高校经典教材同步辅导

配套北京大学数学系王萼芳 石生明主编

《高等代数》(第三版)

九章丛书

高等代数

第三版

辅导及习题全解

主编/杨富云 孙怀东

编写/九章系列课题组

■知识点窍■逻辑推理

■习题全解■全真考题

■名师执笔■题型归类

新版

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·高等代数(北大第三版)/杨富云,孙怀东主编.
—北京:人民日报出版社,2004.9
ISBN 7-80153-967-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨…②孙… Ⅲ.高校—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099679 号

高校经典教材同步辅导·高等代数(北大第三版)

主　　编:杨富云　孙怀东
责任编辑:曲　易
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:313 千字
开　　本:787×960　1/16
印　　张:22.5
印　　数:3000
印　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-967-2/G·550
定　　价:25.80 元(全五册·128.00 元)

再版前言

自《高等代数习题全解》出版以来，受到全国各地高等院校教师和学生的厚爱，我们出版者甚感欣慰。这带给我们极大的动力，同时也带给我们很大的压力，为答谢广大读者，我们认真吸取了读者反馈的意见，及时组织作者进行了细致的修订。修订工作主要针对以下几个方面进行：

从内容上，本版仍保留原版的风格，坚持理论严谨，逻辑清晰，解题过程明确的原则，根据读者提供的反馈信息，针对原书的个别错误和不足之处进行了修改，对一些习题进行了调整，再次斟酌习题解答过程，力求使全书内容更新颖，结构更合理，解答更透彻、严密。

从体系上，在基本沿用原书体系的基础上，做了局部调整。公式的表达方式及符号的表示形式进一步统一，附图更加细致精确。本版将原书的“主要内容”部分扩充得更加细致完整；增加了“全真考题及解答”部分，使学生更深入地掌握每章的知识并为应考做准备。

但愿再版后的图书能更好地为广大读者服务，我们将不断努力，也希望能得到广大读者一如既往的支持和鼓励，及时提出宝贵意见，让本书更趋完善，更加适应读者要求。

编　者

2005.8

前　言

北京大学数学系王萼芳、石生明编写的《高等代数》是一套受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，为满足在校学生学习中经常遇到的解题难、题型复杂的要求，我九章系列课题组，精心编写了高等代数习题全解（第三版）。

本书是为了满足学生们在学习中的需要，辅导学生们更好的学习高等代数，而编写的辅导教科书，对学生所学的《高等代数》知识系统归纳总结，实例进行剖析、深化，对知识内容进行融汇贯通。本书的内容覆盖了现行理工类院校《高等代数》的全部内容，内容丰富、例题典型、习题详实、分析透彻、富于启发、文字简明，与教材紧密衔接，是课堂教学的补充和提高，但又不超出基本要求。

本书侧重于教材内容间的联系，而不是孤立知识点的考查，还侧重于习题思路的讲解、方法和技巧的培养，以提高读者灵活的分析和解决《高等代数》问题的能力，本书涵盖了《高等代数》的所有知识点，从基本知识入手，即介绍了处理数学问题的基本方法，又突出了主要技巧。希望同学们读此书时边读边思考，自己动手，此书定会使读者收到事半功倍的效果。

本书可供大专院校电大、职大、夜大等广大学生及即将参加硕士研究生入学考试的学生用书，既适合读者自学也适合复习巩固，本书由于编者水平有限，书中错误之处在所难免，恳切希望同行和广大读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第一章 多 项 式

知识结构

- 数域与一元多项式
- 一元多项式
  - 多项式除法
    - 整除
      - 带余除法
      - 定义、定理
      - 性质
    - 最大公因式
      - 定义、定理
      - 辗转相除法
      - 互素
  - 多项式分解
    - 因式分解及唯一性定理
    - 重因式
    - 多项式函数
    - 复系数与实系数多项式的因式分解
    - 有理数系数多项式的因式分解
- 多元多项式、对称多项式

主要内容

1. 数域

设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 P 中任意两个数（这两个数可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 P 中的数（即对上述代数运算封闭），那么 P 就称为一个**数域**.

有理数集、实数集、复数集都是数域，分别记为 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{C}$. 所有的数域都包含有理数域作为它的一部分，即 $P \supset Q$.

2. 一元多项式

(1)定义

设 x 是一个符号（或称文字），n 是一非负整数. 形式表达式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots +$

a_0($a_0,a_1,\cdots,a_n$ 属于数域 P)，称为**系数在数域 P 中的一元多项式**，或简称为**数域 P 上的一元多项式**.

(2)多项式相等

如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**，记为

$$f(x)=g(x).$$

(3)性质

多项式可以进行加、减、乘运算，并有与整数相类似的性质.

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$)：

1)当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$$

2)$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

(4)所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的**一元多项式环**，记为 $P[x]$，P 称为 $P[x]$ 的系数域.

3. 多项式除法

(1)带余除法

对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$\partial(g)\leqslant\partial(f)$，一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x)$，$r(x)$ 存在，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，并且这样的 $q(x)$，$r(x)$ 是唯一决定的. 所得 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，称 $r(x)$ 为余式.

(2)综合除法

设以 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 时，所得的商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 及余式 $r(x)=c_0$，则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1}=a_n, b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}, \cdots, b_0=a_1+ab_1, c_0=a_0+ab_0$$

这种计算可以排成以下格式进行：

$$\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & +) & ab_{n-1} & +)ab_{n-2} & \cdots & +)ab_1 & +)ab_0 \\
\hline
 & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \multicolumn{1}{|c}{c_0}
\end{array}$$

用这种方法求商和余式(的系数)称为**综合除法**.

(3)整除

(ⅰ)定义

数域 P 上的多项式 $g(x)$ 称为**整除** $f(x)$，如果有数域 P 上的多项式 $q(x)$，使

$$f(x) = g(x)q(x)$$

成立，$g(x)\mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

(ⅱ)定理

对于数域 P 上任意两个多项式 $f(x),g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$.

(ⅲ)性质

1°若 $f\mid g,g\mid f$，则 $f=cg$（c 为非零常数）.

2°若 $f\mid g,g\mid h$，则 $f\mid h$（传递性）.

3°若 $f\mid g_i(x),i=1,2,\cdots,r$，则 f 整除 $g_i(x)$ 的组合，即

$$f\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)],$$

其中 $u_i(x)$ 是数域 P 上的任意多项式.

4. 最大公因式

(1)定义

设 f 与 g 是 $P[x]$ 中两个多项式，$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 f 与 g 的**最大公因式**，如果它满足下面两个条件：

1)$d(x)$ 是 f 与 g 的公因式；

2)f,g 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

$(f(x),g(x))$ 表示首项系数为 1 的那个最大公因式.

(2)定理

(ⅰ)如果有等式

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，那么 f,g 与 g,r 有相同的公因式.

(ⅱ)对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 f,g，在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$，且 $d(x)$ 可表成 f 与 g 的组合，即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x),v(x)$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

(3)辗转相除法求最大公因式

如果 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，且有 $q_i(x),r_i(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x)$$

$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+0$$

其中 $\partial(r_i(x))\geqslant 0$，则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

(4)互素

(ⅰ)定义

$P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$ 称为**互素**(也称互质)的，如果 $f(x),g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=1$.

(ⅱ)定理

1°$P[x]$ 中两个多项式 f 与 g 互素的充要条件是 $P[x]$ 中有多项式 $u(x),v(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

2°若 $(f,g)=1$，且 $f(x)\mid g(x)h(x)$，则

$$f(x)\mid h(x).$$

3°若 $f_1\mid g,f_2\mid g$，且 $(f_1,f_2)=1$，则

$$f_1(x)f_2(x)\mid g(x).$$

5. 多项式分解

(1)不可约多项式

(ⅰ)定义　数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 称为域 P 上的**不可约多项式**，如果它不能表示成数域 P 上的两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积.

一个多项式是否不可约是依赖于系数域 P 的.

(ⅱ)定理

如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意两个多项式 $f(x),g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$.

(2)因式分解及唯一性定理

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是说，如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s=t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

其中 c_i 是一些非零常数.

标准分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(s),$$

其中 c 是 f 的首项系数，$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是不同的首项系数为 1 的不可约多项式，r_i 是正整数.

(3)复系数与实系数多项式的因式分解

代数基本定理　每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域中有一根.

复系数多项式因式分解定理　每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

标准分解式为

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是不同的复数,$l_1,l_2,\cdots,l_s$是正整数.

实系数多项式因式分解定理　每个次数$\geqslant 1$的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

标准分解式为

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中$p_i^2-4q_i<0,i=1,2,\cdots,r;p_i,q_i,c_j(j=1,2,\cdots,s)\in\mathbf{R},l_j,k_i\in\mathbf{N}^*$.

(4)有理系数多项式的因式分解

(ⅰ)本原多项式

如果一个非零的整系数多项式

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

的各系数没有异于± 1的公因数,即各系数互素,就称它为一个**本原多项式**.

(ⅱ)定理

1°(高斯(Gauss)引理)　两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

2°如果一非零整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

3°设$f(x),g(x)$是整系数多项式,且$g(x)$是本原的.如果$f(x)=g(x)h(x)$,其中$h(x)$是有理系数多项式,那么$h(x)$一定是整系数的.

4°设$f(x)$是一个n次整系数多项式,而$\dfrac{r}{s}$是它的一个有理根,其中r,s互素,那么必有$s|a_n$(首项系数),$r|a_0$(常数项).特别地,若$a_n=1$,那么$f(x)$的有理根都是整根,且是a_0的因子.

5°艾森斯坦因(Eisenstein)判别法

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是整系数多项式.如果有一个素数p,使得

1°$p\nmid a_n$;

2°$p|a_i,i=0,1,\cdots,n-1$;

3°$p^2\nmid a_0$.

那么，$f(x)$在有理数域上是不可约的.

6. 重因式

(1)定义

不可约多项式 $p(x)$称为多项式 $f(x)$的 k **重因式**，如果 $p^k(x)\mid f(x)$，而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.

其中 $k\in\mathbf{N}^*$，当 $k=1$ 时为单因式，当 $k>1$ 时为重因式.

(2)定理

1°如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式($k\geqslant 1$)，那么它是微商 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.

2°如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式($k\geqslant 1$)，那么 $p(x)$是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式.

3°不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充分必要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

4°多项式 $f(x)$没有重因式的充要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素.

7. 多项式函数

(1)定义

在 $P[x]$中的多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

中，令 x 取数 $\alpha\in P$，得到

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0,$$

称 $f(\alpha)$为 $f(x)$当 $x=\alpha$ 的值，这样由 $f(x)$定义了数域 P 上的函数称为 P 上的**多项式函数**.

(2)定理

1°**余数定理**　用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得余式是一个常数 $f(\alpha)$.

若 $f(\alpha)=0$，则称 α 为 $f(x)$的**根或零点**.

2°α 是 $f(x)$的根$\Leftrightarrow(x-\alpha)\mid f(x)$.

如果$(x-\alpha)$是 $f(x)$的 $k(\geqslant 1)$重因式，称 α 为 $f(x)$的 k **重根**. $k=1$ 时 α 为单根，$k>1$ 时 α 为重根.

3°$P[x]$中 n 次多项式($n\geqslant 0$)在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计算).

4°如果多项式 $f(x),g(x)$的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n+1)$有相同的值，即 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$，则 $f(x)\equiv g(x)$.

习题全解

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$，求商 $q(x)$与余式 $r(x)$：

(1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$；

(2) $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$.

【知识点窍】 带余除法

【逻辑推理】 带余除法的计算格式：

用多项式 $g(x)\neq 0$ 除多项式 $f(x)$所得的商 $q(x)$和余式 $r(x)$可以通过如下两种格式进行：

1)普通除法或长除法

$$\begin{array}{r l}
 & \text{商 } q(x) \\
\text{除式 } g(x)\,\big) & \overline{\text{被除式 } f(x)} \\
 & \underline{-)\,q(x)g(x)} \\
 & \text{余式}\quad r(x)
\end{array}$$

2)竖式除法

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商 } q(x) \\
 & \underline{-)\,q(x)g(x)} & \\
 & \text{余式}\quad r(x) &
\end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{r|l|l}
\text{商 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\
 & \underline{-)\,q(x)g(x)} & \\
 & \text{余式}\quad r(x) &
\end{array}$$

在利用以上两种格式进行计算时，要逐步利用除式 $g(x)$确定商 $q(x)$中由高次到低次的项来消去被除式的首项，以得到次数低于 $g(x)$的多项式或零多项式 $r(x)$.

【解题过程】 采用竖式除法求解

(1)

$$\begin{array}{r|r|l}
3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 & \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} &
\end{array}$$

所以

$$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$$

(2)

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-x+2 & x^4 \qquad\quad -2x+5 & x^2+x-1 \\
 & x^4-x^3+2x^2 & \\
\hline
 & \quad x^3-2x^2-2x+5 & \\
 & \quad x^3-2x^2+2x & \\
\hline
 & \qquad\quad -x^2+4x+5 & \\
 & \qquad\quad -x^2+x-2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -5x+7 &
\end{array}
$$

所以　　$q(x)=x^2+x-1$，$r(x)=-5x+7$.

2. m,p,q 适合什么条件时，有

(1)$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

(2)$x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

【知识点窍】 多项式整除

【逻辑推理】 由本章定理 1 可知，

$$g(x) \mid f(x) \text{意味着 } f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x).$$

其中，$r(x)=0$. 因此，本题解法是先求出余式，然后令余式等于 0，从而解出各系数之间的关系. 余式的求法同第 1 题.

【解题过程】 (1)$x^3+px+q=(x^2+mx-1)(x-m)+[(p+m^2+1)x+q-m]$

令$(p+m^2+1)x+q-m=0$，则有

$$\begin{cases} p+m^2+1=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

所以 $p=-m^2-1, q=m$

(2)$x^4+px^2+q=(x^2+mx+1)(x^2-mx+m^2+p-1)+(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)$

令$(2m-pm-m^3)x+(q-p-m^2+1)=0$，则有

$$\begin{cases} 2m-pm-m^3=0 \\ q-p-m^2+1=0 \end{cases}$$

当 $m=0$ 时，$q+1-p=0$，即 $p=q+1$；

当 $m\neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} 2-p-m^2=0 \\ q-m^2+1-p=0 \end{cases}$$

解得 $p=2-m^2, q=1$

所以$\begin{cases} m=0 \\ p=q+1 \end{cases}$或$\begin{cases} p=2-m^2 \\ q=1 \end{cases}(m\neq 0)$

3. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

(1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$，$g(x)=x+3$；

(2) $f(x)=x^3-x^2-x$，$g(x)=x-1+2i$.

【知识点窍】 综合除法

【逻辑推理】 当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便. 特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的作用. 用综合除法进行计算时，被除式中所缺的项必须补上零，否则计算就错了.

【解题过程】 (1)用综合除法. 写出 $f(x)$ 按降幂排列的系数，并注意缺项的系数为 0：

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\ & & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & \multicolumn{1}{|r}{-327} \end{array}$$

所以

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109, r(x)=-327$$

(2)因为

$$\begin{array}{r|rrrr} 1-2\mathrm{i} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & -9+8\mathrm{i} \\ \hline & 1 & -2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & \multicolumn{1}{|r}{-9+8\mathrm{i}} \end{array}$$

所以

$$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-5-2\mathrm{i}, r(x)=-9+8\mathrm{i}$$

4. 把 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式：

(1) $f(x)=x^5$，$x_0=1$；

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$，$x_0=-2$；

(3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$，$x_0=-i$.

【知识点窍】 综合除法

【逻辑推理】 当 $f(x)$ 表示成 $f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n$ 的时候，$f(x_0)$将 c_0 移到等式的左边，然后等式的两边同时除以 $x-x_0$，就得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c_1+c_2(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^{n-1}$$

所以，$c_1=\left.\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|_{x=x_0}$. 以此类推，便可得到 $c_2,c_3\cdots$，

【解题过程】 (1)

1	1	0	0	0	0	0
		1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	
1	1	2	3	4	5	
		1	3	6		
1	1	3	6	10		
		1	4			
1	1	4	10			
		1				
	1	5				

所以 $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

(2)

−2	1	0	−2	0	3
−2		−2	4	−4	8
	1	−2	2	−4	11
−2		−2	8	−20	
	1	−4	10	−24	
−2		-2	12		
	1	−6	22		
		−2			
	1	−8			

所以 $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$

(3)

$$\begin{array}{r|lllll}
-i & 1 & 2i & -(1+i) & -3 & 7+i \\
 & & -i & 1 & -1 & 4i \\ \hline
-i & 1 & i & -i & -4 & 7+5i \\
 & & -i & 0 & -1 & \\ \hline
-i & 1 & 0 & -i & -5 & \\
 & & -i & -1 & & \\ \hline
-i & 1 & -i & -(1+i) & & \\
 & & -i & & & \\ \hline
 & 1 & -2i & & &
\end{array}$$

所以 $f(x)=(x+\mathrm{i})^4-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})(x+i)^2-5(x+\mathrm{i})+7+5\mathrm{i}$

5. 求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$；

(2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$；

(3) $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

【知识点窍】 最大公因式的求法——辗转相除法

【逻辑推理】 利用辗转相除法，辗转相除法在计算时常采用竖式除法的格式.

【解题过程】 1)用辗转相除法，得

$q_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	$g(x)=x^3+x^2-x-1$ $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ $x^4+x^3-x^2-x$	$x=q_1(x)$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$ $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$r_1(x)=-2x^2-3x-1$ $-2x^2-2x$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}=q_3(x)$
	$r_2(x)=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$-x-1$ $-x-1$	
		0	

用等式写出来就是

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1)$$

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)r_1(x)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)r_2(x)$$

所以
$$(f(x),g(x))=x+1$$