高等数学

下册

主　编　李龙星
副主编　张永胜
　　　　时红霞
　　　　程志谦

武汉工业大学出版社

高等数学

（下册）

主　编：李龙星
副主编：张永胜　时红霞　程志谦

武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李龙星主编. - 武汉：武汉工业大学出版社，1999.7
ISBN 7-5629-1493-1

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.O13

武汉工业大学出版社出版发行
(武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码430070)
武汉测绘院地图印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:9.25　字数:242千字
1999年7月第1版　1999年7月第1次印刷
印数:1~3100册
定价：17.00元(上、下册)

前 言

近年来，我国高等工程专科教育有了很大的发展。专业教改正在许多院校展开，教育部也在最近刚刚颁布了高等工程专科高等数学新的教学基本要求，迫切需要编写一本高等数学教材以适应教学改革。前几年，我校数学教师分散在各个工科系，配合专业教改，加强了数学教师的工程意识，加深了对专业的了解。我们在共同研讨的基础上，编写了这本教材。

这次编写教材，我们调查了许多专业对数学的需求状况，查阅了不少专业资料，保证数学的“够用”。同时在培养学生利用数学方法处理专业问题的能力方面作了一些新的尝试。有些例子甚至来源于一些专业课中。在课程体系上作了一些变动，主要分为概念、方法、应用三个方面。

本书分上、下两册。上册主要为一元微积分，包括一元微积分基本概念、一元微积分基本方法、一元微积分应用。每节后均有一定数量的习题，每章后配有适量的复习题。下册包括常微分方程、多元函数微积分概念、多元函数微积分方法以及无穷级数。

编写安排如下：第一章李龙星执笔；第二章、第四章程志谦执笔；第五章程志谦与张永胜执笔；第三章、第六章时红霞执笔。第七章张永胜、董桂生执笔；第八章王素芳、许超执笔；第九章魏巍执笔；第十章运士伟执笔；第十一章李龙星执笔。许超核对、演算了全部习题，全书由李龙星统稿。徐会方副教授审阅了全部稿件，

并提出了许多宝贵建议；我校教务处领导、计算机系领导为本书的出版给予了大力的支持，在此一并表示感谢。

在这本教材的编写过程中，我们对内容作了一些调整。鉴于水平所限，不足之处在所难免，敬请读者指正。

编者

1999年5月

目　　录

第七章　常微分方程

微分方程是数学理论（特别是微积分）联系实际的重要渠道之一.它在工程实际和科学研究中有着广泛的应用，其中出现的问题种类是极其丰富多彩的，说明它有着顽强的生命力. 本章的主要任务就是要介绍常微分方程理论中一些最简单的问题，以及求解常微分方程的一些最基本方法，并介绍一阶常微分方程的数值解法.

第一节　微分方程的一般概念

一、微分方程的定义

先看两个实际例子：

例 1 设曲线在 x 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{1+x^2}$，且经过点(0, 1)，求此曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=\varphi(x)$，依题意知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}\text{，且 } y\big|_{x=0}=1$$

积分得，

$$y=\operatorname{arctg}x+c \quad \text{(其中 } c \text{ 为任意常数)}. \qquad (1)$$

当 c 取不同值时得到不同的曲线. 又知所求曲线过点(0, 1)，即曲线应满足条件

$$y\big|_{x=0}=1,$$

将其代入(1)得: $1=\text{arctg}\ 0+c$

故 $c=1$.

所求曲线方程为: $y=\text{arctg}\ x+1$.

例 2 求自由落体运动的运动方程.

解 假设自由落体的运动方程为 $s=s(t)$, 初始位置与初始速度为 $s(0)=0$, $s'(0)=0$. 根据牛顿运动第二定律有:

$$mg=m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\therefore \quad s'(t)=gt+c_1.$$

从而

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2.$$

由 $s'(0)=0$ 得 $c_1=0$; 由 $s(0)=0$ 得 $c_2=0$.

所以, 自由落体运动方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

从这两个例子可以看出, 在实际问题中常常需要我们根据一些规则建立起含有未知函数的导数（或高阶导数）的方程, 并通过解方程求出未知函数. 为此作如下定义.

定义 含有未知函数的导数或偏导数的方程称为**微分方程**, 例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{2}$$

$$(x-2y)\mathrm{d}x+(y-2x)\mathrm{d}y=0 \tag{3}$$

$$y''-2y'-3y=\mathrm{e}^x \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

等都是微分方程.

如果在微分方程中出现的未知函数是一元函数，称为**常微分方程**；如果方程中出现的未知函数是多元函数，则称为**偏微分方程**. 上例中，方程(2)至(5)都是常微分方程，方程(6)是偏微分方程. 本章只研究常微分方程.

常微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{7}$$

二、微分方程的阶

在微分方程中含有的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 微分方程(2)、(3)是一阶的，(4) 、(5)是二阶的.

三、微分方程的解

如果将某一函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程(7)，使之成为恒等式，即

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)] = 0 .$$

则函数 $y=\varphi(x)$ 称为方程(7)的解.

例如,函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 的解，因为 $-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\equiv 0$.

如果微分方程的解中含有任意常数，而且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的**通解**. 不含任意常数的解，称为微分方程的**特解**.

在例 2 中 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$ 是微分方程 $g=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$ 的通解. 而 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 是它的特解.

例 3 验证 $y=x+c\mathrm{e}^{y}$（其中 c 是任意常数)是微分方程

$(x-y+1)y'=1$的通解.

解 由 $y=x+ce^y$ 求得

$$y'=\frac{1}{1-ce^y},$$

代入已给微分方程的左边，得

$$[x-(x+ce^y)+1]\frac{1}{1-ce^y}=(x-x-ce^y+1)\frac{1}{1-ce^y}\equiv 1,$$

因此函数 $y=x+ce^y$ 满足微分方程，即 $y=x+ce^y$ 是微分方程的解，又因它含有一个任意常数,故是该一阶微分方程的通解.

在例 2 中，通解所满足的附加条件称为微分方程的**初始条件**.

一般地，一阶微分方程的初始条件为:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0$$

在例 1 中，我们要求曲线过特定点(0, 1)，即要求未知函数满足 $f(0)=1$. 在例 2 中我们要求运动方程满足 $s(0)=0, s'(0)=0$ 条件. 通常把未知函数及其各阶导数在某点处的值称为微分方程的**初始条件**.求微分方程满足初始条件的问题，称为**初值问题**.

习题 7-1

1.指出下列微分方程哪些是常微分方程?哪些是偏微分方程?并说明方程的阶数.

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$； (2) $y''+3y'-y=\sin x$；

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$； (4) $xdy+ydx=1$；

(5) $xy''' + 2y'' + x^2 y = 0$；　　　　(6) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$．

2.指出下列各小题中的函数是否为该题中微分方程的解?是否为通解?

(1) $xy' = 2y$,　　$y = 5x^2$.

(2) $(x+y)dx + xdy = 0$,　　$y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$ (其中c为任意常数).

(3) $y' = x^2 + y^2$,　$y = \frac{1}{x}$.

(4) $y'' + y = 0$,　　$y = 3\sin x - 4c\cos x$ (其中c为任意常数).

(5) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$,　　$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$

(其中c_1和c_2为任意常数，ω为已知常数).

(6) $y'' + y = e^x$, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$　(其中c_1和c_2为任意常数).

3.验证$y = cx^3$是微分方程$3y - xy' = 0$的通解,并分别求此微分方程满足下列初始条件的特解:

(1) $y|_{x=1} = \frac{1}{3}$；　　　　(2) $y|_{x=1} = 1$；

(3) $y|_{x=1} = -\frac{1}{3}$；　　　(4) $y|_{x=2} = 4$.

4.求一条曲线，使曲线上每一点的切线斜率都等于该点横坐标的倒数，且曲线过点(1, 0).

第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{1}$$
的微分方程称为**可分离变量的一阶微分方程**.

方程(1)可以化为等号的一端仅含有变量 y，而另一端仅含有变量 x 的形式，即:
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$
其中 $g(y)\neq 0$，将(2)式两边积分，得
$$G(y)=\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+c=F(x)+c \tag{3}$$
其中 c 为任意常数，(3)式为方程(1)的通解，这种解法称为分离变量解法.

例 1　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$ 的解.

解　这是可分离变量的微分方程，分离变量得:
$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$
两边积分，得:
$$\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x,$$
即
$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln|c|.$$

故方程的通解为: $1+y^2=\dfrac{cx^2}{1+x^2}$,

或 $(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$.

例 2 将一个加热到 50 °C 的物体，放在 20 °C 的恒温室中冷却，求物体温度变化的规律.

解 由热学中冷却定律知，温度为 Q 的物体，在温度为 Q_0 的环境中冷却时，冷却的速度与温差 $Q-Q_0$ 成正比. 设物体温度 Q 与时间 t 的函数关系为

$$Q=Q(t),$$

则得微分方程为: $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-k(Q-20)$,

此处比例系数 $k>0$，右端之所以取负号是因为温度随时间增大而减小.

这是可分离变量的微分方程, 分离变量得:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q-20}=-k\mathrm{d}t ,$$

两边积分, 得通解为:

$$\ln(Q-20)=-kt+\ln c ,$$

即 $Q=c\mathrm{e}^{-kt}+20$.

又当 $t=0$ 时 $Q=50$，代入上式,得 $c=30$，所以

$$Q=30\mathrm{e}^{-kt}+20 .$$

二、齐次微分方程

形如 $$y'=f(\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

的微分方程称为**齐次微分方程**.

对(4)作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$

则 $$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'=u+xu'$$

代入(4)得: $$u+xu'=f(u) \tag{5}$$

(5)为可分离变量的微分方程. 故可利用可分离变量的微分方程的解法来解齐次微分方程.

例 3 解微分方程 $y'\cos\dfrac{y}{x}=1+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}$

解 此方程为齐次微分方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 即 $y=ux$, 则 $y'=u+xu'$, 代入原方程得:

$$(u+u'x)\cos u=1+u\cos u,$$

即 $$\cos u\,du=\frac{1}{x}dx.$$

两端积分, 得

$$\sin u=\ln|x|-\ln|c|,$$

即 $$x=ce^{\sin u}.$$

将 u 换为 $\dfrac{y}{x}$ 得原方程的通解为

$$x=ce^{\sin\frac{y}{x}}.$$

例 4 求微分方程 $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$ 的解.

解 将原方程两边同除以 x^2, 得

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx},$$

为齐次微分方程. 设$u=\dfrac{y}{x}$, 则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程, 得

$$u^2+u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}),$$

即
$$x(1-u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u.$$

亦即
$$(1-\frac{1}{u})\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

两边积分, 得:

$$u-\ln|u|=-\ln|x|-\ln|c|,$$

即
$$u=\ln\left|\frac{u}{cx}\right|.$$

将u换为$\dfrac{y}{x}$, 得原方程的通解为:

$$\frac{y}{x^2}=ce^{\frac{y}{x}},$$

即
$$y=cx^2e^{\frac{y}{x}}.$$

三、一阶线性微分方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{6}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**, 其中$P(x)$和$Q(x)$为已知函数. 所谓线性是指关于$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$y$均是一次的. 方程(6)中, 当$Q(x)\equiv 0$时, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7}$$

称为**齐次线性方程**; 当$Q(x)$不恒等于0时, 称为**非齐次线性方程**.

现在先求解齐次线性方程(7). 事实上，方程(7)总是一个可分离变量的微分方程.按可分离变量微分方程的求解方法，可以求得方程(7)的通解如下：

$$y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{8}$$

其中积分$\int P(x)\mathrm{d}x$仅表示$P(x)$的一个原函数.

下面解方程(6). 由于方程(7)可以看作方程(6)的一种特殊情况，将(8)中的常数c换为关于x的函数$c(x)$有可能得到方程(6)的通解. 设

$$y=c(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{9}$$

为方程(6)的解，则

$$y'=c'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-c(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\ , \tag{10}$$

将(9)和(10)代入方程(6)得:

$$c'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-c(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+c(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)\ ,$$

即

$$c\,(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\ ,$$

积分，得

$$c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\ ,$$

将其代入(9)，得方程(6)的通解为:

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c]. \tag{11}$$

由(11)式可见，非齐次线性方程的通解等于对应齐次线性方程