

復興初級中學教科書

幾^し

何^な

下 冊

余介石 徐子豪編著
~~段育華校訂~~

國民政府教育部審定

商務印書館發行

復興初級中學教科書

幾_二

何_五

下 冊

余介石 徐子豪編著
段育華校訂

商務印書館發行

經月二年四十二於書本
定審部育教府政民國
照執號九十四第字教到領

中華民國二十二年七月初版
中華民國二十七年九月再版

版權所有
翻印必究

復興教科書

初級中學用

(57321B)

何 一 冊

下冊實價國幣叁角貳分

外埠酌加運費匯費

編著者 余介石 徐子豪 段育華

校訂者 王長沙 王雲五 主編人 王長沙 王雲五

印刷所 商務印書館 商務印書館

發行所 商務印書館 商務印書館

(本書校對者王養吾)

4 F 31111

幾何學

目次

下冊

第六編 圓和軌跡1

127. 關於圓的要件. 128. 圓和弧的記法. 129. 弧和角的度量. 習題三四. 130. 圓心角, 弧, 弦三要件的關係. 131. 垂徑分弦定理. 習題三五. 132. 弦心距定理. 133. 弦心距定理的逆定理. 134. 切線. 135. 切線定理. 習題三六. 136. 圓周角. 137. 圓周角定理. 138. 弦切角定理. 習題三七. 139. 多角形與圓. 140. 圓內接正多角形定理. 141. 切線長. 142. 切線長定理. 143. 圓外切正多角形定理. 習題三八. 144. 二圓關係. 145. 二圓的公共要件. 146. 作公切線法. 習題三九. 147. 軌跡. 148. 分角線定理. 149. 垂直平分線定理. 習題四十. 150. 三角形外接圓定理. 151. 三角形內切圓定理. 152. 正多角形與圓關係定理. 153. 正多角形要件. 習題四一. 154. 三角形垂心定理. 155. 三角形重心定理. 習題四二.

第七編 比例論39

156. 線段比. 157. 比例線段. 158. 三角形兩邊成比例線段定理. 159. 比例線段的作圖. 習題四三. 160. 比例定律. 161. 線段的內分和外分. 162. 三角形內分比例線段定理. 163. 三角形外分比例線段定理.

習題四四. 164. 內分線段法. 165. 外分線段法. 166. 調和分割. 習題四五. 167. 相似多角形. 168. 相似三角形判別定理一. 169. 相似三角形判別定理二. 170. 相似三角形判別定理三. 習題四六. 171. 交弦和交割線段定理. 172. 相交切割線段定理. 173. 利用相似三角形理做成的儀器. 習題四七. 174. 直角三角形母子相似定理. 175. 比例中項. 176. 畢達哥拉斯定理. 習題四八. 177. 相似多角形定理. 178. 連比例定理. 179. 相似多角形周界比定理. 180. 相似正多角形定理. 181. 正多角形周界比定理. 習題四九.

第八編 幾何計算76

182. 面積. 183. 等積形. 184. 底和高. 185. 長方形面積. 習題五十. 186. 平行四邊形面積定理. 187. 三角形面積定理. 188. 梯形面積定理. 習題五一. 189. 作等積形法. 190. 正多角形面積定理. 191. 代數恆等式的幾何證明. 習題五二. 192. 圓的相關量. 193. 圓與正多角形. 194. 已知圓的內接外切正多角形作法. 195. 已知一圓要作內接外切正方形. 196. 已知一圓要作內接外切正六角形. 習題五三. 197. 圓與正多角形同性公理. 198. 圓周率定理. 199. 圓周率求法. 習題五四. 200. 圓面積定理. 201. 扇形和弓形面積. 習題五五.

總習題100

初級中學教科書

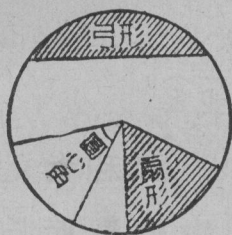
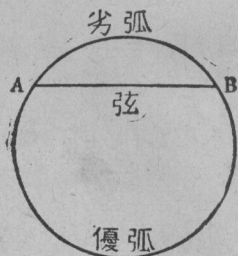
幾何學下冊

第六編 圓和軌跡

圓

127. 關於圓的要件. 複習 §76.

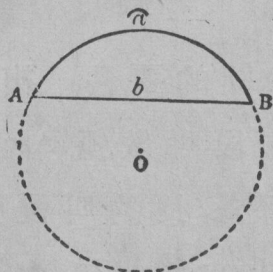
圓周的一段叫做弧(Arc), 圓上二點, 把圓分爲長短二弧, 長的叫優弧 (Major arc), 短的叫劣弧 (Minor arc). 初等幾何學中所講二點間弧, 常指劣弧而言. 連接一弧二端



的線段, 叫做弦 (Chord). 弦和所張弧合成圖形叫弓形 (Segment).

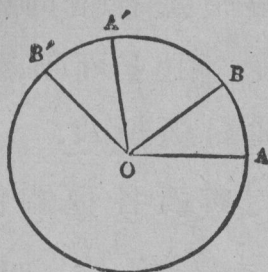
二半徑的夾角,叫圓心角(Central angle).
二半徑同所抱弧合成的圖形,叫做扇形(Sector).

128. 圓和弧的記法.圓的記號是 $\odot$,其後附記圓心,如下圖可記爲 $\odot O$. 弧的記

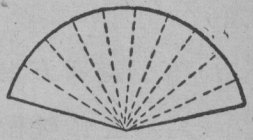


法,和線段相做,可用二個大寫字母,或一小寫字母表示,但字母上須加一 $\frown$ 號如上圖中 $\widehat{AB}$ 或 $\widehat{a}$.

129. 弧和角的度量. 將一扇形 OAB , 不變 O 點位置而旋轉,到扇形 $OA'B'$ 的位置. 則 OB 與 OB' 疊合, OA 與 OA' 疊合, $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ 在同圓上,所以也完全疊合. 故



在同圓或等圓內，如二圓心角相等，則所抱的弧也等；逆言之，如二弧相等，則所對的二圓心角也相等。

將一弧分爲若干等分，連接自各等分點到圓心的半徑，則圓心角也被分成同數的等分。反過來說，等分一圓心角的諸半徑，也必等分弧。在特例分周角爲360等分，每分稱爲1度，這時圓也被分爲360等分，每分也稱爲1度，記號都是 $^{\circ}$ ，如 30° ， 40° 。但須注意每度弧的長短，和半徑的長短有關，不比角的大小，與邊無涉。

如一角和一弧有相同度數,我們稱這角被那弧所度. 由上面所說的理,又可見

圓心角被對弧所度.

這條定理,是角與弧各種關係的基礎.

習題三四

1. 用量角器作已知度數的角,是根據什麼道理?

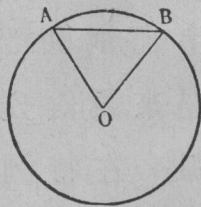
*2. 一直徑所成的圓心角是幾度? 所對的弧是全圓的幾分之幾? 這弧叫做什麼(參看習題四第7題)?

*3. 證明互相垂直的二直徑,分圓為四等弧.

註. 這弧叫做四分弧(Quadrant).

*4. 如 $\widehat{AB}$ 弧等於半徑,證明 $\widehat{AB}$ 為全圓六分之一.

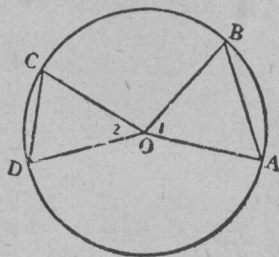
*5. 在 $\odot O$ 中,已知 $\angle AOB = m^\circ$, 求 $\angle OAB$ 的度數.



6. 如 $\angle APB$ 的度數等於 $\widehat{AB}$ 度數, P 點是不是即為圓心. 在什麼時候,才必為圓心?

130. 圓心角,弧,弦三要件的關係. 由圓心角被弧所度的理,立知

(一) 在同圓或等圓裏, 圓心角大的所對的弧也大, 小的所對的弧也小; 逆言之, 大弧所對的圓心角大, 小弧所對的圓心角小



在上圖中

(1) 如 $\angle 1 > \angle 2$,

則 $\widehat{AB} > \widehat{CD}$.

(2) 如 $\widehat{AB} > \widehat{CD}$,

則 $\angle 1 > \angle 2$.

註. 等圓的情形也是一樣, 學生試自將圖補出.

在 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 中有二組對應等邊, 按全等與非全等三角形各定理, 再加 (一) 的關係, 即得

(二) 在同圓或等圓裏, 等弧所對的弦也等, 大弧所對的弦也大; 逆言之, 等弦所對的弧也等, 大弦所對的弧也大.

在上圖中

(1) 如 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, 則 $AB = CD$,

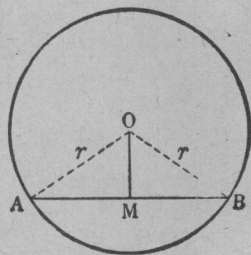
如 $\widehat{AB} > \widehat{CD}$, 則 $AB > CD$,

(2) 如 $AB = CD$, 則 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$,

如 $AB > CD$, 則 $\widehat{AB} > \widehat{CD}$.

以上各理的證明, 學生宜自己補出.

131. 垂徑分弦定理.
從圓心到弦上的垂線, 必平分這弦.



[假設] 在 $\odot O$ 中 $OM \perp AB$.

[求證] $AM = MB$.

[解析] $\triangle OMA$, $\triangle OMB$ 是何種 $\triangle$? 其中有什麼對應相等的元素? 是不是全等形?

[證明] 連結 OA , OB 二半徑, 因原設 $OM \perp AB$, 故得二個直角三角形 $rt. \triangle OMA$, $rt. \triangle OMB$. 且

OM 是公共邊, $OA = OB = r$ (等邊半徑定理)

$\therefore rt. \triangle OMA \equiv rt. \triangle OMB$ (全等 $rt. \triangle$ 定理二)

即 $AM = MB$.

系一. 圓心與一弦中點聯線,必與這弦垂直.

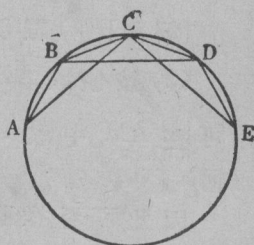
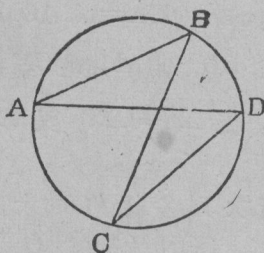
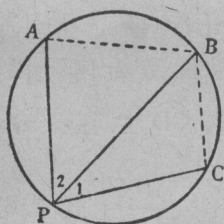
系二. 一弦的平分垂直線,必過圓心.

這二系均可由垂線公理一二來證.

系三. 從圓心到弦上的垂線,平分對這弦線的圓心角.

習題三五

1. 下左圖裏, $PA=PC$, $\angle 1 < \angle 2$, 試證 $\widehat{AB} > \widehat{BC}$.
2. 下中圖裏, $AB=CD$, 試證 $AD=BC$.
3. 下右圖裏, $AB=BC=CD=DE$, 試證 $AC=BD=CE$.



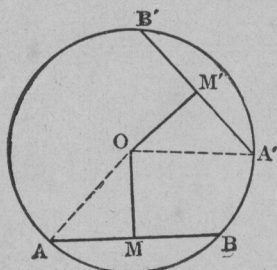
*4. 證明: 平分一弦的半徑,也平分這弦所對的弧.

*5. 證明: 連結一弦中點和其所對弧中點的直線,

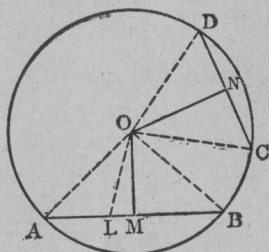
必經過圓心.

6. 證明圖中一直徑如平分一弦, 必平分與這弦平行的一切諸弦.

132. 弦心距定理. 同圓或等圓裏, 等弦距圓心等遠, 大弦距圓心較近.



(1)



(2)

[假設] (1) $AB = A'B'$ (2) $AB > CD$
 [求證] (1) $OM = OM'$ (2) $OM < ON$

(左圖)

(右圖)

[解析] (1) 證明 $\text{rt. } \triangle OMA \equiv \text{rt. } \triangle OM'A'$ (看 §131 解析)

(2) 按假設 $AB > CD$, 則 AM 與 CN 的長短如何? 因此可在 AM 中取 L , 使 $AL = CN$. 又 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 二弧大小如何?

因此可否推斷, 次列各組角的大小: (一) $\angle AOB$, $\angle COD$ (二) $\angle AOM$, $\angle CON$ (三) $\angle OAM$, $\angle OCN$? 再就 $\triangle OAL$, $\triangle OCN$ 來比較 OL 與 ON , 并注意 $OL > OM$.

[證明] (1) $AM = \frac{1}{2}AB$, $A'M' = \frac{1}{2}A'B'$ (垂徑分弦)

而假設 $AB = A'B'$ $\therefore AM = A'M'$ (普通公理)

連接 OA, OA' 二半徑, 成 $rt. \triangle OMA, rt. \triangle OM'A'$, 其中又有 $OA=OA'$

$\therefore rt. \triangle OMA \equiv rt. \triangle OM'A'$ 而 $OM=OM'$ ($rt. \triangle$ 定理二)

(2) 因 $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD$. 即 $AM > CN$, 故可取 L , 使 $AL=CN$.

連接 $OA=OC$ 二半徑, 則 $\triangle OAL, \triangle OCN$ 中, 已有二組對應等邊, 今試比較 $\angle OAL, \angle OCN$ 二夾角.

因 $AB > CD$, 故 $\angle AOB > \angle COD$ (圓的要件關係一)

但 $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB, \angle CON = \frac{1}{2}\angle COD$

$\therefore \angle AOM > \angle CON$ (垂徑分弦系三)

且 $\angle OAM + \angle AOM = \angle CON + \angle OCN = rt. \angle$

($\triangle$ 內角和系四)

$\therefore \angle OAM < \angle OCN$, 即 $\angle OAL < \angle OCN$

$\therefore OL < ON$ (非全等 $\triangle$ 定理一)

但 $OL > OM$ (同上系)

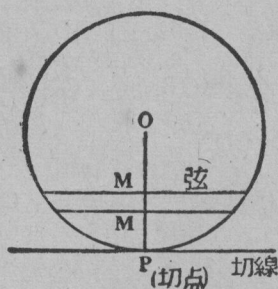
$\therefore OM < ON$ (不等量公理)

133. 弦心距定理的逆定理. 試用轉換法, 即可證得上理的.

逆定理. 同圓或等圓裏, 距圓心等遠的弦必等, 距圓心較近的弦大.

凡是一條定理裏,如同時包括等於,大於,小於三種情形,則用轉換法都能證明其逆理必定成立. 像§130內的(一)(二)兩條中,同時包括正逆二定理,其所以都能成立的原因,即如上述.

134. 切線. 在 $\odot O$ 的半徑 OP 內取一



點 M ,而作過 M 與 OP 垂直的弦. 由上二節的理,可見 OM 的長漸加時,這弦的長漸減. OM 的長最多能等於 OP ,那時弦的長必縮為烏有. 換句話說,過 P 點而與 OP 垂直的線,與這圓只有一交點. 這條直線,叫做 $\odot O$ 的切線(Tangent), P 點稱為切點(Point of contact).

135. 切線定理. 由上節所述,即可得切線定理. 一圓半徑在圓上端點的垂線,即那圓的切線.

再按垂線公理,即知

系一. 過切點的半徑,必垂直於切線.

系二. 過切點而與切線垂直的線,必經過圓心.

習題 三 六

1. 在右圖中,試證如 $\angle 1 = \angle 2$, 則 $AB = CD$; 如 $\angle 1 > \angle 2$, 則 $AB < CD$.

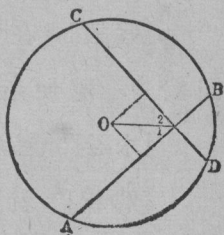
2. 證明過圓內一點 P 的弦,以與過 P 點的半徑垂直的爲最短.

3. 證明直徑二端的切線必平行,其餘的必相交.

*4. 證明過圓上一點,只有一切線. 過圓外一點,有幾切線呢?

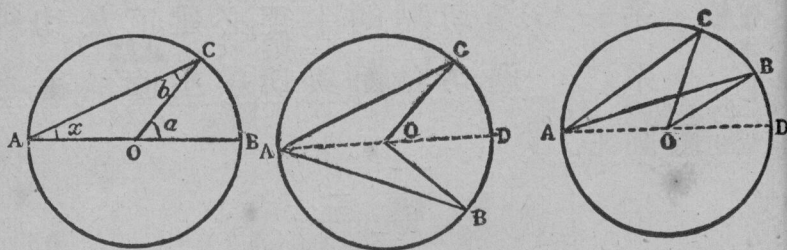
5. 證明過弧中點,而與所對弦平行的線,必爲切線.

*6. 如一點在圓內,則到圓心的距離必小於半徑,如在圓外,則距離大於半徑. 試由這理及垂線最短(非全等三角形定理一的系)的理,來證明切線定理.



136. 圓周角. 過圓上一點二弦的夾角, 叫做圓周角 (Inscribed angle).

137. 圓周角定理. 圓周角被所截弧的一半所度.



[假設] 在 $\odot O$ 中, 圓周角 $\angle BAC$ 與圓心角 $\angle BOC$ 同對 $\widehat{BC}$ (隨便看那一圖).

[求證] $\angle BAC$ 被 $\frac{1}{2}\widehat{BC}$ 所度.

[解析] 就過圓周角頂點直徑.

(一) 與這角一邊相合(左圖),

(二) 在這角內(中圖),

(三) 在這角外(右圖)三種情形分論.

(一) 注意圓心角是一等腰 $\triangle$ 的外角. (二) 分爲二角和, 即合(一)的情形. (三) 分爲二角差, 使合於(一)的情形.

[證明] (一) 連半徑 $OC = OA$

(同圓半徑)