中学数学复习研究

（试用教材）

上 册

华中师范学院数学系
《中学数学复习研究》編寫組

一九七二年一月

毛主席语录

我們的教育方針，应該使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必須为无产阶級政治服务，必須同生产劳动相結合。

忠誠党的教育事业。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学軍，也要批判資产阶級。

自然科学是人們爭取自由的一种武裝。

人們为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

前　言

伟大领袖毛主席教导我们：“**教育必須为无产阶級政治服务，必須同生产劳动相結合。**”《中学数学复习研究》课程，对于培养中等学校的数学教师，对于数学系学员学习、掌握更高深的数学知识，提高科学水平，有着重大的作用。可是，在刘少奇反革命修正主义路线下，旧师范学院的《初等数学》课程，严重脱离三大革命斗争和中学数学教学实际，贩卖“理论至上”、“智育第一”等黑货，大搞怪题、偏题，大搞繁琐哲学，使这门课程成为资产阶级知识分子对无产阶级实行专政的工具。

无产阶级文化大革命的伟大胜利，彻底摧毁了以叛徒、内奸、工贼刘少奇为代表的资产阶级司令部，打破了资产阶级知识分子独霸的一统天下。广大革命师生认真读马、列的书，读毛主席的书，批判了刘少奇的反革命修正主义教育路线，沿着毛主席的无产阶级革命路线胜利前进。

遵照伟大领袖毛主席关于“**教育要革命**”、“**教材要彻底改革，有的首先删繁就簡**”的教导，在党的领导下，我们工人、学员、教员三结合编写组，深入工厂、农村和中学，进行调查研究，在总结一年来教育革命实践的基础上，把我系原编《中学数学》（初

稿）改编成本教材。

在改编过程中，我们力求做到用马克思列宁主义、毛泽东思想来阐述有关中学数学的内部规律，贯彻“**理論和实际統一**”的原则，注意从具体问题中抽象出数学概念和规律，再应用这些规律，解决三大革命运动中的实际问题。旧教材把代数、三角、解析几何分成几个孤立部分，各成一套系统。我们尝试用唯物辩证法分析和处理“数”和“形”的关系，组成了一个新的系统。同时，本教材注意了培养学员分析问题和解决问题的能力，便于发挥学员学习的主动性和积极性。

由于我们学习毛主席著作还很不够，加上缺乏教育革命实践经验，教材中一定存在不少缺点和错误，希望同志们批评指正。

数学系《中学数学复习研究》编写组

一九七二年元月

目　　录

毛主席语录

唯物辩証法的宇宙观主张从事物的内部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展，即把事物的发展看做是事物内部的必然的自己的运动，而每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。

第一章　函数

§1　常量和变量

毛主席教导我们：“**对情况和問題一定要注意到它們的数量方面，要有基本的数量的分析。任何质量都表現为一定的数量，没有数量也就没有质量。**”因此我們在分析情况和研究问题时，必须注意到各个方面的量。

例 1　我国自行设计、建造的万吨级轮船“东风”号，满载着中国人民对世界各国人民的深情厚谊和支援物资，以每小时17浬（海里）* 的平均速度，乘风破浪，向前行驶，航行的路

---

* 1 浬＝1.852公里

程 S 和时间 t 之间的关系是：

$$S=17t.$$

在这个问题中，存在三个量：路程、平均速度、时间．平均速度17浬/小时是一个保持一定数值的量，而航行的路程 S 和时间 t 是可以取不同数值的量．

例2 一九七一年三月，我国成功地发射了科学实验人造地球卫星，绕地球一周106分钟，卫星绕地球运行的周数 C 和时间 t 之间的关系是

$$C=\frac{1}{106}t.$$

这里，卫星绕地球运行一周所需的时间是一个保持一定数值的量，而运行的周数和运行的时间是可以取不同数值的量．

例3 设圆的半径为 r，面积为 A，那么圆面积计算公式是

$$A=\pi r^2.$$

这里，圆周率 π 是一个保持一定数值的量，而圆的半径和圆的面积是可以取不同数值的量．

上面例子中所遇到的量，根据它们在研究过程中的情况可以分为两大类．

在问题的研究过程中，保持一定数值的量叫做常量，可以取不同数值的量叫做变量．

上述例子中，轮船航行的平均速度，卫星绕地球一周所需的时间，圆周率 π，这些量在研究的过程中，是保持一定数值的量，是常量；轮船航行的路程和时间，卫星绕地球运行的周数和时间，圆的面积和半径等各个量，在研究过程中，可以取不同的数值，是变量．

"列宁說，对于具体情况作具体的分析，是'馬克思主义的

最本质的东西、馬克思主义的活的灵魂'。”对于常量和变量也要作具体分析．同一个量，在某种情况或条件下是常量，在另一种情况或条件下就可能是变量．例如，飞机在两站之间飞行，在这过程中，乘客的数目、全部行李的重量就是常量，而飞机离两站的距离、离地面的高度、以及汽油的儲存量等则是变量．但飞机到达某站直到再次起飞这一段时间中，乘客的数目、行李的重量又可以是变量，而汽油的儲存量（假如不加油）等却是常量．

自然界中“沒有什么事物是不包含矛盾的”，一切事物由于內部存在着矛盾，总是处于不停的变化和运动中，因此我们不能只局限于研究常量，而更重要的是去研究变量，研究变量的变化情况，研究变量与变量之间的相互关系，从而更深刻地理解与反映客观世界，按照无产阶级世界观改造自然，改造世界．

§2 函数概念

一 函数的定义

“因为一切客观事物本来是互相联系的和具有內部规律的”。因此，在研究某一问题的过程中，往往同时存在着几个变量，各个变量的变化并不是各自孤立的，而是彼此联系，并遵循着一定的规律而互相影响着的．

例如，在§1例1中有

$$S=17t. \qquad (1)$$

显然，轮船航行的时间和路程这两个变量是按 $S=17t$ 的规律变化．当航行的时间分别经过了2小时、3小时、4小时、……，那么，轮船航行的路程就分别是34浬、51浬、68浬、……．反过来，

如果已知轮船航行了的路程42.5浬、85浬、……，也可以求出航行这段路程的时间分别为2.5小时、5小时、…….式(1)反映了时间和路程这两个变量之间存在的互相依赖、互相制约的关系.两个变量间的这种互相依赖、互相制约的关系在数学上就叫做函数关系.

如果我们考虑的是t小时后轮船航行的路程，这里t的值就可以任意选择（只要符合实际），而对t的每一个非负值，路程S就按式（1）所示的规律，有一个确定的值与它对应，即路程随时间的变化而变化. 一般地，我们就定义

在有两个变量x和y的变化过程中，如果对于变量x的每一个所能取的值，变量y就按照一定的规律，有一个确定的值与它对应，那末就称变量y是变量x的函数. 这里x叫自变量，y叫因变量. “y是x的函数”这句话可记为$y=f(x)$，或$y(x)$，记号中的f表示y与x的对应关系，不是f乘x.

如§1例1中　S是t的函数，记为

$$S=S(t)=17t.$$

当$t=3.5$时，对应的函数值就是

$$S(3.5)=17\times3.5=59.5.$$

有时也记为：

$$S|_{t=3.5}=59.5.$$

又如　$y=f(x)=-2x^3+1$，求$f(-3)$的值.

解　$f(-3)=-2\times(-3)^3+1=-53.$

二　函数的定义域

在函数的定义中，并没有要求对于x的随便什么值，y都有一个值和它对应. 实际上，x应该取那些值，要根据我们所考虑问题的情况来决定，例如在例1中，函数$S=17t$，这里

的自变量 t 不能取负值，因为时间取负值，这个问题就没有意义了.

在函数关系中，使函数有意义的自变量的取值范围叫做函数的定义域. 函数 $S=17t$ 的定义域就是 $t\geqslant 0$.

一般地，用数轴上的区间来表示变量的取值范围. 如 x 取 a 和 b 之间所有的数：$a<x<b$，可用图1—1中 x 轴上的区间来表示. 这种不包括两个端点的区间叫做开区间，记作 (a,b).

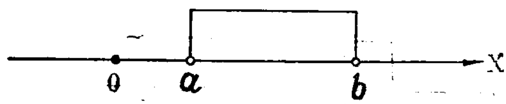


图 1—1

如果 x 的取值范围还包括端点 a、b，即 $a\leqslant x\leqslant b$，如图1—2，就叫做闭区间，记作 $[a,b]$.

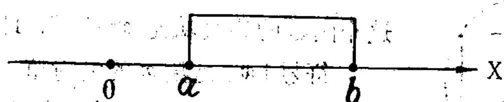


图 1—2

我们再看下面一些例子.

例 1 某一小型拖拉机开始翻地时，油箱中有油10公斤，它每小时要耗油1.2公斤，那么油箱中，剩油量 y（公斤）与翻地时间 t（小时）之间的函数关系是

$$y=10-1.2t.$$

（1）时间 t 不取负值；

（2）油箱中的油用完，即 $y=0$ 时，得 $t=8\frac{1}{3}$. 所以此函数的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 8\frac{1}{3}$，即闭区间 $[0,8\frac{1}{3}]$.

例 2 圆的周长是半径的函数，用 L 表示圆的周长，R 表示半径，则

$$L=2\pi R \qquad \text{定义域为} \quad R\geqslant 0.$$

在数轴上表示就是整个右半轴（图 1—3）.

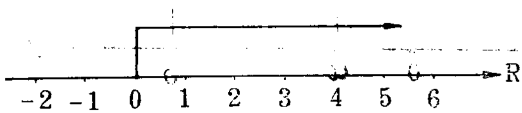


图 1—3

例 3 要从一根直径为 D 的圆木中，锯出截面为矩形的柱子（如图 1—4），则矩形截面面积 S 与边长 x 的函数关系为

$$S=x\sqrt{D^2-x^2}$$

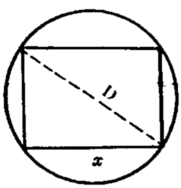


图 1—4

这个函数的定义域是 $x^2\leqslant D^2$，即 $|x|\leqslant D$.

符号 $|x|$ 是数 x 的绝对值，它表示数轴上的点 x 到原点的距离. 故正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值就是零：

$$|x|=\begin{cases} x & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -x & x<0. \end{cases}$$

两个正数，绝对值大的数也大；而对于两个负数来说，绝

对值大的数反而小（例如 $-10<-3$）.

不等式 $|x|<D$，表示数轴上与原点的距离小于 D 的一切点，由图 1—5 可看出，在区间 $(-D, D)$ 内的一切点与原点的距离都小于 D，而此区间外的一切点与原点的距离都大于 D，故知满足不等式 $|x|<D$ 的一切点，都在 $(-D, D)$ 内，即 $-D<x<D$，这个不等式读作"x 大于 $-D$ 小于 D."

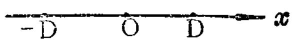


图 1—5

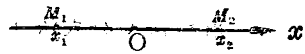


图 1—6

同理，不等式 $|x|\leqslant D$，对应于不等式 $-D\leqslant x\leqslant D$，这是包括了区间的两个端点在内的．而不等式 $|x|>D$ 就对应于 $x>D$ 或 $x<-D$.

利用绝对值的概念可以得出数轴上两点的距离的表达式．如果两点 M_1 与 M_2 的坐标是 x_1 与 x_2，则 M_1M_2 的距离 $|M_1M_2|$ 就等于 $|x_2-x_1|$（图 1—6）.

例 4 求下列函数的定义域

（1）$y=\dfrac{1}{x-2}$，（2）$y=\sqrt{x-3}$，（3）$y=x^2+3x+4$.

解 （1）当 $x=2$ 时，$x-2=0$，函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 失去意义．而当 $x\neq 2$ 时，$x-2\neq 0$，函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 都有意义．所以函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是除 $x=2$ 外的一切实数.

（2）当 $x<3$ 时，$x-3<0$，函数 $y=\sqrt{x-3}$ 失去意义．而当 $x\geqslant 3$ 时，$x-3\geqslant 0$，函数 $y=\sqrt{x-3}$ 都有意义．所

以函数 $y=\sqrt{x-3}$ 的定义域是 $x\geqslant 3$.

（3）不论 x 为何值，$y=x^2+3x+4$ 都有意义，故函数 $y=x^2+3x+4$ 的定义域为任何实数.

三　函数的表示法

变量间的函数关系可以用多种方式表示，但最常用的有下列三种.

1.　解析法（公式法）

用式子表示两个变量之间的函数关系的方法叫做解析法.

例如 §1 中 $S=17t$、$C=\dfrac{1}{106}t$、$S=\pi r^2$ 均是，又如 $y=\sqrt{x-3}$、$y=x^2+3x+4$ 等也是用解析法来表示函数关系的.

用解析法表示函数的最大优点是：使人能很清楚地看出变量间的对应关系，对函数的定义域上每一个自变量的值，都能很方便地求出它所对应的函数值来. 但是在实际问题中，变量间的函数关系，并不一定都能用式子表示出来.

2.　列表法

研究变量之间的依赖关系时，常常把它们之间的对应值列成表格.

例如，用热电偶测量温度.

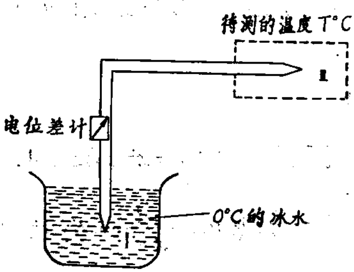


图　1—7

用热电偶测量温度在钢铁、化工、电工等工业部门中有广泛的应用. 如图 1—7，是将两种不同的金属材料焊接在一起，把接点Ⅰ放在 $0°C$ 的冰水中（称为冷端），把另一个接点Ⅱ放在待测的温度 $T°C$ 的地方（称为热端），这时导线的两端

就有电压产生，热端的温度不同，产生的电压不同，电压的数值可由电位差计读出.

用精确的实验可以预先测出各种热电偶的热端温度和电压的对应关系. "五·七"射流厂在热处理射流元件时，也是使用热电偶来测量炉子温度的. 现将镍铬——镍铝热电偶的热端温度和电压的对应关系列表如下：

温度T（°C）	……	500	520	540	560	580	600
电压V(毫伏)	……	20.64	21.49	22.34	23.20	24.05	24.90

这样就能很清楚地看出温度和电压间的函数关系.

上面这种用表格把变量间的函数关系表示出来的方法叫列表法. 从表中不经计算就能直接看出自变量与函数的对应值，所以列表法在工农业生产上和科学技术上用处很大. 譬如数学用表中的平方表、立方表、平方根表、倒数表等都是用这种方法. 它的缺点是表中不可能把所有的自变量一一列出，因而无法把函数关系完全表示出来.

3. 图象法

用热电偶测量温度时，要根据电压V的数值，推算出温度T来，工人同志常常使用一种既简单又能保证足够精确的方法，是根据表中温度和电压的每一对数值，在方格纸上画出每一个点，过各点连出一条线如图1—8（可以看出大致是一条直线），利用这个图就能很快地由电位差计读出的电压毫伏数，知道热端的温度. 在实

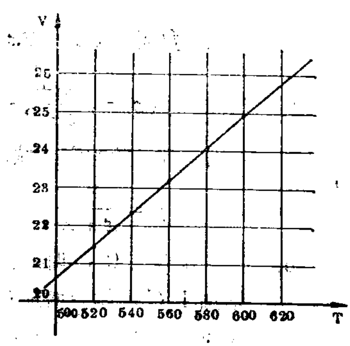


图 1—8

际应用中，可以将图 1 — 8 中要用的那部分图形放大，得到较精确的结果．如读出 $V=22.5$ 毫伏，则$T=544°C$．

上面是用图象表示两个变量间的函数关系．这种表示函数关系的方法叫做图象法．它的优点是有很强的直观性，所以是我们研究函数时很好的辅助工具．

习 题 一

1. 从工农业生产中和日常生活中举出常量和变量的一些实例．

2. 说出下面各题中，哪些是常量，哪些是变量，哪两个变量有函数关系？如果有函数关系，用解析式表示出来，并说出自变量的取值范围．

   (1) 我海军某部侦察班，为了摸清敌人的情况，要从某海港到某岛屿附近进行侦察，已知海港与岛屿的距离是 11 浬，求该侦察班到该岛行驶的时间t(小时)与速度V(浬/小时)的关系．

   (2) 红旗生产队已积肥 9000 担，在毛主席**“抓革命，促生产”**的伟大号召鼓舞下，为了争取更大的丰收，决心增加积肥，计划每天积 200 担，求 t 天后，这个生产队共有肥料的担数 W．

3. 已知 $f(x)=3x^2+2x-1$，求：$f(2)$，$f(0)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(2a)$．

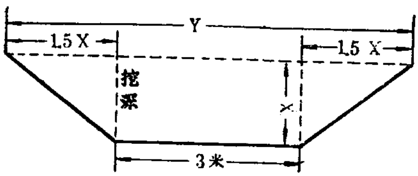
4. 已知 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$，求：$f(3)$，$f(-4)$，$f(\sqrt{2})$．

5. 求出下列函数的定义域，并在数轴上表示出来：

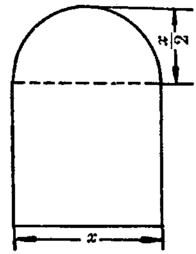
$$y=\frac{3}{x+2}；\qquad y=\sqrt{x^2-4}.$$

6. 一个铜球在 $0°C$ 时的体积是 1000 立方厘米，加热后温度每增加 $1°C$，体积增加 0.051 立方厘米．用解析法表示它的体积 V（立方厘米）是温度 t（摄氏温度）的函数．并且根据列出的式子，计算铜球加热到 $200°C$ 时的体积．

7. **“水利是农业的命脉”**.东方红公社今年要增修一条水渠，规定底宽 3 米，边坡比为 **1:1.5**，如图.把渠口宽表示成渠深的函数式.



第7题图



第8题图

8. 一下水道的截面是矩形加一半圆形，如图. 已知这个截面的矩形面积是 1 平方米，把截面的周长 c 表示成底宽的函数，并求它的定义域.

§3 直角坐标系

函数的解析式（或方程）和图象是同一事物的两种不同的表示形式，在一定条件下能互相转化，这种转化对深入认识事物的变化规律是有利的.为此，我们来建立直角坐标系.

工人师傅要在一个箱壳的毛坯上的确定位置钻圆孔，在图纸上一般总是要标注这些孔的孔心距左边（或右边）有多大的距离，到下边（或上边）有多大的距离. 有了这两个数据，这些孔的位置就完全确定了（图1—9）. 又如在地图上，常用经纬度来表示地点的位置（如北京的经纬度是东经 116°，北纬