有限元简明教程

赵 奎 袁海平 编著

冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

有限元简明教程

赵 奎 袁海平 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2009

内 容 提 要

有限单元法是当前工程技术领域中最常用最有效的数值计算方法，本书共有7章，依次介绍了有限单元法的理论基础、杆系结构单元、平面三角形单元、平面四边形等参数单元，并对有限元线性方程组的求解方法进行了介绍。为了增强本书的实用性，最后用一章的篇幅介绍了在使用有限元时的相关注意问题。

本书可作为岩土工程、采矿工程、工程力学、机械工程、水利工程等工科专业硕士研究生和本科生教材，也可供从事相关专业工程人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

有限元简明教程/赵奎等编著. —北京：冶金工业出版社，2009.9

ISBN 978-7-5024-5021-2

Ⅰ.有… Ⅱ.赵… Ⅲ.有限元法—教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第146454号

出 版 人 曹胜利
地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009
电　　话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn
责任编辑 杨盈园 美术编辑 李 新 版式设计 葛新霞
责任校对 白 迅 责任印制 牛晓波
ISBN 978-7-5024-5021-2
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2009年9月第1版，2009年9月第1次印刷
169mm×239mm；10.25印张；196千字；152页；1-2000册
28.00元
冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893
冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010)65289081
（本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

有限单元法是当前工程技术领域中最常用、最有效的数值计算方法，首先在结构分析，而后又在其他领域中得到广泛应用，已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。有限单元法可以解决流体、电磁场、弹性、弹塑性等各种工程中的问题。

由于学习该课程所应具备的基础知识较多，如变分法、各种变分原理（最小势能原理、余能原理等）、数值分析（计算方法）、计算机编程等，而且有限单元法公式可以从各种不同方法得到，因此使初学者感到难以在较短的时间内掌握其要旨。为了能够在有限的时间内掌握有限单元法的实质，能够达到自己编制平面问题的程序，使用通用有限元软件所应具有的基础知识和基本技能之目的，本教程以“虚功原理”为主线，将一维及平面弹性力学有限元建立起来，而更为详细的研究放在以后科研工作中结合实际工程问题再进行。

本书介绍了有限单元法的理论基础、杆系结构单元、平面三角形单元、平面等参数单元，并对有限元线性方程组的求解方法进行了介绍。为了增强本书的实用性，最后用一章的篇幅介绍了在使用有限单元法时应注意的相关问题。编者多年从事研究生与本科生有限单元法课程的教学工作，编写时力求深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。有些定理、原理、公式等是通过严格数力理论推导得到的，如弹性力学经典的平衡方程、几何方程等，有些则是基于大量客观事实归纳统计得到的。对于前者，尽可能熟知推演过程及所采用的数学方法；对于后者，则应尽可能多考虑其所揭示的问题之本质。

本教程适合于岩土工程、采矿工程、工程力学、机械工程、水利

工程等工科专业硕士研究生和本科生，也适于从事相关专业工程人员学习使用。

博士生王晓军、金解放、赵康、付玉华等及硕士生黄晖、周雄超、苏成哲、龚囱、胡京涛等帮助查阅了大量资料并做了大量文字整理方面的工作。本教程作为讲义已在江西理工大学使用十多年，其修改、完善得到了叶黔元教授的大力帮助，编者在此一并致以深切谢意。另外，本书参考文献较多，个别文献未能一一列出，在此谨向这些文献的作者表示衷心感谢。

由于作者水平所限，加上时间仓促，书中不妥之处，恳请各位专家、学者和广大读者批评指正。

编　者

2009 年 3 月于江西理工大学

目　录

1 绪　　论

1.1 概述

在科学技术领域内，对于许多力学问题和物理问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是少数方程，性质比较简单，且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程的某些特征的非线性性质或由于求解区域的几何形状比较复杂，则不能得到解析的答案。这类问题的解决通常有两种途径。一是引入简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的情况，从而得到问题在简化状态下的解答。但是这种方法只是在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。因此，人们多年来寻找和发展了另一种求解方法——数值解法。特别是近30多年来，随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。

已经发展的数值分析方法可以分为两大类。一类以有限差分法为代表。其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解。一个问题的有限差分法求解步骤是：首先将求解域划分为网格，然后在网格的结点上用差分方程近似微分方程。当采用较多的结点时，近似解的精度可以得到改进。借助于有限差分法，能够求解某些相当复杂的问题。特别是求解建立子空间坐标系的流体流动问题，有限差分法有自己的优势。因此在流体力学领域内，它至今仍占支配地位。但在用于几何形状复杂的问题时，它的精度将降低，甚至求解很困难。

另一类数值分析方法是首先建立和原问题基本方程及相应定解条件相等效的积分提法，然后据之建立近似解法，例如配点法、最小二乘法、Galerkin 法、力矩法等都属于这一类数值方法。如果原问题的方程具有某些特定的性质，则它的等效积分提法可以归结为某个泛函的变分，相应的近似解法实际上是求解泛函的驻值问题，里兹法就属于这一类近似方法。上述不同方法在不同的领域或类型的问题中得到成功的应用，但也只限于几何形状规则的问题。其基本原因是它们都是在整个求解区域上假设近似函数。因此，对于几何形状复杂的问题，不可能建立合乎要求的近似函数。而有限单元法的出现，是数值分析方法研究领域内重大突破性的进展。

有限单元法（以下简称有限元）是当今公认的一种用数值方法求解工程中

所遇到的各种问题的最有效通用的方法（各种力学问题、场问题等），是求解具有已知边界和初始条件（或两者条件之一）的偏微分方程组的一种通用的数值解法，属于连续介质微分法。

有限元法是利用计算机进行的一种数值近似计算分析方法，它是通过对连续问题进行有限数目的单元离散来近似的，是分析复杂结构和复杂问题的一种强有力的分析工具。目前，有限元法在技术领域中的应用十分广泛，几乎所有的弹塑性结构静力学和动力学问题都可用它求得满意的数值近似结果。

1.2　有限元法的分析过程

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个，且按一定方式相互联结在一起的单元组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为数值分析方法的还有一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或及其导数在单元的各个结点的数值和其插值函数来表达。这样一来，一个问题的有限元分析中，未知场函数或及其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量（也即自由度），从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

简言之，有限单元的求解思路是：根据力学的虚功原理，利用变分法将整个结构（求解域）的平衡微分方程、几何方程和物理方程建立在结构离散化的各个单元上，从而得到各个单元的应力、应变及位移，进而求出结构内部应力、应变。理论基础是弹性力学的变分原理。在有限元方法中，势函数的选取不是整体的，整体的就是经典的里兹（Ritz）法、迦辽金（Galerkin）法（参看加权残值法），而是在弹性体内分区（单元）完成的，因此势函数形式简单统一。

以结构分析为例，有限元分析的过程大概可分为以下7个步骤：

（1）结构的离散化：将结构物分割成有限个单元体，并在单元体的指定点设置结点，使相邻单元的有关参数具有一定的连续性，并构成一个单元的集合体，以它来代替原来的结构。

（2）选择位移模式：假定位移是坐标的某种简单的函数（位移模式或插值函数），通常采用多项式作为位移模式。在选择位移模式时，应该注意以下事宜：

1）多项式项数应该等于单元的自由度数；

2）多项式阶次应包含常数项和线性项；

3）单元自由度应等于单元结点独立位移的个数。

位移矩阵为：

$$\{u\} = [\boldsymbol{N}]\{\delta\}^e \tag{1-1}$$

式中 $\{u\}$ ——单元内任一点的位移；

$\{\delta\}^e$ ——单元结点的位移；

$[\boldsymbol{N}]$ ——形函数。

（3）分析单元的力学性能：

1）由几何方程，从式（1-1）导出用结点位移表示的单元应变为：

$$\{\varepsilon\} = [\boldsymbol{B}]\{\delta\}^e \tag{1-2}$$

式中 $[\boldsymbol{B}]$ ——单元应变矩阵。

2）由本构方程，导出用结点位移表示的单元应力为：

$$\{\sigma\} = [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\{\delta\}^e \tag{1-3}$$

式中 $[\boldsymbol{D}]$ ——与单元材料有关的弹性矩阵。

3）由变分原理，建立单元上结点力与结点位移间的关系式——平衡方程为：

$$\{F\}^e = [\boldsymbol{k}]^e\{\delta\}^e \tag{1-4}$$

式中 $[\boldsymbol{k}]^e$ ——单元刚度矩阵，其形式为：

$$[\boldsymbol{k}]^e = \iiint[\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1-5}$$

（4）集合所有单元的平衡方程，建立整个结构的平衡方程组集总刚，总刚矩阵为 $[\boldsymbol{K}]$。由总刚形成的整个结构的平衡方程为：

$$[\boldsymbol{K}]\{\delta\} = \{F\} \tag{1-6}$$

上述方程在引入几何边界条件时，将进行适当修改。

（5）求解未知结点位移和计算单元应力：对平衡方程进行求解，解出未知的结点位移，然后根据前面给出的关系计算结点的应变和应力以及单元的应力和应变。

（6）整理并输出结果：通过该步骤可以输出应力、应变以及位移等值。

（7）结合计算结果进行一系列后续分析，得到问题的最终分析结果，分析结束。

1.3 有限元法的发展历程

从应用数学角度来看，有限单元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合，来求解 St. Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念。但只是在 1960 年以后，随着电子数值计算机的广泛应用和发展，有限单元法的发展速度才显著加快。

现代有限单元法第一个成功的尝试，是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题，这是美国学者 M. J. Turner、R. W. Clough 等人在分析飞机结构时于 1956

年得到的成果，他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的，采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 R. W. Clough 进一步处理了平面弹性问题，并第一次提出了“有限单元法”的名称，使人们开始认识了有限单元法的功效。

30 多年来，有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说，正如上面所提到的，Turner、Clough 等人开始提出有限单元法时是利用直接刚度法。它来源于结构分析的刚度法，这对明确有限单元法的一些物理概念是很有帮助的，但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963 ~ 1964 年，Besseling、Melosh、Jones 等人证明了有限单元法是基于变分原理的里兹法的另一种形式，从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法，确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从 20 世纪 60 年代后期开始，进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件，但变分的泛函尚未找到或者根本不存在的情况，因而进一步扩大了有限单元法的应用领域。

30 多年来，有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预计，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身也将得到进一步的发展和完善。

有限元软件作为商业软件在工程界普遍使用。目前世界上最著名的有限元软件有：ADINA、ANSYS、SAP5，针对采矿、岩土工程开发的专业性有限元软件有：FINAL、$3D$-σ 等。

1.4 习题

1-1 试说明有限元法解题的基本思路。

1-2 试说明用有限元法解题的主要步骤。

1-3 有限元法主要有哪些优点？

2 有限单元法理论基础

2.1 有限元原理与变分原理的关系

弹性力学问题的本质是求解偏微分方程的边值问题。由于偏微分方程边值问题的复杂性，只能采取各种近似方法或者渐近方法求解。变分原理就是将弹性力学的基本方程——偏微分方程的边值问题转换为代数方程求解的一种方法。

有限元原理是目前工程上应用最为广泛的结构数值分析方法，它的理论基础仍然是弹性力学的变分原理。那么，为什么变分原理在工程上的应用有限，而有限元原理却应用广泛。有限元原理与一般的变分原理求解方法有什么不同呢，问题在于变分原理用于弹性体分析时，不论是瑞利—里茨法还是伽辽金法，采用整体建立位移势函数或者应力势函数的方法。由于势函数要满足一定的条件，导致对于实际工程问题求解仍然困难重重。

有限元方法选取的势函数不是整体的，而是在弹性体内分区（单元）完成的，因此势函数形式简单统一。当然，这使得转换的代数方程阶数比较高。但是，面对强大的计算机处理能力，线性方程组的求解不再有任何困难。因此，有限元原理成为目前工程结构分析的重要工具。

2.2 弹性力学基本方程

在有限单元法中经常要用到弹性力学的基本方程和与之等效的变分原理，现将它们连同相应的矩阵表达形式和张量表达形式综合引述于后。关于它们的详细推导可从弹性力学的有关教材中查到。

弹性体在载荷作用下，体内任意一点的应力状态可由 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 6 个应力分量来表示，其中 σ_x、σ_y、σ_z 为正应力；τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 为剪应力。应力分量的正负号规定如下：如果某一个面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，与坐标轴反向为负；相反，如果某一个面的外法线方向与坐标轴的负方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，与坐标轴同向为负，应力分量及其正方向如图 2-1 所示。

应力分量的矩阵表示称为应力列阵或应力向量，具体表达为：

$$\sigma=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{\sigma}_x\quad \boldsymbol{\sigma}_y\quad \boldsymbol{\sigma}_z\quad \boldsymbol{\tau}_{xy}\quad \boldsymbol{\tau}_{yz}\quad \boldsymbol{\tau}_{zx}]^T \tag{2-1}$$

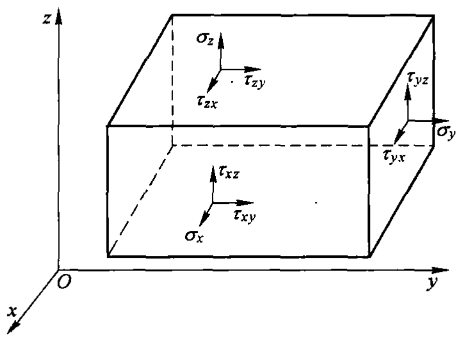

图 2-1　应力分量

弹性体在载荷作用下，还将产生位移和变形，即弹性体位置的移动和形状的改变。弹性体内任一点的位移可由沿直角坐标轴方向的 3 个位移分量 u，v，w 来表示。它的矩阵形式为：

$$u=\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w}]^T \tag{2-2}$$

称作位移列阵或位移向量。

弹性体内任意一点的应变，可以由 6 个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}来表示。其中 ε_x、ε_y、ε_z 为正应变，γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}为剪应变。应变的正负号与应力的正负号相对应，即应变以伸长时为正，缩短为负；剪应变是以两个沿坐标轴正方向的线段组成的直角变小为正，反之为负。图 2-2a、图 2-2b 分别为 ε_x 和 γ_{xy}的

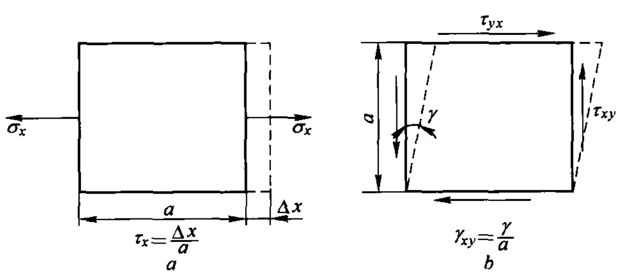

图 2-2　应变的正方向

a—正应变；b—剪应变

正应变状态。应变的矩阵形式为：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz} \quad \boldsymbol{\gamma}_{zx}]^T \tag{2-3}$$

称作应变列阵或应变向量。

弹性力学分析问题从静力学条件、几何学条件与物理学条件三方面考虑，分别得到平衡微分方程、几何方程与物理方程，统称为弹性力学的基本方程。弹性力学基本方程一般由标量符号表示，也可用笛卡儿张量符号来表示，使用哑标求和约定可以得到十分简练的方程表达形式。在直角坐标系 x，y，z 中，应力张量和应变张量都是对称的二阶张量，分别用 σ_{ij} 和 ε_{ij} 表示，且有 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 和 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$。下面将分别给出弹性力学基本方程及边界条件的张量形式和张量形式的展开式。

2.2.1 平衡方程

弹性体 V 域内任一点沿坐标轴 x，y，z 方向的张量形式平衡方程为：

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \tag{2-4}$$

式（2-4）给出了应力和体积力的关系，称为平衡微分方程，又称 Navier 方程。式中下标 i 表示对独立坐标 x_i 求偏导数。

若考虑物体运动的情况，则式（2-4）的右边不为零，按 Newton 第二定律，应等于括号里边的项。这里 ρ 表示物体的密度，u 表示物体内任一点的位移矢量，其对时间 t 的二阶偏导数表示加速度。

本书中的物体为静止状态，则式（2-4）的展开形式为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \end{cases}$$

对应关系为 1 对应 x，2 对应 y，3 对应 z，即：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}+Y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases}$$

式中，X，Y，Z 为微分单元的 x，y，z 方向的体积力。

2.2.2　几何方程

几何方程表述应变与位移之间的关系，在微小位移和微小变形的情况下，省略去位移导数的高次幂的几何关系，则应变向量和位移向量间的几何关系有：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\tag{2-5}$$

其中，$u=\{u\quad v\quad w\}^T$，式（2-5）展开形式为：

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\\[2ex]\varepsilon_{22}=\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\\[2ex]\varepsilon_{33}=\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\\[2ex]\varepsilon_{12}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\varepsilon_{21}\\[2ex]\varepsilon_{23}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\varepsilon_{32}\\[2ex]\varepsilon_{31}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)=\varepsilon_{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2ex]\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}\\[2ex]\gamma_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=\gamma_{yx}\\[2ex]\gamma_{yz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=\gamma_{zy}\\[2ex]\gamma_{zx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=\gamma_{xz}\end{cases}$$

2.2.3　物理方程

物理方程表述应力分量与应变分量之间的关系，弹性力学中应力—应变之间的转换关系也称弹性关系。对于各向同性的线弹性材料，应力通过应变的表达式可用矩阵形式表示：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{E}[(1+\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\sigma}_{ij}-\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}_{kk}\boldsymbol{\delta}_{ij}]\tag{2-6}$$

展开为：