新世纪网络课程建设工程

中央广播电视大学

经济数学基础

线性代数

李林曙　黎诣远　主编

高等教育出版社

经济数学基础

线 性 代 数

李林曙　黎诒远　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是与“新世纪网络课程建设工程”——经济数学基础网络课程相配套的文字教材。全书在编写过程中坚持“数学为体、经济为用”的原则。全书共分4册：网络课程学习指南、微积分、概率论与数理统计、线性代数，涵盖了高等院校本专科经济管理类专业学生必要的数学基础知识。每册书配有学习光盘，可供学生课后使用，有条件的读者也可通过网络直接学习本课程。

本书可供全国各高等院校、广播电视大学、成人高校和职工大学经济管理类及相近专业的学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．线性代数/李林曙，黎诣远主编．
—北京：高等教育出版社，2004.3（2007重印）
ISBN 978-7-04-013783-5

Ⅰ．经… Ⅱ．①李… ②黎… Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材
Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第110930号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2004年3月第1版
印　　张	11.25	印　　次	2007年11月第10次印刷
字　　数	200 000	定　　价	20.80元（含光盘）

物料号　13783-00

前言

这套《经济数学基础》教材是与教育部“新世纪网络课程建设工程”项目——“经济数学基础网络课程”配套的文字教材。

经济数学是指经济管理类专业所用的高等数学,这门课程与一般高等数学相比有其特殊性。因此学习本课程,首先需要正确认识经济与数学的关系。众所周知,任何事物都是质和量的统一体,没有无量的质,更没有无质的量。三百多年前,牛顿的《自然哲学的数学原理》和配第的《政治算术》,开辟了自然科学和社会科学数量化的时代。马克思认为:“一种科学只有在成功地运用了数学以后才算达到了完善的地步。”将数学用于经济学,可以深入揭示仅靠定性分析难以表达的现代经济错综复杂的相互关系及其变动趋势,可以提出经济决策的方向、力度和边界,可以预测这些决策的直接效果和间接效果。随着社会经济的快速发展,特别是社会主义市场经济的不断完善,加速提高经济效益和实现经济管理现代化的要求日益迫切,数量经济研究和定量分析越来越受到重视和加强,现实需要我们在经济管理和经济研究中卓有成效地运用数学方法解决实际问题,这些都对高等教育经济与管理学科各专业基础教学提出了更高的要求,也使经济数学课程成为高等教育经济与管理学科各专业学生的必修课之一。

这套《经济数学基础》教材坚持“数学为体”、“经济为用”的原则,根据课程教学大纲要求,包括一元函数微积分、二元函数微分学、概率论与数理统计和线性代数等内容,涵盖了高等教育经济与管理学科各专业必要的数学基础知识,并在内容选择和教学方法的改革上做了许多有益探索。首先,它立足于将经济有机地融于数学。每章开始都有一个短小精悍的“引子”,用当前经济生活中的热点问题激发学生学习有关数学知识的兴趣;在阐述内容时,尽可能以经济为例,使数学与经济不断结合;最后又以所学数学知识,回过头来分析和逐步解决“引子”提出的经济问题。这样,既帮助学生理解有关的数学原理和方法,又帮助学生了解它们在经济管理中的应用。专题讲座则通过若干问题的论述,进一步说明经济学怎样运用数学分析和解决问题。其次,在编写过程中,贯彻“必需、够用”的指导思想,重视基本概念,重视基本运算技能的训练,重视培养学生运用数学方法解决实际问题的能力,而不拘泥于理论推导和繁琐的运算。在保证数学概念准确的基础上,在引例、解释和应用诸多方面力求更多联系与经济有关的问题。此外针对网络课程的特点,在文字叙述上力求深入浅出、通俗易懂、便于自学。

这套《经济数学基础》教材共分四个分册:《网络课程学习指南》、《微积分》、《概率论与数理统计》和《线性代数》。《网络课程学习指南》是指导刚刚进入大学的同学如何进入经济数学的学习,如何利用“经济数学基础网络课程”进行自主学习,这一册中还包括为同学拓展学习本课程相关内容专设的。专题讲座的全部文稿。《微积分》、《概率论与数理统计》和《线性代数》三册均是主、辅合一的教材。每章的基本知识内容列前,“学习指导”列后。为了突出基本内容,每章内容的正文、例题、习题都以不同字体排印,重要概念标以黑体,每节都列出关键词、练习题。每章末都配有习题。值得一提的是,每章末还附有需要读者自己完成的小结,主要是通过一些简单的方法引导读者自己回顾本章主要概念、公式、定理和方法等,使读者在巩固所学知识的同时,逐

步掌握自主学习的方法和技能,学会学习。

本书编写分工如下:黎诣远:每章引子。各分册为:

《网络课程学习指南》分册。顾静相:预备知识;陈卫宏、胡新生:使用说明;黎诣远:专题讲座。

《微积分》分册。微分学部分:陈卫宏:第 1 章;赵坚:第 2 章;顾静相:第 3 章;周永胜:第 4 章。积分学部分:李林曙:第 1、2 章、第 3 章 3.1~3.5 节;陈卫宏:第 3 章 3.6 节。

《概率论与数理统计》分册,张旭红:第 1、4、5 章;冯泰:第 2、3 章。

《线性代数》分册,顾静相:第 1 章;赵坚:第 2 章;张旭红:第 3 章。

顾静相和冯泰作过初稿审阅,全书由李林曙和黎诣远总纂定稿。

需要特别指出的是,本套教材的编写是在高等教育出版社出版的《经济数学基础》(黎诣远主编、李林曙副主编)和《跟我学经济数学》(李林曙等编著)的基础上进行的,自始至终得到本课程强大的专家学者组的大力支持和直接参与,他们是:

经济数学基础学术咨询委员会:

乌家培 国务院学位委员会应用经济学科第二、三、四届评议组成员 国家信息中心专家委员会名誉主任 中国数量经济学会名誉理事长 中国信息经济学会名誉理事长 中国信息协会副会长

张恭庆 第三世界科学院院士 中国科学院院士 北京大学教授

李子奈 教育部经济学学科教学指导委员会委员 中国数量经济学会副理事长兼高等院校专业委员会主任 北京市经济学总会副会长 清华大学教授、经济系主任、中国经济研究中心主任

叶其孝 北京理工大学教授 全国大学生数学竞赛组委会副主任

胡显佑 中国人民大学教授 北京经济数学学会理事长

施光燕 大连理工大学教授 中央广播电视大学经济数学基础主讲

柳重堪 北京航空航天大学教授 中央广播电视大学高等数学主讲

经济数学基础教学设计顾问委员会:

任为民 中央广播电视大学教授 教育部现代远程教育专家委员会委员 教育部现代远程教育资源建设专家组成员

孙天正 中央广播电视大学教授

乌美娜 北京师范大学教授 教育部全国教师教育课程资源专家委员会委员 教育部现代远程教育工程资源建设基础项目专家

文 丽 北京大学教授 中央广播电视大学高等数学主讲

于 琛 人民教育出版社编审 课程教材教法研究所研究员

赵建华 北京气象学院大气视听研究所

教材审定专家:

施光燕 大连理工大学教授 中央广播电视大学经济数学基础主讲

叶其孝 北京理工大学教授 全国大学生数学竞赛组委会副主任

胡显佑　中国人民大学教授　北京经济数学学会理事长
孙天正　中央广播电视大学教授
柴全战　辽宁广播电视大学教授　教学处长
胡秀珍　天津广播电视大学副教授　理工处处长
张旭辉　南宁广播电视大学副教授

高等教育出版社的杨祥、张爱和、文小西、高尚华、郭思旭、郑洪深、胡凯飞、薛春玲等，为教材质量把关付出了辛勤劳动。

在此一并向他们表示衷心感谢。

本套教材的各模块及其组合可供各类高等院校经济与管理学科各专业根据其教学需要自行选用。对于广大经济管理工作者来说，本书在充实数学知识和掌握定量分析方法上也大有裨益。

毕竟，在我国开展网上教学还是刚刚起步，如何处理网络课程与文字教材之间的关系，我们还缺乏经验，加之作者水平所限，书中难免有不当之处，敬请使用本教材的师生和其他读者，毫无保留地提出批评和建议，以期及时修正。

编　者
2003年9月于北京

序

经济数学,即在经济中应用的数学,是经济学与数学相互交叉的一个新的跨学科领域。

我国正处在社会主义初级阶段。这个阶段的社会主义建设是以经济建设为中心的。围绕这个中心,各门学科都发挥着自己的作用。经济学与数学结合起来,发挥着比它们各自的作用还要大的作用。

大家知道,数学作为一门主要的基础学科,有着极其广泛的应用。它的应用领域,首先是自然科学,进而到工程技术,再扩展到社会科学。在社会科学中,数学的首要应用领域,无疑是经济学。

经济学为了更好地对经济工作发挥指导作用,需要引入和运用数学,用数量分析来补充和发展质的分析,使这两种分析相互结合产生更大的威力。经济学中的均衡与优化等问题,以及经济工作中的计划、预测、评估。组织、控制等管理(包括决策)问题,都需要应用数学及其分支学科进行分析研究、计算求解。特别是电子计算机用于经济学和经济管理工作以来,数学模型的建立与运用,模拟实验方法的制订与实施,更离不开数学的帮助。借助于电子计算机,数学能成功地解决各类静态的和动态的、线性的和非线性的经济问题。所以,可以说,数学已成了经济学家和经济工作者的"良师益友",或者说极其有用的重要工具。

当然,两个不同学科的交叉影响,决不会是单向的,往往总是双向的。经济问题的各种特殊性,如多维性、随机性、不确定性、模糊性、突发性、利益冲突性、信息非对称性等等,为数学的进一步发展提供了契机,促进新的数学方法的诞生。对策论的发展就是一个有说服力的例证。最近十多年来,对策论在经济学中所起的作用,正如许国志院士所说的那样,远比它在数学中的作用大得多。

经济数学不同于数理经济学和数量经济学。数理经济学是用数学语言表述的或用数学方法分析的经济学。数量经济学是在经济理论质的分析的基础上,利用数学方法和计算技术,研究经济数量关系及其变化规律的学科。经济数学作为在经济管理中应用的数学,自然要以数学为主体,以其应用的对象即经济为客体。它与数理经济学不同,有强烈的实用性;也与数量经济学不同,属于应用数学。

经济数学既要提高,更要普及。鉴于普及的需要,我国曾在1991年由中国经济出版社发行过陈克式、陈开周、崔福荫三位同志主编的《经济数学辞典》,许国志院士和我还为该辞典写过序。现在,摆在我们面前的这本由李林曙黎诣远同志主编的《经济数学基础》教材,是高等教育经济管理类各专业的基础课,为中央广播电视大学重点建设课程和全国电大共建课程多种媒体一体化教材的主教材之一,并被作为网络课程列入教育部启动的"新世纪网络课程建设工程",其普及效果将会更大和更好。

从内容看,教材不同于辞典,非用来查阅的工具书,是用来教学的课本,不仅有基础知识和运算方法;而且还有例题和习题,旨在使学生熟练掌握基本内容和提高解决实际问题的能力。由于这本教材的主要对象是高等成人业余教育的学生,其内容是针对他们入学基础的特点,适应他们今后学习经济管理课程和从事经济管理工作的需要,而设计与选定的,包括微积分、概率论与数

理统计、线性代数等。把经济融于数学。每章开始都有引子,用经济热点问题激发学生学习有关数学知识的兴趣,进而引导学生运用每章所学的数学通过分析引子提出的经济问题来加深对数学原理和方法的理解,以提高他们今后在经济管理工作中应用数学的能力。

从形式看,《经济数学基础》既有文字教材,又有音像教材,还有其他媒体如计算机辅助教学(CAI)课件、文具卡等教材,首次实现了同类教材的多种媒体一体化。由于主媒体与强化媒体有机配合,其他媒体有效补充,这就会有力地促进经济数学在我国的远距离开放教育。随着我国1994年以来信息基础设施大规模建设的推进,远程教育如同远程医疗一样逐步成为现实。多媒体的宽带高速教育网正从根本上改变传统的教育方式。多媒体一体化教材和网络课程建设工程的出现,为网络化远程教育创造了条件,使师生们共同感受到信息时代在我国已经来到。

《经济数学基础》是全国电大高等财经科各专业的必修基础课,也是我国教育领导部门指定的11门财经课的核心课程之一,还是中央电大的一门重点课程,也是已建成的200多门新世纪网络课程中的一门重要课程。我衷心祝愿这套教材出版后产生为编写者和组织者所始料不及的深远而广泛的社会影响。

乌家培

一九九八年五一节,

改于二〇〇三年七月廿六日

策划编辑 胡凯飞
责任编辑 薛春玲
封面设计 王 雎
责任绘图 尹文军
版式设计 陆瑞红
责任校对 王 雨
责任印制 陈伟光

目　录

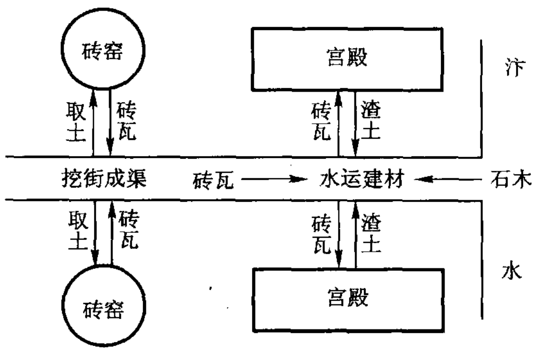
第 1 章　行列式 ………… 2
1.1　行列式的定义 ………… 2
1.2　行列式的性质 ………… 9
1.3　行列式的计算 ………… 18
1.4　克拉默法则 ………… 25
跟我学 ………… 32
第 2 章　矩阵 ………… 50
2.1　矩阵的概念 ………… 50
2.2　矩阵的运算 ………… 55
2.3　几类特殊矩阵 ………… 63
2.4　n 阶方阵的行列式 ………… 66
2.5　可逆矩阵与逆矩阵 ………… 69
2.6　矩阵的初等行变换和初等矩阵 ………… 77
2.7　矩阵的秩 ………… 84
2.8　分块矩阵 ………… 88
跟我学 ………… 99
第 3 章　线性方程组 ………… 117
3.1　n 元线性方程组 ………… 118
3.2　消元法 ………… 121
3.3　线性方程组解的情况判定 ………… 131
跟我学 ………… 141
练习与习题答案 ………… 160
参考文献 ………… 168

引子

晋国公重建皇城

距今1000年前，开封一场大火，北宋皇城毁于一旦. 宋真宗任命晋国公丁渭，主持重建全部宫室殿宇.

当时，皇城都是砖木结构，建筑材料必须从很远的地方通过汴水运进. 丁渭深思熟虑，规划并实施了一个至今令人拍案叫绝的施工方案，见图.

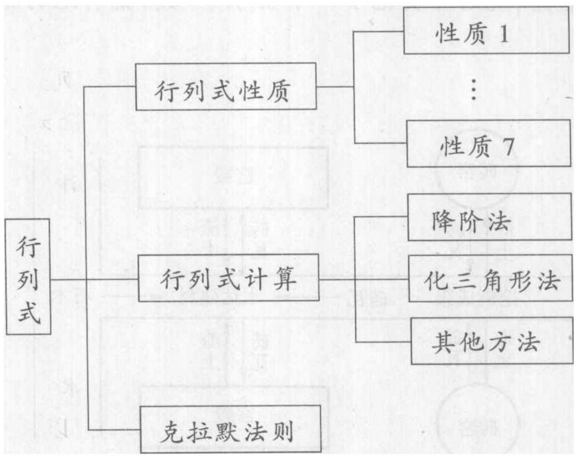


按照这一方案，挖街取土，就地烧砖，渠成引水，运送建材（本地砖瓦和外地石木），宫殿完工，渣土回填，恢复街道. 这就巧妙地解决了取土之难，运输之难，清场之难，可谓"一石三鸟"，使重建皇城事半功倍.

晋国公重建皇城的施工方案，体现了运筹学的朴素思想. 要使重建工程的各个工序，在时间、空间上彼此协调，环环相扣，就需要运用行列式的相关知识，进行精确计算.

第1章 行 列 式

本章知识结构



在生产经营活动和科学技术中,碰到的许多问题都可以直接或近似地表示成一些变量之间的线性关系,因此研究线性关系是非常重要的.线性代数在研究变量之间的线性关系上有着重要应用,而行列式是研究线性代数的重要工具.本章在复习二阶、三阶行列式的基础上,进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算以及解 n 元线性方程组的克拉默法则.

4.1.1

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中,用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,那么方程组(1.1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为了便于表示上述结果,规定记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

在上式左边的记号中共有两行和两列,故称之为二阶行列式,其中的每个数称为元素,横排称为行,竖排称为列,从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

[!] 二阶行列式是一特定算式,是可以求值的.

利用二阶行列式的概念,把方程组(1.1.1)中未知量 x_1, x_2 的系数用二阶行列式表示

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

把(1.1.2)式中的分子分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

[?] 1. 行列式 D_1, D_2 与 D 的关系是什么?

故当方程组(1.1.1)的系数行列式 $D \neq 0$ 时,它的解就可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.1.3}$$

例 1 解二元一次方程组

[!] 利用公式(1.1.3)求解.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 1 \times 1$$
$$= -6 - 1 = -7 \neq 0,$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -14, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

所以由公式(1.1.3)知,方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-14}{-7} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

[!] 将 x_1, x_2 的值代入方程组验证.

类似地,为了便于表示三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

的解,引进记号

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+ \\ &\quad (-1)^{1+2}a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+ \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+ \\ &\quad a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

称为三阶行列式.其中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第一行、第一列后剩下的元素按原来顺序组成的二阶行列式,称它为元素 a_{11} 的**余子式**,记作 M_{11},即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地,记

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

并令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (i,j=1,2,3),$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

? 2.代数余子式与余子式的关系是什么?

因此,三阶行列式也可以表示为

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}, \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

而且它的值可以转化为二阶行列式计算.公式(1.1.5)是三阶行列式按第一行的展开式.

利用三阶行列式的概念,当方程组(1.1.4)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,它的解也可以简洁地表示为:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D},\tag{1.1.6}$$

其中，D_1,D_2,D_3 是将方程组(1.1.4)中的系数行列式 D 的第一、二、三列分别换成常数列得到的三阶行列式.

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-4&2\\3&0&-3\\-2&4&5\end{vmatrix}$.

[!] 利用按第一行展开式计算.

解

$$D=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-3\\4&5\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-3\\-2&5\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0\\-2&4\end{vmatrix}$$
$$=1\times12+4\times9+2\times12$$
$$=72.$$

例 3 解三元一次方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=13,\\x_1+x_2+x_3=10,\\2x_1+3x_2-x_3=1.\end{cases}$$

解 利用公式(1.1.6)，先计算方程组的系数行列式. 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}$$
$$=1\times(-4)+1\times(-3)+2\times1$$
$$=-5\neq0,$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix}13&-1&2\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-5,D_2=\begin{vmatrix}1&13&2\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&13\\1&1&10\\2&3&1\end{vmatrix}=-35,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=7.$$

[!] 将 x_1,x_2,x_3 的值代入方程组验证.

1.1.2　n 阶行列式

前面我们用二阶、三阶行列式表示了二元、三元线性方程组的解，那么 n 个方程的 n 元线性方程组的解是否也能利用行列式将它表示出来呢？为此我们引进 n 阶行列式的概念.

请阅读疑难分析一

定义 1.1　由 n^2 个数排列成 n 行、n 列的特定算式，记作 D.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，简称行列式，其中数 a_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列的元素 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

当 $n=1$ 时，规定：

$$D=|a_{11}|=a_{11},$$

n 阶行列式

3. 当 $n=2,3$ 时是几阶行列式的展开式？并写出展开式.

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1.1.7}$$

其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

称为 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 是由 D 划去第 i 行和第 j 列后，剩下元素按原次序构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的余子式.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & -4 & 8 & 0 \\ 9 & -7 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{23} 的余子式即为划去第二行和第三列后的三阶行列式

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&2&4\\-3&-4&0\\9&-7&-6\end{vmatrix}.$$

而 a_{23} 的代数余子式即为 M_{23} 前再加一符号因子

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1&2&4\\-3&-4&0\\9&-7&-6\end{vmatrix}.$$

定义 1.1 中的(1.1.7)式是 n 阶行列式 D 按第一行的展开式.通过二阶、三阶行列式的展开式可以推出:n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 个乘积项,每个乘积项中含有 n 个取自不同行、不同列的元素,并且带正号和带负号的项各占一半.

! $n!=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$

例 4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\8&9&0&0\\4&7&1&0\\-2&-4&-6&7\end{vmatrix}.$$

! 利用公式(1.1.7)计算.

解　由于第一行只有一个非零元素,故按第一行展开

$$D=(-1)\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}9&0&0\\7&1&0\\-4&-6&7\end{vmatrix}$$

再按第一行展开

$$=(-1)\times9\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&0\\-6&7\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times9\times1\times7=-63$$

我们将行列式中由左上角至右下角的对角线称为**主对角线**.如例 4 中,行列式在主对角线以上的元素全为零,则称其为**下三角行列式**.同理,主对角线以下元素全为零的行列式,则称其为**上三角行列式**.今后,上、下三角行列式统称为**三角行列式**.由例 4 的计算过程可得一般结论:下三角行列式的值就等于主对角线元素的积.即

! 请记住该结论

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5　计算下列行列式: