

地球物理测井技术与应用丛书
GEOPHYSICAL WELL LOGGING TECHNOLOGY & APPLICATION

主 编
王敬农 汤天知 张辛耕

电测井算法

张庚骥 著

ELECTRIC LOGGING ALGORITHM



石油工业出版社

地球物理测井技术与应用丛书

主编 王敬农 汤天知 张辛耘

电测井算法

张庚骥 著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书结合电法测井仪器的工作原理,详细叙述了电法测井方法研究中所用到的数值计算方法。包括:有限元素法、混合法、逐次逼近法和积分方程法。这些计算方法在原有基础上经过作者进一步补充和完善,近年来在测井领域已得到广泛应用。

本书适用于石油测井和相关地球物理专业的研究人员、工程技术人员阅读,也可作为高等院校相关专业师生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电测井算法/张庚骥著.

北京:石油工业出版社,2009.12

ISBN 978-7-5021-7425-5

I. 电…

II. 张…

III. 电测井-算法

IV. P631.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第180902号

出版发行:石油工业出版社

(北京安定门外安华里2区1号 100011)

网 址:www.petropub.com.cn

编辑部:(010) 64523593

发行部:(010) 64523620

经 销:全国新华书店

印 刷:石油工业出版社印刷厂

2009年12月第1版 2009年12月第1次印刷

787×1092毫米 开本:1/16 印张:10.75

字数:275千字 印数:1—3800册

定价:42.00元

(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)

版权所有,翻印必究

序

测井是地球物理测井的简称。测井技术是应用物理学（电磁学、声学、核物理学等）的基本原理解决地质及工程问题的一门综合性应用技术，其作用贯穿石油勘探开发全过程，已发展成为石油工程技术服务的主干技术之一。纵观测井技术 80 余年的发展，一个显著的特点就是，物理学、电子信息、自动化、计算机和新材料等领域的最新成果很快在测井技术中得到应用。

中国石油集团测井有限公司成立以来，大力发展成套测井装备，精心研究测井新方法新技术，全面提升测井技术水平，各项工作取得丰硕成果，为油气勘探开发作出了重要贡献。为了使广大测井工程师能在较短时间内掌握自主研发的装备和软件所包含的技术和方法，中国石油集团测井有限公司组织编写了这套《地球物理测井技术与应用丛书》。《丛书》的作者是工作在生产、科研和教学一线的测井专家和教授，《丛书》是他们科研和教学工作的积淀和凝练。组织出版这套《丛书》，有利于测井学科的传承和发展，是一件意义深远的再创新工作。

从知识结构和谋篇布局上看，《丛书》是一个有机的整体，但各分册又自成体系。《测井电子信息技术》是测井仪器装备所用的各类器件、模块的基础，《测井场论》是测井探测器设计、解释评价的依据，《电测井算法》集中反映了张庚骥教授电法测井理论和方法的精髓。《测井场论》和《测井电子信息技术》以新颖的角度切入，更加突出测井与物理学、电子信息技术等学科领域的紧密结合，这在测井技术理论教材的编写上是一次大胆的尝试和创新。《EILog 快速与成像测井系统》、《油气层测井识别与评价》和《LEAD 测井综合应用平台》剖析了中国石油集团测井有限公司在用的主流测井装备和处理解释软件，分别对应测井技术体系的数据采集、解释评价和测井软件三个技术板块。

这套《丛书》构思缜密、布局精巧、门类齐全，是一套理论与实际相结合的、高水平的专业教材，十分难得。我愿向大家推荐这套《丛书》，它不仅可供测井专业技术人员培训之用，也可作为大专院校相关专业在校本科生、研究生的参考书和教学用书。

陆大卫

2009 年 8 月 27 日

前 言

在国内，介绍电法测井理论的书籍很多，但是，还没有一本专门介绍电法测井数值模拟方法的书籍。因此，测井界急需一本能够系统阐述电法测井数值模拟方法的书籍，并且能够把最新方法纳入其中。

多年来，作者对电磁场理论进行了深入的研究，本书将这些研究成果与实际电法测井仪器的工作原理紧密结合，详细叙述了电法测井方法研究中所用到的几个数值计算方法。其中一些计算方法在原有基础上经过进一步补充和完善，近年来在测井领域已得到广泛应用。

第一章的有限元素法是比较成熟的数值模拟方法，在电法测井仪器的理论研究中起到了重要作用。在预先设计的理论模型下，通过有限元素方法可以有效模拟电法仪器探头的测井响应。由于这种方法的网格剖分非常灵活，因此，它可以模拟二维和三维的复杂问题。利用这种方法进行测井仪器的数值模拟比较普遍，但是这种方法要求解整个计算区域内划分的每个单元格的数值解，因此速度较慢，特别是三维问题，求解速度会更慢，计算效率更低。第二章的混合法又叫数值模式匹配法（NMM），此方法只适应于轴对称问题，它最先应用在感应测井中。由于此方法是数值法和解析法混用，所以称为混合法。混合法的计算效率远远高于有限元素法。第三章的逐次逼近法可以应用在直流和交流电场中，在交流电场的应用中，逐次逼近算法（SAM）与FFHT算法相结合，形成了一种新的计算感应测井响应的算法：SAM - FFHT。这种算法与其他成熟的计算感应测井的算法——有限元素法FEM、数值模式匹配法NMM相比较，无论在计算精度方面还是在速度方面都不逊色。第四章的积分方程法中介绍了稳流电场和交流电场的积分方程方法。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点或错误，恳请读者批评、指正。

编 者

2009年3月1日

目 录

第一章 有限元素法	(1)
第一节 将求定解问题归结为求泛函极值问题	(1)
第二节 描述稳流场的电流方式	(6)
第三节 离散化	(13)
第四节 关于电流势的方程和约束	(21)
第五节 强约束和弱约束	(24)
第六节 各种侧向测井电极系的处理方法	(26)
第七节 用电流方式处理自然电位	(36)
第二章 混合法	(45)
第一节 混合法在直流电场中的应用——纵向解析径向数值	(45)
第二节 混合法应用于自然电位	(57)
第三节 混合法在直流电场中的应用——纵向数值径向解析	(64)
第四节 混合法在时谐场中的应用	(78)
第三章 逐次逼近法——响应作为参数泛函的 Taylor 展开	(88)
第一节 直流电场的逐次逼近解法以及泛函微商的引出	(88)
第二节 逐次逼近解法正确性的几个验证	(94)
第三节 直流电测井的几何因子	(104)
第四节 逐次逼近法在时谐场中的应用	(114)
第五节 逐次逼近解法应用于时谐电场正确性的验证	(118)
第六节 视电导率及各阶几何因子	(125)
第七节 感应测井逐次逼近法与快速 Fourier Hankel 变换结合	(129)
第四章 积分方程法	(132)
第一节 稳流电场的第一个积分方程	(132)
第二节 稳流电场的第二个积分方程	(138)
第三节 电极系的处理方法	(144)
第四节 交流电测井响应的积分方程解法	(146)
参考文献	(164)

第一章 有限元素法

第一节 将求定解问题归结为求泛函极值问题

在这里，我们只考虑具有旋转对称性的电极系，如电阻率测井电极系的三侧向、七侧向、双侧向等，不包括贴井壁的电极系，如微电极、微侧向、微球形聚焦等，并且电极系周围的模型介质同样具有旋转对称性。如果二者的对称轴重合，那么不论介质参数还是场都具有旋转对称性。如果采用柱极坐标系 ρ, φ, z ，不论介质参数还是场都只是 ρ 和 z 的函数，而与 φ 无关。这样，三维问题便简化为二维子午面 (ρ, z) 上的问题。如图 1-1 所示，这里把子午面上除掉电极系所占面积称为求解区 Θ 。它应当向 ρ 和 z 方向无限延伸，但是在数值计算中，没有可能也没有必要这样做。我们在 ρ 方向和 z 方向都设置一个边界， $\rho \leq \rho_\infty$ 和 $|z| \leq z_\infty$ 。 ρ_∞ 和 z_∞ 都是有限值，但是我们称它们为无限远边界。只要 ρ_∞ 和 z_∞ 足够大，则令电势 $U(\rho_\infty, z) = U(\rho, \pm z_\infty) = 0$ 所引起的电势 $U(\rho, z)$ ($0 \leq \rho < \rho_\infty, |z| < z_\infty$) 的计算误差就在允许范围之内。这样，求解区 Θ 就成为一个有限区域，它的边界用 Ξ 表示。 Ξ 可以分为以下 4 个部分：(1) 无限远边界；(2) 金属电极表面；(3) 电极系的绝缘环表面；(4) $\rho = 0$ 的边界。(1)、(2) 两种边界用 E 表示，其中 E_0 代表无限远边界； E_j 表示电极 j 的表面， $j = 1, \dots, k$ 。在图 1-1 中， $k = 3$ 。 E_j “前面”的电极是 E_{j+1} 。这里的“前”和“后”按右手规则决定：右手的拇指垂直于纸面向上，中指指向 Θ 的内部，食指的方向就是“前方”。下面一直遵守这样的“前”和“后”的规定。(3)、(4) 两种边界用 D_j 表示。 E_j 前面的绝缘环表面(或 $\rho = 0$ 的边界)是 D_{j+1} 。这样，沿边界 Ξ 向前绕行一周，依次经过 $E_0, D_1, \dots, E_k, D_{k+1}, E_0$ 。

所要解决的定解问题是：求出一个连续的势函数 U ，它满足以下各条件：

(1) 在 Θ 内它满足方程

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-1)$$

式中 σ ——介质的电导率。

很显然，

$$-\sigma \frac{\partial U}{\partial \rho} = \text{电流密度的 } \rho \text{ 分量 } j_\rho$$

$$-\sigma \frac{\partial U}{\partial z} = \text{电流密度的 } z \text{ 分量 } j_z$$

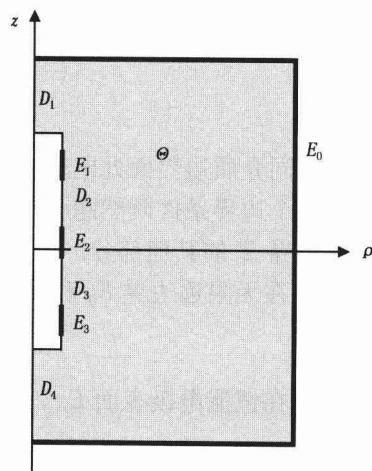


图 1-1 求解区 Θ 及其边界 Ξ

在柱极坐标系里，考虑到轴对称性，有 $j_\varphi = 0$ ，式 (1-1) 就等同于

$$-\rho \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

它隐含着两个边界条件：

①在 $\rho = 0$ 的边界，式 (1-1) 给出

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0 \quad (1-2)$$

这正是 $\rho = 0$ 的边界条件。

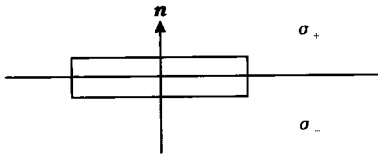


图 1-2 两不同介质边界处的边界条件

②考虑两个不同介质的界面。设在界面两侧电导率分别是 σ_+ 和 σ_- 。作一扁柱面，其顶面和底面在界面两侧并且平行于界面。它们的面积是 A ，线性尺度是一阶无限小，而它们之间的距离是二阶无限小，如图 1-2 所示。在 $\rho \neq 0$ 处，式 (1-1) 等价于 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ，根据 Gauss 定理，

$$(j_n)_+ da = (j_n)_- da$$

式中 n ——边界的法线方向，在边界两侧有同一指向，比如说，由 σ_- 指向 σ_+ ；

da ——边界上的面积元。

此式可以换一种写法，成为

$$\left(\sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right)_+ = \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right)_- \quad (1-3)$$

这正是不同介质界面处电势 U 所应满足的边界条件。

这两个边界条件既然隐含在方程 (1-1) 之中，以下的讨论中就不再提到它们。我们只考虑边界 Ξ 的其他部分。

(2) 在无限远边界 E_0 和恒压电极表面 E_{v_1}, \dots, E_{v_j} 上， U 服从强约束条件

$$U_p = \text{已知常数}, p = 0, v_1, \dots, v_j \quad (1-4)$$

(3) 在恒流电极表面 E_{c_1}, \dots, E_{c_m} 上，

$$2\pi\sigma_m \int_{E_{c_p}} dS \rho \frac{\partial U}{\partial n} = I_{c_p}, p = 1, \dots, m \quad (1-5)$$

式中 σ_m ——钻井液电导率；

dS ——子午面上电极表面的线元；

I_{c_p} ——电极 E_{c_p} 所供的电流；

n ——电极 E_{c_p} 处的外法线。

在恒流电极表面上， U 服从弱约束条件

$$U_p = \text{未知常数}, p = c_1, \dots, c_m \quad (1-6)$$

(4) 在绝缘边界 D_j ($j = 1, \dots, k+1$)，

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (1-7)$$

式 (1-4) 和式 (1-6) 统称第一类边界条件；式 (1-5) 和式 (1-7) 统称第二类边界条件。

以上是定解问题中函数 U 所应满足的全部条件。这些条件等同于使 U 的某一泛函达到极值所应满足的条件。所考虑的泛函是

$$\Phi(U) = \Phi_1(U) - \Phi_2(U) \quad (1-8)$$

式中

$$\Phi_1(U) = \pi \iint_{\Theta} d\rho dz \rho \sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1-9)$$

$$\Phi_2(U) = \sum_{j=1}^k I_j U_j \quad (1-10)$$

这里, I_j 和 U_j 是电极的电流和电势, 求和是对所有电极进行的。现在来看看 Φ_1 和 Φ_2 的物理意义。众所周知, 在介质中, 单位体积消耗的功率是

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma \nabla U \cdot \nabla U$$

在旋转对称的条件下, 对柱极坐标系中,

$$\nabla U = \hat{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z}$$

所以

$$\text{单位体积消耗的功率} = \sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right]$$

在旋转对称的条件下, 体积元是

$$2\pi \rho d\rho dz$$

将以上两表达式与式 (1-9) 相比较, 可见, Φ_1 是求解区 Θ 内消耗的功率的一半。式 (1-10) 所表达的 Φ_2 的物理意义很明显, 它是电极所供的功率。

用 χ 代表定义在求解区 Θ 内满足第一类边界条件式 (1-4) 和条件式 (1-6) 的连续函数的集合。下面的命题将定解问题等同于寻求使泛函 $\Phi(U)$ 达到极值的函数 U ;

在集合 χ 中, 满足方程式 (1-1) 和第二类边界条件式 (1-5)、条件式 (1-7) 的函数 U 使式 (1-8) 所定义的泛函 $\Phi(U)$ 达到极值; 反之, 在集合 χ 中, 使泛函 $\Phi(U)$ 达到极值的函数 U 必然满足方程 (1-1) 和第二类边界条件式 (1-5)、条件式 (1-7)。

我们只证明命题的后半部分, 即方程式 (1-1) 和条件式 (1-5)、条件式 (1-7) 的必要性。充分性的证明更容易, 这里不再赘述。

设函数 U 由 U 变化到 $U + \delta U$ (δU 也是子午面上坐标 ρ, z 的函数)。与此相应, 泛函 Φ 也由 Φ 变化到 $\Phi + \delta \Phi$ 。根据变分法,

$$\delta \Phi = 2\pi \iint_{\Theta} d\rho dz \rho \sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \delta \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] - \sum_{p=1}^k I_p \delta U_p$$

因为函数 U 使泛函 $\Phi(U)$ 达到极值, 所以

$$\delta \Phi = 0$$

我们即将看到：从这一等式可以导出方程式 (1-1) 和第二类边界条件式 (1-5) 及条件式 (1-7)。

δU 代表两个函数 U' 和 U 之差

$$\delta U = U' - U$$

同样, $\delta\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)$ 代表两函数偏导数之差

$$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial U'}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (U' - U) = \frac{\partial}{\partial \rho} \delta U$$

同理

$$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} \delta U$$

将这两个公式代入 $\delta\Phi$, 并作分部积分, 得

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & 2\pi \iint_{\phi} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta U \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial z} \delta U \right) \right] \\ & - 2\pi \iint_{\phi} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \delta U - \sum_{p=1}^k I_p \delta U_p \end{aligned} \quad (1-11)$$

上式第一个积分的被积函数是二维子午面上的散度。根据二维的 Gauss 定理, 它可以变成边界 Ξ 上的线积分

$$2\pi \int_{\Xi} dS \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial n} \delta U \quad (1-12)$$

式中 dS ——子午面上的线元;

$2\pi\rho dS$ ——这个线元旋转而成的面积元。

以下分几种情况讨论这个积分。

(1) 在无限远边界 E_0 和恒压电极表面 E_{v_1}, \dots, E_{v_j} , 由于函数 U 是集合 χ 中的函数, 应满足完全约束式 (1-4), 所以 $\delta U_0 = \delta U_{v_1} = \dots = \delta U_{v_j} = 0$, 从而式 (1-12) 的积分不包含 $E_0, E_{v_1}, \dots, E_{v_j}$ 。

(2) 由于函数 U 满足式 (1-6) 所给的条件, 在恒流电极表面 E_{c_p} 取常数值 U_p , 其变化量也取常数值 δU_p 。式 (1-12) 可以写成

$$\left(2\pi\sigma_m \int_{E_{c_p}} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} \right) \delta U_p$$

把这一项同式 (1-11) 中求和号下的相应项结合起来, 得到一项

$$\left(2\pi\sigma_m \int_{E_{c_p}} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} - I_p \right) \delta U_p$$

(3) 在绝缘环表面 D_j ($j=1, \dots, k+1$) 处, 式 (1-12) 成为

$$2\pi\sigma_m \int_{D_j} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} \delta U$$

第一项积分经过这三类不同的处理后, 式(1-11)变成

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & -2\pi \iint_{\Theta} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial\rho} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \delta U \\ & + \sum_{p=1}^m \left(2\pi\sigma_m \int_{E_{c_p}} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} - I_p \right) \delta U_p + 2\pi\sigma_m \sum_{j=1}^{k+1} \int_{D_j} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} \delta U \end{aligned}$$

δU 的变化是任意的, 为了在 δU 的任意分布之下都能得到 $\delta\Phi = 0$, 式中与 δU 相乘的因子都必须为零。这就是方程式(1-1)和边界条件式(1-5)、条件式(1-7)。这样就完成了条件式(1-1)、条件式(1-5)和条件式(1-7)的必要性的证明。

下面证明, 当泛函 Φ 达到极值时, 介质体 Θ 内所损耗的功率等于电极所供给的功率。这是因为, 根据式(1-9), Θ 内所损耗的功率是

$$\begin{aligned} 2\Phi_1(U) &= 2\pi \iint_{\Theta} d\rho dz \rho \sigma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= 2\pi \iint_{\Theta} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\sigma\rho U \frac{\partial U}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma\rho U \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad - 2\pi \iint_{\Theta} d\rho dz U \left[\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial\rho} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

根据式(1-1), 最后一个积分为零。将二维的 Gauss 定理应用于第一个积分, 得

$$2\Phi_1(U) = 2\pi \int_{\Xi} dS\sigma\rho U \frac{\partial U}{\partial n}$$

由于在绝缘边界(包括 $\rho = 0$ 的边界) $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, 在无限远边界 $U = 0$, 积分只在电极表面进行。因在电极表面 U 是常数, 可以提到积分号外, 得到

$$2\Phi_1(U) = \sum_{j=1}^k U_j \left(2\pi\sigma_m \int_{E_j} dS\rho \frac{\partial U}{\partial n} \right) = \sum_{j=1}^k U_j I_j$$

以上的讨论也适用于线性元件组成的网络。在网络中, A 点经电导 G_1, \dots, G_n 与结点 $1, \dots, n$ 相连, 并且与电流为 I_A 的电流源相连。网络中功率损耗之半是

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i (U_A - U_i)^2 + \text{不含 } U_A \text{ 的项}$$

电源所供的功率是

$$\Phi_2 = U_A I_A + \text{不含 } U_A \text{ 的项}$$

为使 $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ 取极值, 必须

$$\frac{\partial\Phi}{\partial U_A} = 0$$

由此得

$$\sum_{i=1}^n G_i(U_A - U_i) - I_A = 0$$

这就是关于结点 A 的 Kirchhoff 方程。这就是说，“ Φ 取极值”和“各结点电势满足 Kirchhoff 方程”是等价的。

网络中的功率损耗又可以写成

$$2\Phi_1 = \sum_n G_n (U_j - U_k)^2$$

求和是对所有电导进行的， j, k 是电导 G_n 两端的结点。由于

$$G_n (U_j - U_k)^2 = G_{jk} U_j (U_j - U_k) + G_{kj} U_k (U_k - U_j)$$

其中

$$G_{jk} = G_{kj} = G_n$$

$2\Phi_1$ 的表达式中对电导的求和可以变成对结点的求和

$$2\Phi_1 = \sum_j U_j \sum_k G_{jk} (U_j - U_k) \quad (1-13)$$

式中， k 代表与结点 j 有电导相连的结点，求和是对所有这样的结点进行的。由于在每个结点处 Kirchhoff 方程都成立，所以

$$\sum_k G_{jk} (U_j - U_k) = I_j \quad (1-14)$$

式中 I_j ——结点 j 所连电源供给的电流。

如果结点 j 不与电源相连，则 $I_j = 0$ 。将式 (1-14) 代入式 (1-13)，得

$$2\Phi_1 = \sum_j U_j I_j$$

也就是说，网络的功耗等于电源所供的功率。

由于本节所涉及的未知函数是电势，我们称之为描述稳流场的电势方式。下一节我们将提出描述稳流场的电流方式。

第二节 描述稳流场的电流方式

稳流场服从两个基本原则：(1) 场强是无旋的；(2) 在电源以外，电流密度是无源的。在两个不同介质的交界处的边界条件就体现着这两个原则。场强的切线分量连续相当于第一个原则；电流密度法线分量连续相当于第二个原则。式 (1-1) 就表达了第二个原则。第一个原则——场强是无旋的，在上一节没有单独提出来。其实它隐含在“场强等于电势负梯度”这一假设之中。类似地，我们可以令源点外电流密度等于某个向量场的旋度。这样，“电流密度无源”这一原则便自动满足。然后再对场强（它等于如此定义的电流密度乘电阻率）施加无旋的条件。

我们仍考虑对井轴有旋转对称性的情况。在此前提下，场强和电流密度都没有 φ 分量。这样，用以导出电流密度的向量场 \mathbf{Y} 便只有 φ 分量：

$$Y = \hat{\varphi} Y_{\varphi}$$

柱极坐标系的三个单位向量 $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, \hat{z} , 按照我们习惯的绘图方法, $\hat{\rho}$ 指向右, \hat{z} 指向上 (这个“上”是纸面上的上, 如地图上的“上北下南”), 则 $\hat{\varphi}$ 垂直于纸面指向纸面下方。

令

$$\mathbf{j} = \nabla \times Y$$

由于 Y 只有一个分量而且垂直于纸面向下, 所以在纸面上对 Y_{φ} 求导的方向逆时针旋转 $\pi/2$ 就是 \mathbf{j} 的方向。因此有

$$j_{\rho} = -\frac{1}{2\pi\rho} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1-15)$$

$$j_z = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (1-16)$$

式中

$$V = 2\pi\rho Y_{\varphi}$$

称为电流势。在均匀介质中, 坐标原点处的电源 I 在子午面上点 (ρ, z) 处形成的电流势等于以电源点为中心、以点 (ρ, z) 所形成的环为边缘的球帽对电源点所张立体角乘以 $\frac{I}{4\pi}$, 即

$$\begin{aligned} V &= \frac{I}{4\pi} \int d\Omega \\ &= \frac{I}{2} \int_0^{\arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}} d\theta \sin \theta \\ &= \frac{I}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right) \end{aligned} \quad (1-17)$$

把 V 的这个表达式代入式 (1-15) 和式 (1-16), 得

$$j_{\rho} = \frac{I}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$j_z = \frac{I}{4\pi} \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

这正是均匀介质中点电极所生成的电流密度。在均匀介质这一条件下, 从电源出发所有射线上 V 为常数。也就是说, 电流线和“等 V 线”一致。在 $\rho=0, z>0$ 这条线上, $V=0$; 在 $\rho=0, z<0$ 这条线上, $V=I$ 。

在求解区 Θ 内, 场强旋度为零, 即

$$(\nabla \times \mathbf{E})_{\varphi} = \frac{\partial E_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = 0$$

由于

$$E_\rho = \frac{j_\rho}{\sigma}$$

$$E_z = \frac{j_z}{\sigma}$$

此式可写成

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_\rho}{\sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{j_z}{\sigma} \right) = 0$$

将式 (1-15) 和式 (1-16) 所给的 j_ρ 和 j_z 代入, 便得到

$$(\nabla \times \mathbf{E})_\varphi = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (1-18)$$

此式保证了场强的无旋性。在两个不同介质分界面处, 场强无旋等同于场强切线分量连续, 而电流密度法线分量的连续性可由 V 本身的连续性保证。

在金属电极表面和无限远边界, $j_t = 0$, 这里下标 t 代表切线分量。根据前面提到的求导方向电流密度关系的法则, $j_t = 0$ 等同于

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (1-19)$$

就是说, 电流势 V 在金属电极表面和无限远边界所应满足的边界条件和电势 U 在绝缘环处所满足的边界条件相同。

类似地, 在绝缘环以及 $\rho = 0$ 边界处, 由于 $j_n = 0$, 根据上述法则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

换句话说, 在这样的边界处

$$V = \text{常数} \quad (1-20)$$

这样, 在绝缘环和 $\rho = 0$ 边界处, V 所满足的边界条件又和 U 在金属电极表面和无限远边界所满足的相同。这个条件和前面说过的“电流线是‘等 V 线’”一致, 因为电流是贴着绝缘环表面流过的。

现在求金属电极 E_j 所供的电流 I_j ($j = 1, \dots, k$, k 是除无限远边界以外的电极的个数)

$$I_j = 2\pi \int_{E_j} dt \rho (-j_n) = \int_{E_j} dt \frac{\partial V}{\partial t} = V_{j+1} - V_j \quad (1-21)$$

式中 n ——求解区 Θ 的外向法线。

从电极流出的电流密度是流向 Θ 内的, 所以是 $(-j_n)$; t 的方向是向前, dt 是电极表面上沿 t 方向的“线元”。式 (1-21) 说明, 电极 E_j 所供的电流 I_j 等于它前面绝缘环 (或 $\rho = 0$ 边界) 的 V_{j+1} 减掉它后面绝缘环 (或 $\rho = 0$ 边界) 的 V_j 。这里“前”和“后”遵照本章第一节的规定。向前的方向也称“正向”。

到现在为止, 一直没有涉及电势 U 。在绝缘环 D_i 上, 电势降为

$$\int_{D_j} dt \frac{j_t}{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{D_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} = U_{j-1} - U_j \quad (1-22)$$

式中 $U_j, (U_{j-1})$ ——绝缘环 D_j 前、后面的电极的电势。

$$1 \leq j \leq k+1$$

$$U_0 = U_{k+1} = 0$$

有了以上准备之后，我们可以提出对偶方式的定解问题。

求一个连续函数 V ，它满足以下各条件：

- (1) 在求解区内，满足方程式 (1-18)；
- (2) 在绝缘环以及 $\rho=0$ 边界处， V 取常数值，即满足条件式 (1-20)；
- (3) 电极两侧绝缘环的 V 值之差等于该电极所供电流，即满足条件式 (1-21)；
- (4) 在金属电极表面以及无限远边界满足式 (1-19)；
- (5) 绝缘环 D_i 两端电势降由式 (1-22) 表达。

在以上边界条件中，式 (1-20) 和式 (1-21) 称为第一类边界条件，式 (1-19) 和式 (1-22) 称为第二类边界条件。

和本章第一节一样，这个定解问题也可以归结为求使某个泛函 $\Phi(V)$ 达到极值的函数 V 的问题。以下关于泛函的定义几乎和本章第一节一样，所不同的只是本章第一节讨论的泛函是电势 U 的泛函，而这里的泛函是电流势 V 的泛函。所考虑的泛函是

$$\Phi(V) = \Phi_1(V) - \Phi_2(V) \quad (1-23)$$

其中， Φ_1 是求解区内功率消耗之半：

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \pi \iint_{\sigma} d\rho dz \frac{\rho}{\sigma} (j_\rho^2 + j_z^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} d\rho dz \frac{1}{\rho\sigma} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1-24)$$

Φ_2 是各电极所供功率之和：

$$\Phi_2(V) = \sum_{j=1}^k U_j I_j$$

将式 (1-21) 代入此式，得

$$\Phi_2(V) = \sum_{j=1}^k U_j I_j = \sum_{j=1}^k U_j (V_{j+1} - V_j)$$

稍加推算，即得

$$\Phi_2(V) = \sum_{j=1}^{k+1} (U_{j-1} - U_j) V_j \quad (1-25)$$

式中

$$U_0 = U_{k+1} = 0$$

将式 (1-24) 和式 (1-25) 代入式 (1-23)，即得我们所要讨论的泛函 $\Phi(V)$ 。

令 χ 代表满足第一类边界条件式 (1-20) 和条件式 (1-21) 的连续函数的集合。仿照本章第一节, 可以证明如下命题。

在集合 χ 中, 满足方程式 (1-18) 和第二类边界条件式 (1-19)、条件式 (1-22) 的函数 V 使泛函 $\Phi(V)$ 达到极值; 反之, 在 χ 中使泛函 $\Phi(V)$ 达到极值的函数 V 必然满足方程式 (1-18) 和第二类边界条件式 (1-19)、条件式 (1-22)。

和本章第一节一样, 现在证明命题的后半部, 即方程式 (1-18)、条件式 (1-19) 和条件式 (1-22) 的必要性。充分性的证明更容易, 这里略去不论。

设函数 V 由 V 变到 $V + \delta V$ 。相应的, 泛函 Φ 由 Φ 变到 $\Phi + \delta\Phi$ 。根据变分法,

$$\delta\Phi = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} d\rho dz \frac{1}{\rho\sigma} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right) \delta \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] - \sum_{j=1}^{k+1} (U_{j-1} - U_j) \delta V_j$$

由于

$$\delta \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \delta V$$

$$\delta \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \delta V$$

代入 $\delta\Phi$, 并作分部积分, 得

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial \rho} \delta V \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial z} \delta V \right) \right] \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \delta V - \sum_{j=1}^{k+1} (U_{j-1} - U_j) \delta V_j \end{aligned} \quad (1-26)$$

第一个积分的被积函数是 $\nabla \times (E\delta V) \cdot n$ (n 是垂直于纸面向上的法线), 根据 Stokes 定理, 它可以变成边界线上的线积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\xi} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} \delta V \quad (1-27)$$

式中 n —— σ 的外法线, 沿正方向积分, 途中依次经过 $E_0, D_1, E_1, D_2, \dots, E_k, D_{k+1}, E_0$ 。

分别讨论以下两种情况。

(1) 在绝缘环表面 $D_j, j=1, \dots, k+1$, 由于 V 是集合 χ 中的函数, 在绝缘环上取常数值, 从而 δV_j 也是常数, 可以提到积分之外, 成为

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{D_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} \right] \delta V_j$$

将这一项与式 (1-26) 最后一项求和号下含有 δV_j 的项结合起来, 成为

$$\sum_{j=1}^{k+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{D_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} - (U_{j-1} - U_j) \right] \delta V_j$$

(2) 在电极表面 E_j , 式 (1-27) 的 δV 不是常量, 不能提到积分之外:

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{2\pi} \int_{E_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} \delta V$$

经过这样的推算后，式 (1-26) 成为

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Theta} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \delta V \\ & + \sum_{j=1}^{k+1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{b_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} - (U_{j-1} - U_j) \right) \delta V_j + \sum_{j=0}^k \frac{1}{2\pi} \int_{E_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} \delta V \end{aligned}$$

Φ 达到极值意味着 δV 不论怎样变化 $\delta\Phi$ 都为零。为此，必须使与 δV 相乘的因子为零。这就是方程式 (1-18)、条件式 (1-22) 和条件式 (1-19)。这样就完成方程式 (1-18)、条件式 (1-22) 和条件式 (1-19) 必要性的证明。

当泛函 Φ 达到极值时，求解区内功率损耗 $2\Phi_1$ 等于电极所供功率之和。为说明这点，运用分部积分于功率损耗 $2\Phi_1$ 的积分表达式，得

$$\begin{aligned} 2\Phi_1 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Theta} d\rho dz \frac{1}{\rho\sigma} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Theta} d\rho dz \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} V \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} V \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Theta} d\rho dz V \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

第二个等号右端的第二个积分由于方程式 (1-18) 而等于零。第一个积分可表示为

$$\iint_{\Theta} d\rho dz n \cdot \nabla \times (VE)$$

根据 Stokes 定理，

$$2\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Xi} dt \frac{1}{\rho\sigma} V \frac{\partial V}{\partial n}$$

和前面一样， n 是 Θ 的外法线，沿正向积分，依次经过 $E_0, D_1, E_1, D_2, \dots, E_k, D_{k+1}, E_0$ 。

由于在电极 E_j ($j=0, \dots, k$) 处

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

积分只在绝缘环 (包括 $\rho=0$ 边界) 表面进行。在绝缘环表面 V 是常数， $2\Phi_1$ 的表达式成为

$$2\Phi_1 = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2\pi} V_j \int_{b_j} dt \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial V}{\partial n}$$

根据条件式 (1-22)，上式成为

$$2\Phi_1 = \sum_{j=1}^{k+1} V_j (U_{j-1} - U_j) = \sum_{j=1}^k U_j (V_{j+1} - V_j) = \sum_{j=1}^k U_j I_j$$