Purcell and Varberg

FOURTH EDITION

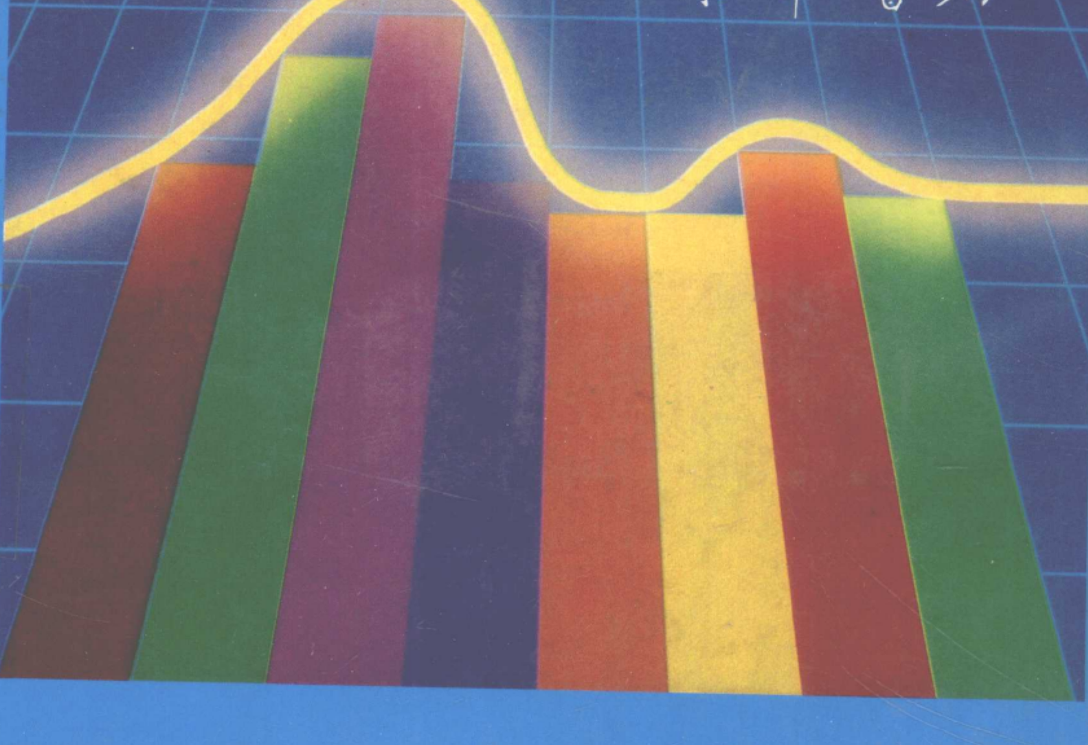
微積分精要

上 册

編 者

杜書健 謝 抗

東華書局



PURCELL

微積分精要

1984年第四版

上 册

編 者

杜 書 健

謝 抗

東華書局印行

中華民國七十五年一月初版
中華民國七十七年一月四版
PURCELL 微積分精要(上 册)
定價 新臺幣壹佰壹拾元整
(外埠酌加運費滙費)
編　者 杜書健 謝抗
發行人 卓鑫淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
郵撥:00064813
印刷者 合興印刷廠
行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(75008)

編輯大意

本書係根據美國亞利桑那大學 Edwin J. Purcell 教授原著 Calculus with Analytic Geometry 第四版編輯而成。原出版書局在國內授權由東南書報社印行。由於內容及深度頗適合我國學生，許多大學已競先採用為教學課本。東華書局有鑑於該書普受歡迎，特邀請數學專家整理出全書之精要大綱，附以全部習題詳解，以幫助讀者對原書能徹底瞭解與吸收。

本書章節完全依照原書之順序，先整理出一節之大綱，再解出該節之習題。題解中需要幾何圖形輔助時，均繪圖插排於適當之處。

為了閱讀攜帶方便，本書分為三册印行；一至六章列在上册，六至十二章為中册而十三至十八章為下册。

本書雖經細心排校、專家校訂，舛誤失當之處在所難免，懇望先進方家多所賜教，以匡不逮，俾再版時得以補正。

目　次

第一章　預　備 …………………………………… 1～57

1-1　實數系 ………………… 1
　　習題及詳解 ……………… 1
1-2　小數，稠密，計算器 …… 9
　　習題及詳解 ……………… 9
1-3　不等式 ………………… 12
　　習題及詳解 ……………… 13
1-4　絕對值，平方根，平方 … 19
　　習題及詳解 ……………… 20
1-5　直角坐標系 ……………… 26
　　習題及詳解 ……………… 27
1-6　直　線 ………………… 31
　　習題及詳解 ……………… 31
1-7　方程式的圖 ……………… 41
　　習題及詳解 ……………… 41
1-8　本章複習題及詳解 ……… 48

第二章　函數及極限值 …………………………………… 58～118

2-1　函數及其圖形 …………… 58
　　習題及詳解 ……………… 58
2-2　函數的運算 ……………… 66
　　習題及詳解 ……………… 66
2-3　三角函數 ………………… 73
　　習題及詳解 ……………… 74
2-4　極限（值）之介紹 ……… 82
　　習題及詳解 ……………… 83
2-5　極限精確的認識 ………… 89
　　習題及詳解 ……………… 89
2-6　極限定理 ………………… 95
　　習題及詳解 ……………… 96
2-7　函數的連續（性）………… 103
　　習題及詳解 ……………… 104
2-8　本章複習題及詳解 ……… 109

第三章　導數 …………………………………… 119～208

3-1　兩個問題與一個觀點（主題）……………… 119
　　習題及詳解 ……………… 119
3-2　導　數 ………………… 128
　　習題及詳解 ……………… 128
3-3　對於求導數的法則 ……… 136

習題及詳解……………………137

3-4 正弦及餘弦的導數………143

習題及詳解……………………144

3-5 鏈法則…………………………149

習題及詳解……………………149

3-6 萊布尼茲符號………………158

習題及詳解……………………158

3-7 高階導數……………………165

習題及詳解……………………165

3-8 隱函數的微分………………175

習題及詳解……………………175

3-9 相關的率……………………183

習題及詳解……………………183

3-10 微分及近似…………………193

習題及詳解……………………194

3-11 本章複習題及詳解…………199

第四章 導數的應用……………………………………………209～303

4-1 極大值與極小值……………209

習題及詳解……………………209

4-2 單調性及凹性………………220

習題及詳解……………………221

4-3 局部極大與極小……………231

習題及詳解……………………231

4-4 其他的極大－極小問題……237

習題及詳解……………………237

4-5 經濟上的應用………………252

習題及詳解……………………252

4-6 在無限大的極限值；無限大極限值……………………………259

習題及詳解……………………260

4-7 複雜維妙的圖形表示………270

習題及詳解……………………270

4-8 均值定理……………………280

習題及詳解……………………280

4-9 本章複習題及詳解…………281

第五章 積分……………………………………………………304～381

5-1 反導函數……………………304

習題及詳解……………………305

5-2 微分方程式…………………313

習題及詳解……………………313

5-3 總和與 Sigma 符號…………321

習題及詳解……………………321

5-4 介紹面積……………………329

習題及詳解……………………330

5-5 定積分………………………336

習題及詳解……………………337

5-6 微積分之基本定理…………344

習題及詳解……………………345

5-7 定積分的更重要性質………351

習題及詳解……………………352

5-8 計算定積分上的幫助………361

習題及詳解……………………361

5-9 本章複習題及詳解…………369

第六章　積分的應用……………………………………………………………… 382～448

6-1　一平面域的面積 ………… 382
　　習題及詳解………………… 382
6-2　立體的體積：薄片、圓盤、皮圈 ……………………… 393
　　習題及詳解………………… 393
6-3　旋轉體的體積：殼層…… 402
　　習題及詳解………………… 403
6-4　一平面曲線的長度……… 409
　　習題及詳解………………… 410
6-5　一旋轉體的曲面的面積…… 415
　　習題及詳解………………… 415
6-6　功……………………………… 420
　　習題及詳解………………… 420
6-7　液　　壓……………………… 426
　　習題及詳解………………… 426
6-8　矩，質量中心………………… 431
　　習題及詳解………………… 432
6-9　本章複習題及詳解 ………… 440

第一章　預　　備

1-1　實數系

摘　　要

1. 實數集合 $\mathbb{R}$ 滿足

(1)交換律：$x+y=y+x$ 及 $xy=yx$ 。

(2)結合律：$x+(y+z)=(x+y)+z$ 及 $x\cdot(yz)=(xy)\cdot z$

(3)分配律：$x(y+z)=xy+xz$

(4)單位元素：有二個不同數 0 和 1 滿足　$x+0=x$ 及 $x\cdot 1=x$

(5)反元素：每一數 x 有一加法反元素（也稱一負數），$-x$，滿足 $x+(-x)=0$ 。並且，每一數 x 除去 0 有一乘法反元素（也稱一倒數），x^{-1}，滿足 $x\cdot x^{-1}=1$ 。

稱〔$\mathbb{R}$；$+$，$\cdot$〕是一體。

2. $x<y \Longleftrightarrow y-x$ 是正的 。

3. $x\leq y \Longleftrightarrow y-x$ 是正的或零 。

4. 順序性質：

(1)三一律：若 x 與 y 是實數，下列確實有一成立：$x<y$ 或 $x=y$ 或 $x>y$ 。

(2)遞移性：$x<y$ 且 $y<z \Rightarrow x<z$ 。

(3)加：$x<y \Longleftrightarrow x+z<y+z$ 。

(4)乘：當 z 是正的，$x<y \Longleftrightarrow xz<yz$ 。

當 z 是負的，$x<y \Longleftrightarrow xz>yz$ 。

習　　題

我們假設你記起如何運用數字，但它一點不損害到練習。在問題 *1.* 至 *20.* 中，儘可能地簡化，小心去掉所有括弧及所有約分 。

1. $4-3(8-12)-6$

解：原式 $= 4+12-6=10$

2. $2[3-2(4-8)]$

解：原式 $= 2[3+8]=22$

3. $-4[3(-6+13)-2(5-9)]$

解：原式 $=-4[21+8]=-116$

4. $5[-1(7+12-16)+4]+2$

解：原式 $=5[-3+4]+2=7$

5. $\frac{5}{6}-(\frac{1}{4}+\frac{2}{3})$

解：原式 $=\frac{5}{6}-\frac{11}{12}=\frac{-1}{12}$

6. $\frac{3}{4}-(\frac{7}{12}-\frac{2}{9})$

解：原式 $=\frac{3}{4}-\frac{13}{36}=\frac{7}{18}$

7. $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3})+\frac{1}{6}]$

解：原式 $=\frac{1}{3}[\frac{-1}{24}+\frac{1}{6}]=\frac{1}{24}$

8. $\frac{-1}{3}[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})]$

解：原式 $=\frac{-1}{3}[\frac{2}{5}-\frac{1}{15}]=\frac{-1}{9}$

9. $\frac{14}{33}(\frac{2}{3}-\frac{1}{7})^2$

解：原式 $=\frac{14}{33}(\frac{11}{21})^2=\frac{22}{189}$

10. $(\frac{5}{7}+\frac{7}{9})/(1+\frac{1}{2})$

解：原式 $=\frac{94}{63}\Big/\frac{3}{2}=\frac{188}{189}$

11. $\dfrac{\frac{11}{49}-\frac{3}{7}}{\frac{11}{49}+\frac{3}{7}}$

解：原式 $= \dfrac{\dfrac{-10}{49}}{\dfrac{32}{49}} = \dfrac{-5}{16}$

12. $\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{8}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{8}}$

解：原式 $= \dfrac{\dfrac{5}{8}}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{5}{3}$

13. $1-\dfrac{2}{2+\dfrac{3}{4}}$

解：原式 $= 1-\dfrac{8}{11} = \dfrac{3}{11}$

14. $2+\dfrac{3}{1+\dfrac{5}{2}}$

解：原式 $= 2+\dfrac{6}{7} = \dfrac{20}{7}$

15. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

解：原式 $= (\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2 = 2-3=-1$

16. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

解：原式 $= 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = 5+2\sqrt{6}$

17. $3\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{8})$

解：原式 $= 3\sqrt{2}(-\sqrt{2}) = -6$

18. $2\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16})$

解：原式 $= 2\sqrt[3]{4}\cdot 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{8} = 12$

19. $\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

解：$\left(\dfrac{7}{6}\right)^{-2} = \dfrac{36}{49}$

20. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$

解：原式 $=\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}=\dfrac{8}{9}$

對於任一微積分學生一小小代數練習是好的。在問題 21 至 34 中，作指示的運算及化簡。

21. $(2x-3)(2x+3)$

解：原式 $=2x(2x+3)-3(2x+3)=4x^2-9$

22. $(2x-3)^2$

解：原式 $=4x^2-12x+9$

23. $(3x-9)(2x+1)$

解：原式 $=6x^2+3x-18x-9=6x^2-15x-9$

24. $(3x+11)(2x-4)$

解：原式 $=6x^2-12x+22x-44=6x^2+10x-44$

25. $(3t^2-t+1)^2$

解：原式 $=9t^4+t^2+1+2(3t^2)(-t)+2(3t^2)+2(-t)$

$=9t^4-6t^3+7t^2-2t+1$

26. $(2t-1)^3$

解：原式 $=(2t)^3-3(2t)^2+3(2t)-1=8t^3-12t^2+6t-1$

27. $\dfrac{x^2-4}{x-2}$

解：原式 $=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2\ (x\neq 2)$

28. $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

解：原式 $=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2\ (x\neq 3)$

29. $\dfrac{x^3-8}{2x-4}$

解：原式 $=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{2}\ (x\neq 2)$

30. $\dfrac{2x-2x^2}{x^3-2x^2+x}$

解：原式 $=\dfrac{2x(1-x)}{x(x-1)^2}=\dfrac{-2}{x-1}\ (x\neq 0,1)$

31. $\dfrac{18}{x^2+3x}-\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x+3}$

解：原式 $=\dfrac{18-4(x+3)+6x}{x^2+3x}=\dfrac{2(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{2}{x}$ $(x\neq -3,0)$

32. $\dfrac{2}{6y-2}+\dfrac{y}{9y^2-1}-\dfrac{2y+1}{1-3y}$

解：原式 $=\dfrac{(3y+1)+y+(2y+1)(3y+1)}{(3y-1)(3y+1)}=\dfrac{6y^2+9y+2}{(3y-1)(3y+1)}$

$(y\neq -\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$

33. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

解：原式 $=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x+2)}=\dfrac{x-2}{x+1}$ $(x\neq -3,-2,1)$

34. $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}}{\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}}$

解：原式 $=\dfrac{\dfrac{x(x-1)-2}{(x-3)(x-1)}}{\dfrac{5[(x-3)+(x-1)]}{(x-3)(x-1)}}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{10(x-2)}=\dfrac{x+1}{10}$ $(x\neq 1,2,3)$

35. 求下列每一值，若無定義，如此說。

(a) $0\cdot 0$

解：原式 $=0$

(b) $\dfrac{0}{0}$

解：原式：無定義。

(c) $\dfrac{0}{8}$

解：原式 $=0$

(d) $\dfrac{8}{0}$

解：原式：無定義。

(e) 8^0

解：原式 $=1$

(f) 0^8

解：原式 $= 0$

36. 說明被 0 除是無意義的如下：假設 $a \neq 0$，若 $\frac{a}{0} = b$，則 $a = 0 \cdot b = 0$，這是一矛盾，現在找一理由為何 $\frac{0}{0}$ 也是無意義。

解：對於任一實數 b，$0 \cdot b = 0$，所以，$\frac{0}{0}$ 若有定義，則不能是唯一的實數，

故 $\frac{0}{0}$ 無意義。

37. 一質數是一自然數僅有二個自然數因數，自己及1，最前面一些質數是 2,3,5,7,11,13,17。按照算術基本定理，每一自然數（不同於 1）能唯一寫為一組質數的乘積。例如：$45=3\cdot 3\cdot 5$， 寫出下列每一數為質數的乘積。注意：乘積是不重要的若這數是質數——即是，它只有一個因數。

(a) 40

解：$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

(b) 310

解：$310 = 2 \cdot 5 \cdot 31$

(c) 119

解解：$119 = 7 \cdot 17$

(d) 5400

解：$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

38. 用算術基本定理（37 題）去說明任一自然數（不同於 1）的平方，能唯一寫為一組質數的乘積，且此質數的每一個均出現偶數次。例如

$(45)^2 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$

解：任一自然數 n 的唯一分解中的質數，在 $n \cdot n$ 中均出現二次，因此，每一不同的質數將出現偶數次而且 $n \cdot n$ 的質數分解是唯一的。

39. 說明 $\sqrt{2}$ 是無理數。（提示：假設 $\sqrt{2} = p/q$，此處 p 及 q 是自然數（必須異於 1），則 $2 = \frac{p^2}{q^2}$，及如此 $2q^2 = p^2$，現在用 38 題去獲得一矛盾。

解：假設 $\sqrt{2} = p/q$，此處 p 及 q 是自然數，p 及 q 都不是 1。（若 $q = 1$，則 $\sqrt{2} = p$，——自然數，若 $p = 1$，則 $\sqrt{2} < 1$；都不真，所以 $p \neq 1$ 及 $q \neq 1$。）

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow p^2 = 2q^2$$

因此，p^2 比 q^2 多一質數因數。則 p^2 或 q^2 有一奇數次的質數因數（另一個有偶數次），此與 ***38.*** 題得到的結果矛盾，我們結論 $\sqrt{2}$ 是無理數。

40. 說明 $\sqrt{3}$ 是無理數（看 39 題）。

解：既然 3 是一質數，此解與 39 題同，只是以 3 代替 2 。

41. 說明兩個有理數的和是有理數。

解：令這兩個有理數是 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ ，此處 a, b, c, d 均是整數，且 $b \neq 0$ ，$d \neq 0$ ，

則 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$；此是有理數，既然 bd 及 $ad+bc$ 均是整數且 $bd \neq 0$。

42. (a)說明一有理數與一無理數的和是無理數。

(b)說明一有理數（不同於 0 ）與一無理數的乘積是無理數。

（提示：用矛盾證明）

解：令 a 是有理數及 b 是無理數。

(a)令 $a+b=c$ ，則 $b=-a+c$ 。若 c 是有理數，則 b（$=-a+c$）是有理數（ 41 題），矛盾，所以 $b+a$ 是無理數。

(b)設 $a \neq 0$ ，令 $ab=d$ ，則 $b=\frac{d}{a}$ ，若 d 是有理數，則 b（$=\frac{d}{a}$）是有理數，矛盾，所以 ab 是無理數。

43. 下列那個是有理數及那個是無理數？

(a) $\sqrt{4}$

解：原式是有理數。

(b) 0.375

解：原式是有理數。

(c) $1+\sqrt{2}$

解：原式是無理數。

(d) $(1+\sqrt{3})^2$

解：原式是無理數。

(e) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$

解：原式是有理數。

(f) $5\sqrt{2}$

解：原式是無理數。

44. 兩個無理數相加必須是無理數？解釋。

解：不是必須。例如，一個無理數與它負數的和是零，一有理數。

45. 說出下列每一式子是眞或是假？

(a) $-2<-20$

解：假。 $\because (-20)-(-2)=-18$ 是負的。

(b) $1>-39$

解：眞。 $\because 1-(-39)=40$ 是正的。

(c) $-3 < \frac{5}{9}$

解：眞。 $\because \frac{5}{9} - (-3) = \frac{32}{9}$是正的。

(d) $-4 > -16$

解：眞。 $\because (-4) - (-16) = 12$ 是正的。

(e) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$

解：眞。 $\because \frac{34}{39} - \frac{6}{7} = \frac{4}{273}$ 是正的。

(f) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

解：假 $\because (-\frac{44}{59}) - (\frac{-5}{7}) = \frac{-13}{413}$ 是負的。

46. 若 $a > 0$，$b > 0$，證明每一式子。

(a) $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$

解：$a^2 < b^2 \Longleftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow (b+a)(b-a) > 0$

$\Longleftrightarrow b - a > 0$〔既然 $a + b$ 是正的〕

$\Longleftrightarrow a < b$

(b) $a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

解：$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Longleftrightarrow b > a$〔兩邊均乘或均除以 ab〕

$\Longleftrightarrow a < b$

47. 證明兩數的平均值是介於這兩數之間；即是，證明 $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$。

解：$a < b \Rightarrow a + a < a + b$ 及 $a + b < b + b$

$\Rightarrow 2a < a + b < 2b$

$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

48. 若 $a \le b$，下列何者是恒眞？

(a) $a - 4 \le b - 4$

解：恒眞，兩邊均加 (-4)。

(b) $-a \le -b$

解：不恒眞。例如，$3 < 7$，但 $-3 > -7$。

(c) $a^2 \le ab$

解：不恒真。例如 $-5<3$，但 $(-5)^2>(-5)(3)$

(d) $a^3 \le a^2 b$

解：恒真。兩邊均乘 a^2，$a^2 \ge 0$。

1-2 小數，稠密，計算器

摘　要

1. 稠密性：任二個不同的實數之間必有一有理數及一無理數。

習　題

問題 *1.* 至 *6.* 中，以長除法將每一有理數變爲一小數。

1. $\frac{7}{8}$

解：原式 $=0.875$

2. $\frac{3}{7}$

解：原式 $=0.428571428571428571\cdots$

3. $\frac{3}{20}$

解：原式 $=0.15$

4. $\frac{5}{13}$

解：原式 $=0.384615384615384615\cdots$

5. $\frac{11}{3}$

解：原式 $=3.666\cdots$

6. $\frac{11}{7}$

解：原式 $=1.571428571428571428\cdots$

問題 *7.* 至 *12.* 中，將每一循環小數變爲二個整數的比率（看例 1）。

7. $0.123123123\cdots$

解：令 $x=0.123123123\cdots$，　則 $1000x=123.123123123\cdots$

$\therefore 999x=123$，　$x=123/999=41/333$。

8. 0.217171717 ⋯

解：令 $x = 0.217171717 \cdots$，　則 $100x = 21.717171 \cdots$

$\therefore 99x = 21.5$　　$x = \dfrac{215}{990} = \dfrac{43}{198}$

9. 2.56565656 ⋯

解：令 $x = 2.565656 \cdots$，　則 $100x = 256.565656 \cdots$

$\therefore 99x = 254$，　$x = \dfrac{254}{99}$

10. 3.929292 ⋯

解：令 $x = 3.929292 \cdots$，　則 $100x = 392.929292 \cdots$

$\therefore 99x = 389$，　$x = \dfrac{389}{99}$

11. 0.199999 ⋯

解：令 $x = 0.199999 \cdots$，　則 $10x = 1.99999 \cdots$

$\therefore 9x = 1.8$，　$x = \dfrac{1.8}{9} = \dfrac{1}{5}$

12. 0.399999 ⋯

解：令 $x = 0.399999 \cdots$，　則 $10x = 3.99999 \cdots$

$\therefore 9x = 3.6$，　$x = \dfrac{3.6}{9} = \dfrac{2}{5}$

13. 從問題 11 至 12，你看到某些有理數有二種不同的小數展開（即是，出現不同。）那些有理數有此性質？

解：任一非零有理數有一終止的小數表示，也有一非終止的小數表示它能夠由有終止的小數表示的最後非零數字減去 1，及此時用一無終止的一列 9 去緊接着。

14. 說明任一有理數 p/q，此處 q 的質數分解完全由一些2及5所組成，有一終止的小數展開。

解：將分母及分子同時乘足夠的 2 或 5 因數使得產生的分式的分母有相同數目的 2 及 5 因數。分母將是一正整數 10 的冪次方。此分式等於 p/q 及有一終止的小數表示。

15. 求一正有理數及一正無理數兩者都小於 0.00001。

解：0.000001 是一正有理數且小於 0.00001。

0.000001010010001000001 ⋯ 是一正無理數且小於 0.00001。

16. 最小的正整數是什麼？最小的正有理數？最小的正無理數？

解：最小的正整數是 1。無最小的正有理數。無最小的正無理數。