．

例如	1,　2,　3,　4,　5, ………	(a)
與其從 2 起之部分	2,　3,　4,　5,　6, ………	(b)

之間，可以構成一對一之關係．(a) 中之 1 對 (b) 中之 2，(a) 中之 2 對 (b) 中之 3，餘類推，—— (a) 中任取一數，(b) 中卽有一數與之相當；(b) 中任取一數，(a) 中亦有一數與之相當．故 (a) 羣與其部分 (b) 等值，故 (a) 爲無限．

8. 基數之大小　設 M, N 代表二有限羣，則其關係不外下列三種情形：

1. M 與 N 等值，此時 M 與 N 之基數相同，或相等，§4；
2. M 與 N 之部分等值，此時 M 之基數小於 N 之基數；
3. N 與 M 之部分等值，此時 M 之基數大於 N 之基數．

例如　M 代表字羣 abc，N 代表字羣 defg，則 M 與 N 之部分 def 等值，而 M 之基數小於 N 之基數，N 之基數大於 M 之基數．

9. 注意　由 §7 有限羣之定義，則 §8 所規定之"大於""小於""等於"諸關係，毫無混淆之處．譬如說 M 之基數，等於同時又小於 N之基數，則此定義絕對不許可，因如此則 M 與 N 等值，同時又與 N 之部分等值，由 §3，是 N 與他自己之部分等值，而由 §7，N 將爲無限矣．

10. 系　若甲基數小於乙基數，乙基數又小於丙基數，則甲基數小於丙基數．

如設 M.N,P 表任何三物羣之基數，M 與 N 之部分等值，N 與 P 之部分等值，則由§§3, 6, M 必與 P 之部分等值.

11. 基數之系統　從僅含一元之羣起，累次"附加"一新物，可導出下表之基數：

1. 僅含一元之羣(如 I)之基數.
2. 附加一元於第一種羣，所得之羣(如 II)之基數.
3. 附加一元於第二種羣，所得之羣(如 III)之基數.
4. 餘類推，無窮盡.

此諸連續基數，名叫"一,""二,""三,"…，以符號 1, 2, 3, … 表之.

12. 此系統之性質　有限羣之基數，叫有限基數.

1. 此表中每一基數，都是有限的.

因羣 I 不能有部分與他等值，故爲有限，§7；又因有限羣附加一新物所得之羣，仍爲有限[1]，故後續各羣，皆爲有限.如因 I 爲有限，故 II 亦爲有限；因 II 有限，故 III 亦爲有限；餘類推.

2. 凡有限基數，皆在此表中.

何則，由定義，任一有限基數，必爲一有限羣如 M 之基數.吾人祇須用一標記 I 與 M 中之一物相當，即可造一羣標記如 III…I 與 M 等值.此羣標記必有最後一個，故必包含於§11 之表中，否則此羣標記將無窮盡而爲無限，§7，因之 M 亦爲無限.

3. 此表中之基數無相等的.

如上所說，I, II, III, … 諸羣既皆爲有限，而任取其中之二，則一羣顯然與他羣之部分等值，故由 §8，此諸羣之基數無相等的.

1 肯托算學年刊 46 期 490 頁之證法：

(G. Cantor, Math. Ann, Vol. 46, P. 490)

設 M 表一有限羣，而 e 爲單一之物，則附加 e 於 M 所成之 Me 羣，亦爲有限羣.

證.設 G, H 各表一有限羣，G ≡ H 表此二羣等值

若 Me 非有限羣，則必與其某一部分等值，§7.若 P 表此等部分，則

$Me \equiv P$. 由是

(1) 若 P 中不含 e, 則 P 中必有一元如 f 者, 與 Me 中之 e 相當, P 中除 e 外, 其餘部分用 P_1 表之, 則因 $Me \equiv P_1 f$, $e \equiv f$, 故 $M \equiv P_1$, 但這决不可能, 因 M 爲有限羣, 不能與其一部分如 P_1 者等值, §7.

(2) 若 P 中含 e, 則 P 中之 e, 不能與 Me 中之 e 相當, 因如兩 e 相當, 則 P 中除 e 外, 其餘部分, 用 P_2 表之, P_2 必爲 M 之一部分, 因 $Me \equiv P_2 e$, $e \equiv e$, 故 $M \equiv P_2$. 這也不可能, 因有限羣 M 不能與其部分 P_2 等值, §7.

設 P 中之 e, 與 Me 中之他元如 g 者相當, 而 Me 中之 e, 與 P 中之一元如 f 者相當. 原設 $Me \equiv P$, 則變更兩羣中 e, f, g, 之次序, 使兩 e 相當, f 與 g 相當, 則必有 $M \equiv P_2$, 但上面已證明這不可能.

故原設 Me 非有限羣爲不可能, 而 Me 必爲有限羣.

自然標尺 等式 不等式

13. 自然數 諸連續基數 "一", "二", "三", …, 或其符號 1, 2, 3, …, 稱爲正整數, 或自然數. 故

一自然數爲一基數之符數.

14. 自然標尺 此諸數, 所代表之基數, 在 §11 表中有其順序, 將此諸數依此順序排列之, 卽得無窮符號列

1, 2, 3, 4, 5, ……

或 "一", "二", "三", "四", "五", …, 稱爲自然標尺, 或自然數之標尺.

15. 此標尺中之每一符號, 表示標尺中從頭到此所有符號之個數.

如 4 表示 1, 2, 3, 4 諸符號之個數, 何則 1, 2, 3, 4 諸符號之個數, 與 I, II, III, IIII 諸羣數相等, 此羣數又與末一羣 IIII 中標記之個數相等, §8. 其他符號亦然.

16. 自然標尺之順序性 自然標尺之本身, 不過一相異符號之羣, 其中有最先之符號, 卽 1; 此符號有一定之後繼符號, 卽 2; 此符號又有一定之後繼符號, 卽 3; 餘類推, 無窮盡.

換言之, 自然標尺不過一相異符號之羣, 其元依一定且已知之順序

而排列，有最先之符號，無最後之符號.

由此觀之，自然數之本身僅係順序之標記；此種順序，當唸標尺時，因時間關係，自然呈現.

17. 此標尺，與凡以一定且已知之順序排列其元之羣，皆顯然有下列之性質：

1. 羣中任二元，必有一"在前"，而他一"隨後"，且此所謂"在前""隨後"，用於任何一對元與用於他對元，有同樣之意義.

2. 於羣中任取二元，吾人常能決定那個在前，那個隨後.

3. 設 a, b, c，表羣中任意三元，而 a 在 b 前，b 又在 c 前，則 a 在 c 前.

一已知羣，或本來具有此等性質，或經吾人依某種方法排列後，才具有此等性質，吾人皆稱之爲順序系統.

第一種之例，如 (1) 自然標尺本身，(2) 依時間繼續發生之事件；(3) 自左而右沿一水平直線排列之點列．第二種之例，如姓名依字母之次序排列之人羣.

18. 一羣中也可有"相一致"之元．譬如，在一羣事件中，二個或多個可以同時發生．祇要在諸"不一致"之元之間，1, 2, 3 等關係能成立，此等羣仍稱爲順序系統．至於相一致之元，則

4. 若 a 與 b 一致，b 與 c 一致，則 a 與 c 一致.

5. 若 a 與 b 一致，而 b 在 c 前，則 a 在 c 前.

19. 基數之大小，以其自然數在標尺中相關之順序指示之.

蓋任二已知基數，其自然數於標尺中在後者爲大．而"若甲基數小於乙基數，乙基數小於丙基數，則甲基數小於丙基數."之關係，在標尺中，則有"若 a 在 b 前，b 在 c 前，則 a 在 c 前"之關係，以代表之.

實則吾人比較基數時，除此法外，絕少用他法．吾人並不依 §8 之法，直接比較物羣之基數；而以適當之自然數代表之，自其在標尺中之相關順序，以推知孰大孰小．因標尺深印吾人之腦海中，故一聞任二自然數之名，可不假思索，而立辨其孰大孰小．譬如，告吾人以 A 城人口 120000，B 城人口 125000，因吾人知標尺中 125000 在 120000 之後，故

可立即斷定 B 城人口較多.

20. 等式,不等式 以下凡"數"字皆指自然數而言, §13 諸字母 a, b, c 等,則代表任意之自然數.

21. 若 a 與 b 代表同一數,即在自然標尺中相一致,吾人表之以等式

$$a=b. \qquad (\text{讀爲“}a\text{ 等於 }b\text{”})$$

22. 若在自然標尺中, a 在前, b 隨後,吾人表之以不等式

$$a<b, \qquad (\text{讀爲“}a\text{ 小於 }b\text{”})$$

或 $$b>a, \qquad (\text{讀爲“}b\text{ 大於 }a\text{”})$$

23. 嚴格的講,此所謂"等於","小於","大於",當然是對 a, b 所代表之基數而言,與 a, b 之本身無關. 譬如 "a 小於 b" 一語,不過"a 所代表之基數小於 b 所代表之基數"一語之省略而已.

不等式 $a<b$ 中, a 與 b 本身所僅有之意義,爲於標尺中 a 在 b 前.

24. 等式與不等式之規則 由 §§17, 18, 及 §§21, 22 諸定義,立得

1. 若 $a=b$, $b=c$, 則 $a=c$.
2. 若 $a<b$, $b<c$. 則 $a<c$.
3. 若 $a=b$, $b<c$, 則 $a<c$.

數算

25. 算術之首要,在研究存於自然數間之順序關係,及結合此等數之若干算法. 算術之算法,始於數算,(此數字是動詞,音所).

26. 數算 欲知物羣之基數,可數算之. 其法爲人所共知. 任取一物,叫他"一";另取一物,叫他"二";照此進行,至數完羣中之物爲止. 使用"一","二","三",… 等符號時,須依照標尺中之順序,不可遺漏;但諸物擇取之先後,則可隨便. 如此數得最後之符號,即所求物羣之基數之名稱. 蓋由標尺之順序性,此最後符號,指示所用符號共計若干, §15, 因此知羣中之物共有若干, §8.

准此，則數算之法，乃導被數算之羣，與自然標尺之一部分，一一相當，此部分起於"一"，而終於數算所用最後之數。

在數算中，自然數有兩種效用，(1) 數算時用自然數之某羣作數號，(2) 數算之結果，用此羣中最後之數記之。

上面曾說過，數算時諸物選取之先後，可以隨便，兹證之如下：

27. 定理　數算有限物羣時，無論以何順序選取諸物，結果常相同。

如假設數算某有限羣時，照順序 P 選取諸物，結果得 99，照順序 Q 選取諸物，結果得 97. 則順序 P 中前 97 物組成之羣，將與順序 Q 中之全羣等值；因爲依假設，二者皆曾與自然標尺之前 97 數一一結合故也，§3. 如此則所數算之有限羣，將與其一部分等值，故此事决不可能，§7.

28. 基數之另一定義　根據上節定理，有限羣之基數，可規定如下：

基數爲有限物羣之特性，因有此特性，而不論以何順序數算物羣，所得之自然數皆相同。

如吾人以 §16 所定自然標尺之意義，爲論數之基礎，則此卽基數應有之定義。

加　法

29. 加法定義　加 3 於 5，乃求自然標尺中，佔 5 後第三位置之數。在標尺中從 6 起，順次數算之，如 6, 7, 8，卽得所求之數爲 8.

指示此種演算之符號爲 +，讀爲"加"，各數之關係式爲 $5+3=8$.

普徧言之，加 b 於 a，乃求自然標尺中，佔 a 後第 b 個位置之數。因標尺中無最後之符號，故此數常可求得，稱之爲 a 與 b 之和，以式 $a+b$ 表之。

30. 注意　在標尺中數算以求 $a+b$ 之法，與"將 b 物之羣之諸元，一一附加於 a 物之羣"之法，步驟完全一致，故後一法所得之結果，爲 $(a+b)$ 個之羣，§8. 又若 a 與 b 皆表有限基數，則 $a+b$ 亦爲有限。參

看§12之附註.

31. 因$a+1, a+2, \cdots$,指示a以後的第一,第二,…,等數,故數列$a+1, a+2, \cdots$,指示標尺中a以後之部分. 故凡a以後之已知數,皆可以$a+d$之形式表之,其中d代表一固定之自然數.

32. 加法之演算 用數算之法加很大的數,未免太繁. 故吾人默記較小諸數之和,(加法表),并引用下節所說的加法"律",以推求較大之數之和.

33. 加法 加法爲"可易"與"可羣"之算法.

34. 加法可易律 $a+b=b+a$.

加b於a,與加a於b,結果相同.

35. 加法可羣律 $a+(b+c)=(a+b)+c$.

先加c於b,再將其和加於a,與先加b於a. 再加c於此和,結果相同.

36. 注意 大家公認$a+b+c+d+\cdots$式,乃先加b於a,再加c於此和,再加d於其和,餘類推. 故$(a+b)+c$式實際常寫成$a+b+c$.

37. 二律之證明

1. 由可易律 $a+b=b+a$,

則如 $3+2$之和,當等於 $2+3$ 之和.

蓋$3+2$代表"在自然標尺上先數算三個數,再數算二個數"所得之數,故被數算之羣爲 1, 2, 3, 4, 5, (a)

而數號之羣爲 1, 2, 3, 1, 2, (b)

然因(a),(b)兩羣符號之間,有一對一之關係,而凡一對一之關係,都是可顛倒的,§2,故吾人可以交換(a)與(b)之任務;即若以(b)爲被數算之羣,(a)將代表數號之羣,故

求$3+2$等於數算符號羣 1, 2, 3, 1, 2,

同理,求$2+3$等於數算符號羣 1, 2, 1, 2, 3. (c)

然組成(b),(c)二羣之符號全相同,僅排列之方法不同,數算(b),(c)

結果應相同;卽

$$3+2=2+3.$$

對於任二自然數 a 與 b,可依同法證之.

2. 可羣律　$(a+b)+c=a+(b+c)$.

蓋於 a 後數算 b 個符號,而達 $a+b$;再數算 c 個符號,而達 $(a+b)+c$;兩次共數算 $(b+c)$ 個符號,故應達到 a 後第 $(b+c)$ 個符號,卽達到 $a+(b+c)$.

38. 關於和之普偏定理　連用§§34, 35二律,卽可證明有限個的數相加,不論依何順序排列之,不論如何組合之,其和常相同.

譬如,　$a+b+c+d=a+c+b+d$.

因　$a+b+c+d=a+(b+c)+d$　§35

$=a+(c+b)+d$　§24

$=a+c+b+d$.　§35

39. 關於和之規則　其一. 由§29和之定義,及§24之規則,得

1. 若　$a=b$　則　$a+c=b+c$.

2. 若　$a<b$,　則　$a+c<b+c$.

3. 若　$a>b$,　則　$a+c>b+c$.

若 $a=b$,則 a 與 b 表同數,故1甚明顯.

若 $a>b$,則由§31, $a=b+d$,由§§34, 35,有 $a+c=(b+d)+c=(b+c)+d$, $\therefore>b+c$.

2與3同理.

其二. 由1,2,3得其逆理如下:

4. 若　$a+c=b+c$,　則　$a=b$.

5. 若　$a+c<b+c$,　則　$a<b$.

6. 若　$a+c>b+c$,　則　$a>b$.

如設 $a+c=b+c$,則 $a \gtreqless b$ 三者必居其一.

若 $a>b$,則由3, $a+c>b+c$,與原設 $a+c=b+c$ 不合.

若 $a<b$, 則由 2, $a+c<b+c$, 與原設 $a+c=b+c$ 不合.
a 既 $\not>b$, 又 $\not<b$, $\therefore a=b$.

其三. 由 1, 2, 3 又得

7. 若 $a=b$, $c=d$, 則 $a+c=b+d$.
8. 若 $a<b$, $c<d$, 則 $a+c<b+d$.
9. 若 $a>b$, $c>d$, 則 $a+c>b+d$.

如設 $a=b$, 則由 1, $a+c=b+c$, 又設 $c=d$, 則由 1, $b+c=b+d$. 故 $a+c=b+d$.

乘　法

40. 乘法定義 用 b 乘 a, 乃求 b 個 a 之和, 此和稱爲 b 乘 a 之積, 以 $a\times b$, 或 $a\cdot b$, 或 ab 表之. 故依定義

41. $ab=a+a+\cdots\cdots$ 到 b 項

42. a 叫被乘數, b 叫乘數, a 與 b 皆爲 ab 之因子.

43. 乘法之演算 累加求積, 未免太繁. 故吾人默記較小諸數之積 (乘法九九表), 藉加法之諸律及下節所述諸乘法律, 以求較大之數之積.

44. 乘法律 乘法如加法, 爲"可易"與"可羣"之算法, 若聯於加法, 則又爲"分配的"算法.

45. 乘法可易律 $ab=ba$.

a 乘 b, 與 b 乘 a, 結果相同.

例如 $2\times3=6$, $3\times2=6$.

46. 乘法可羣律 $a(bc)=(ab)c$.

用 b, c 之積乘 a, 與用 c 乘 a, b 之積, 結果相同.

如 $2(3\cdot4)=2\times12=24$, $(2\cdot3)4=6\times4=24$.

實際 $(ab)c$ 常寫成 abc, 參看 § 36.

47. 乘法分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

用 b, c 之和乘 a, 與 b, c 個別乘 a, 再加其二積, 結果相同.

如　$3(4+5)=3\cdot9=27,\quad 3\cdot4+3\cdot5=12+15=27.$

48. 諸律之證明

其一．分配律：　$ab+ac=a(b+c)$,　(1)

因　$ab+ac=(a+a+\cdots$到b項$)+(a+a+\cdots$到c項$)$　§41

　　$=a+a+a+\cdots$到$(b+c)$項$=a(b+c)$.　§§35, 41

故　$a(b+c+\cdots)=ab+ac+\cdots$　(2)

如　$a(b+c+d)=a(b+c)+ad=ab+ac+ad.$　由(1)與§35

又　$ac+bc=(a+b)c.$　(3)

因　$ac+bc=(a+a+\cdots$到c項$)+(b+b+\cdots$到c項$)$

　　$=(a+b)+(a+b)+\cdots$到c項$=(a+b)c.$　§38

其二．可易律：　$ab=ba.$

　　$ab=(1+1+\cdots$到a項$)b$

　　$=1\cdot b+1\cdot b+\cdots$到$a$項　由(3)

　　$=b+b+\cdots\cdots$到a項$=ba$　§41

其三．可羣律：　$(ab)c=a(bc).$

　　$(ab)c=ab+ab+\cdots$到c項　§41

　　$=a(b+b+\cdots$到c項$)=a(bc)$　由(2)與§41

49. 關於積之普偏定理

以上諸律，可推廣至任何有限個因子之積，即

有限個因子相乘，不論依何順序乘之，其積常相同．

50. 關於積之規則

1．若　$a=b$，則　$ac=bc.$　4．若　$ac=bc$，則　$a=b.$

2．若　$a<b$，則　$ac<bc.$　5．若　$ac<bc$，則　$a<b.$

3．若　$a>b$，則　$ac>bc.$　6．若　$ac>bc$，則　$a>b.$

因為若$a=b$，則a, b表同數，故1甚明顯．

若$a>b$，則由§31，$a=b+d$，於是$ac=(b+d)c=bc+dc.\ \therefore>bc.$

2與3同理．

4, 5, 6 乃 1, 2, 3 之逆理，可仿照 § 39 之理證明之.

由 1, 2, 3 并用 § 39 之理，即得

若 $a=b,\ c=d,$ 則 $ac=bd.$

若 $a<b,\ c<d,$ 則 $ac<bd.$

若 $a>b,\ c>d,$ 則 $ac>bd.$

第二章 減法與負數

完全標尺

51. 減法 5 減 3，乃求自然標尺中，佔 5 前第三位置之數，從 4 起，逆數三數，如 4, 3, 2, 即求得此數為 2. 指示此種演算之符號為"－"，讀為"減"，各數之關係式為 $5-3=2$.

普徧言之，a 減 b 乃求自然標尺中佔 a 前第 b 個位置之數. 減得之數叫"餘數"，以 $a-b$ 式表之. a 叫被減數，b 叫減數.

52. 加與減互為逆算法 5前之第三個數，顯然就是加 3 會得 5 之數. 普徧言之，餘數$(a-b)$，為 a 前之第 b 個數，也就是加 b 會得 a 之數. 故

53. $$(a-b)+b=a.$$

又，說 7 佔 4 後之第三個位置，等於說 4 佔 7 前第三個位置，故有 $4+3-3=4$，普徧言之，

54. $$(a+b)-b=a.$$

55. 由 § 54，$a+b-b=a$，是減抵銷加；由 § 53，$a-b+b=a$，是加抵銷減. 所以說，加與減互為逆算法.

56. 完全標尺 自然標尺有一最先之數，1，逆數不能超過此數，而須受其限制，故此標尺不能滿足減法之需要. 譬如，在自然標尺中，從 2 減 4 就做不到

然逆數若能如順數之無限制，便利實多. 而自然標尺之本身，僅係一依固定順序排列之符號統系，則吾人置一新符號順序系統於其前，以

逆向擴充, 又有何不可.

故吾人依次創製諸符號：置 0 於 1 前；置 -1 於 0 前；置 -2 於 -1 前；餘類推. 如此造成完全標尺

$$\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

此中之符號或"數", 無始無終, 故逆數亦如順數, 可至任何限度.

57. 此標尺對於符號 0 爲對稱, 如有 3 爲 0 後之第三符號, 便有 -3 爲 0 前之第三符號；其他莫不如此.

58. 新數之意義 新符號中之 0, 可說是有基數之意義. 譬如, 從 3 逆數, 相當於一一去三物之羣之元. 元去盡則數至符號 0, 故 0 可說是無元之羣之基數的符號, 因此吾人常認 0 爲自然數之一. 至於 $-1, -2, -3, \cdots$, 則無論如何, 不能有基數之意義.

然而, 諸新符號與自然數有相同之順序性. 在此包含自然數之順序系統中, (即在完全標尺中), 每一新符號各佔一固定之位置. 我們可以說, 自然數之意義, 乃由其在標尺中之位置所規定；諸新符號既各佔一固定位置, 故可規定爲同義. 故

$-1, -2, -3, \cdots$ 可稱爲數.

59. 正數與負數 新數 $-1, -2, -3, \cdots$ 自成一類, 以別於舊有之數, 稱之爲負數, 而舊數稱爲正數.

正數負數與 0, 統稱爲整數, 以別於以後討論之他數.

60. 代數上的等與不等 令 a, b, c 表完全標尺中之任意數, 依 a 之在 b 前, 與 b 一致, 在 b 後, 而有 $a<b$, $a=b$, $a>b$.

61. 由定義, 完全標尺爲一順序系統, 故 § 24 之規則對他也適用, 如

$$若\quad a<b,\ b<c,\qquad 則\quad a<c.$$

62. $a<b$ 時, 即在完全標尺中 a 在 b 前時, 通常稱 a 在代數上小於 b, 或 b 在代數上大於 a.

此所謂"小於"與"大於"僅指在完全標尺中"在前"或"隨後"，而別無他意. 如"-20 小於 -18"，僅指"-20 在 -18 之前".

63. 絕對值或數值　吾人稱 3 爲 -3 之數值，或其絕對值，用符號 $|-3|$ 表之，故 $|-3|=3$，凡負數皆如此. 至正數與 0 之絕對值，就是他自己，如 $|3|=3$.

64. 數值上的等與不等　在完全標尺中，任二數 a 與 b，由 $|a|$ 之 $<$，$=$，或 $>$ $|b|$，吾人稱 a 爲數值上小於，等於，或大於 b.

如 -3 在代數上小於 2，而數值上大於 2；又如 -7 在代數上小於 -3，而數值上大於 -3.

負數之算法

65. 新算法　吾人又創製新算法，以便負數，0，與自然數之間，可如自然數之以加法，乘法，減法相結合.

此種算法之名稱及表示方法，與自然數之相當算法同.

仿照 §60，用正楷字母 a, b, c, … 表完全標尺中之任何數，斜體字母 $a, b, c, \cdots$ 則僅表自然數，由是可規定新算法如下：

66. 加法與減法之定義

1. $\mathrm{a}+b$　乃 a 後第 b 個數.
2. $\mathrm{a}-b$　乃 a 前第 b 個數.
3. $\mathrm{a}+0, \mathrm{a}-0$　乃與 a 同數.
4. $\mathrm{a}+(-b)$　乃與　$\mathrm{a}-b$　同數.
5. $\mathrm{a}-(-b)$　乃與　$\mathrm{a}+b$　同數.

換言之，任何數 a，加或減一正數 b，乃指在標尺中順數或逆數 b 個數，這意義與前相同. 至加一負數，則等於減其對應之正數；減一負數，等於加其對應之正數.

如，由 1，　$-3+2=-1$，　因 -1 乃 -3 後之第二數.

由 2，　$2-5=-3$，　因 -3 乃 2 前之第五數.

由 4，　$-5+(-2)=-5-2=-7$.　　由 2.