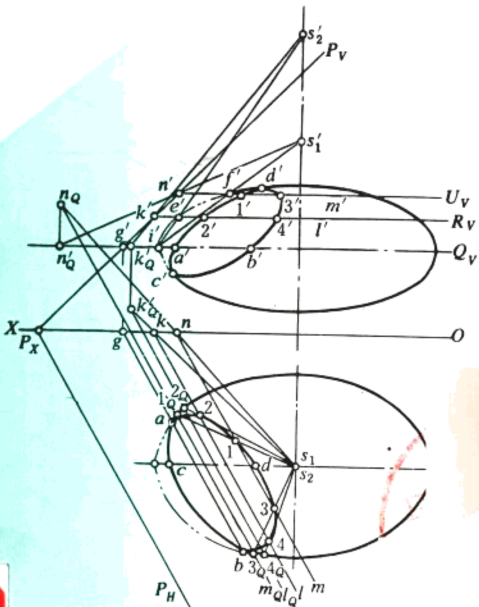
辅助投射的理论及应用



李泉矩　著

华中理工大学出版社

辅助投射的理论及应用

李泉矩　著

华中理工大学出版社

辅 助 投 射 的 理 论 及 应 用

李泉矩 著

责任编辑 弘 菱

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:6.25 字数:150 000

1992 年 4 月第 1 版 1992 年 4 月第 1 次印刷

印数:1—1 000

ISBN 7—5609—0648—6/TH·54

定价:1.68 元

(鄂)新登字第 10 号

内 容 提 要

本书系统地论述了辅助投射的理论及其应用。全书共分五章，主要包括定中心和变中心投射；对垂直面和一般位置平面的平行正投射；定方向和变方向平行斜投射；相似和全等曲线投射；空间透视仿射变换与变方向平行斜投射和变中心投射等内容。

本书内容新颖，方法简便。能解决常规方法难以解决或不能解决的问题，能避免画非圆形的辅助曲线和投射曲线，能提高图解精度和效率，为图示、图解空间几何问题和绘制工程曲面的实际问题提供了理论、方法与技巧。

本书可供从事工程设计、施工的技术人员和从事工程图学工作的科研人员参考使用，也可作为工程图学研究生的教学用书和教师的教学、科研参考书。

前　言

将空间几何要素或形体向基本投影面进行正投射，得到空间几何要素或形体的多面正投影的方法，称为多面正投射法，也就是工程界广泛采用的图示法和图解法。如果将空间几何要素或形体对一个投影面进行中心投射、平行正投射、平行斜投射、曲线投射，就可以分别得到空间几何要素或形体的单面中心投影、平行正投影、平行斜投影、曲线投影。将这些投射法引进到正投射法中，就能解决单一的正投射法不能解决的图示、图解问题。这些投射方法，统称为辅助投射法。

自 80 年代初以来，本人在工程图学的基本理论方面，作了一些研究工作，先后在各种专业刊物上发表过有关论文，本专著主要取材于这些论文。

本书共分五章。在第一章中，论述了变中心投射与远中心投射的原理和方法，以及中心投射法的分类及其适应范围。

在第三章中，论述了变方向平行斜投射的原理与方法，以及平行斜投射的分类和适应范围。同时还论证了截交线上特殊位置点的图解规律，以及相贯线上的某些特殊点的图解方法。

在第四章中，论述了相似曲线投射和全等曲线投射的原理与方法，还论述了当以圆、椭圆、双曲线、抛物线以及任意平面曲线为投射线时，空间形体的曲线投影及其应用。

在第五章中，论述了对空间形体先施行空间透视仿射变换，再进行变中心投射或变方向平行斜投射的综合方法。

以上这些均属图学中的新内容，是本人近几年来的科研成果，能解决常规方法难以解决或不能解决的问题，从而扩大了图学的应用范围和解决问题的深度及广度。

为了保持内容的完整性和系统性，在第二章中，虽未提出新的论点，但在内容的深度与广度方面，与现有出版物相比较，有所扩展与加深。

按本书提供的各种新方法进行图解时，除了圆和直线外，不需画其它的辅助曲线和投射曲线，因而使作图大为简化，提高了作图的效率和精度。

每章末尾均有小结，概括了本章的原理与方法，提出了图解规律，指出了适用范围和存在的问题。

鉴于工程实践的需要，辅助投射的原理与方法，应推广到广大的工程技术人员和工程图学工作者中去，使他们掌握它，运用它，把它作为一种手段，去解决工程实际中的有关问题。

鉴于目前尚无辅助投射方面的学术专著，本人写此拙著，愿起到抛砖引玉的作用。由于水平有限，错误之处，在所难免，恳请读者批评指正。

李泉矩

1988 年 11 月于武汉

目　录

第一章　中心投射

在（前苏联）А. В. БУБЕННИКОВ 和 М. Я. ГРОМОВ 二人合编的《НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ　ГЕОМЕТРИЯ》中，论述了中心投射法的基本知识。本章在此基础上提出了定中心投射法、变中心投射法、远中心图解法及其在多面正投影中的应用。这些原理和方法可以解决常规方法难以解决或不能解决的问题，同时可以避免画非圆辅助曲线，使图解过程简化。

§1-1　中心投射的原理

一、中心投影体系的建立

在图 1-1(a)中，假设空间有一个点 S 和平面 P，过 S 点和已知点 A 引一条投射线 SA，并延长交平面 P 于 A_P 点。则称 A_P 为已知点 A 在平面 P 上的中心投影，平面 P 为中心投影面，点 S 为投射中心，SA 为投射线，这种投射方法，称为中心投射法。当投射中心和中心投影面的位置一定时，若已知 A 点，则中心投影 A_P 是唯一确定的。但若已知 S 和 A_P，则 A 点的空间位置却不能确定。

二、中心投影的性质

1.　中心投影的基本性质

(1)　同素性　点的中心投影是点，如图 1-1(a)所示；直线的中心投影是直线，如图 1-1(b)所示的直线 BC 的中心投影是直线 B_PC_P。

(2)　从属性　若点在直线上，点的中心投影也在直线的中心投影上，如图 1-1(b)所示的 D 点在直线 BC 上，D 点的中心投影 D_P 必在直线的中心投影 B_PC_P 上；两直线交点的中心投影，必是两直

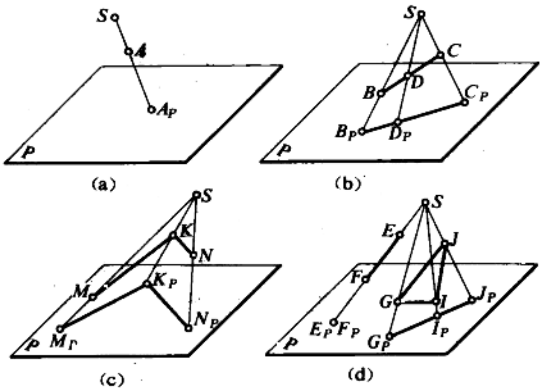


图 1-1　中心投影的基本概念

(a) 点的中心投影；(b) 直线和直线上点的中心投影；

(c) 两直线交点的中心投影；(d) 中心投影的集聚性

线中心投影的交点，如图 1-1(c)所示的直线 MK、NK 交于 K 点，则 M_PK_P、N_PK_P 交于 K_P 点，且 K_P 点是 K 点的中心投影。

(3)　集聚性　当投射中心与直线共线时，直线的中心投影为点，如图 1-1(d)所示的直线 EF 通过 S，所以 EF 的中心投影为点 E_P(与 F_P 重合)；当投射中心与平面共面时，平面的中心投影为直线，如图 1-1(d)所示的△GIJ 通过 S，所以△GIJ 的中心投影为直线 $G_PI_PJ_P$。

根据中心投影的性质，平面图形的中心投影可以看作是平面图形周边上各点的中心投影的集合。如在图 1-2 中，△ABC 各顶点的中心投影为 A_P、B_P、C_P，将它们连接起来，则得△$A_PB_PC_P$，该三角形就是△ABC 的中心投影。

2.　平面图形平行于中心投影面的中心投影的特性

当平面图形平行于中心投影面时，平面图形和它的中心投影

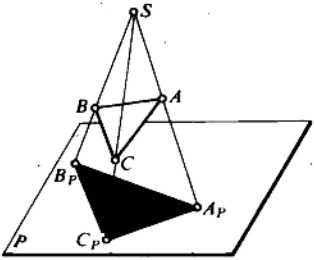


图 1-2 平面图形的中心投影

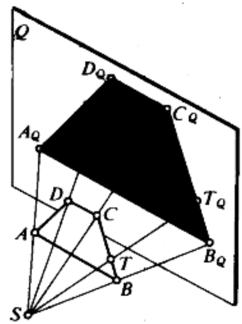


图 1-3 平行于投影面的平面图形的中心投影

之间的对应，就是空间位似对应。如在图 1-3 中，梯形 $ABCD$ 平行于中心投影面 Q，则梯形 $ABCD$ 与它的中心投影 $A_QB_QC_QD_Q$ 成空间位似对应。投射中心就是位似中心。这时的对应图形，除具备上述中心投影的同素性和从属性外，还具有下列特性：

(1) 各对应角相等。如图 1-3 所示的 $\angle ABC=\angle A_QB_QC_Q$、$\angle BCD=\angle B_QC_QD_Q=\cdots$。

(2) 各对应边平行。如图 1-3 所示的 $AB\,/\!/\,A_QB_Q$、$BC\,/\!/\,B_QC_Q$。

(3) 各对应边的比等于各对应点到投射中心的距离比，且等于常数 K，如图 1-3 中的 $AB/A_QB_Q=BC/B_QC_Q=\cdots SA/SA_Q=SB/SB_Q=\cdots=K$

(4) 若空间两线段平行，则它们的中心投影也平行，且两平行线段之比等于它们的中心投影之比，如图 1-3 所示的 $DC\,/\!/\,AB$，则 $D_QC_Q\,/\!/\,A_QB_Q$，且 $DC/AB=D_QC_Q/A_QB_Q$。

(5) 若点将线段分成定比，则点的中心投影也将线段的中心投影分成同一比例，如图 1-3 所示的 $BT/TC=B_QT_Q/T_QC_Q$。

注意：只有当平面图形平行于中心投影面时，它的中心投影才具备以上五条特性。

三、在多面正投影图中，确定中心投影的正投影

为了用中心投射法解决多面正投影的有关图解问题，必须要在多面正投影图中，确定中心投影的正投影*。即如图 1-4 所示，在 V/H 两面正投影体系中，若已知直线 AB，就可以确定 AB 的水

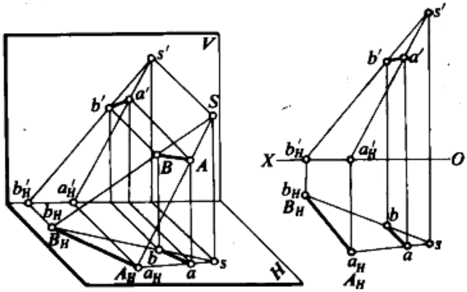


图 1-4　在多面正投影中确定中心投影的正投影

平投影 ab 和正面投影 $a'b'$。此外，在该投影体系中，同时还存在中心投影体系，即设投射中心为 S，中心投影面为 H，AB 线段端点 A 在中心投影面 H 上的中心投影为 A_H。A_H 实质上就是由 S 点通过 A 点的投射线与 H 面的交点，其正投影为 a_H 和 a'_H，可用一般求线面交点的办法求得。同理可求得 B_H（正投影为 b_H、b'_H）。连接 a_Hb_H、$a'_Hb'_H$，即为线段 AB 的中心投影的正投影，这里，A_HB_H 与 a_Hb_H 重合。下面举例论述如何确定中心投影的正投影：

例一　以投影面的垂直面** 为中心投影面，求空间几何要素的中心投影的正投影（见图 1-5）。

---

* 这里“正投影”实际是指“正投影图”，包括水平投影、正面投影、侧面投影等（以下同）。“正面投影”仅仅只指在 V 面上的正投影（以下同）。

** 在多面正投影中，垂直于任一个基本投影面的平面称为投影面的垂直面。

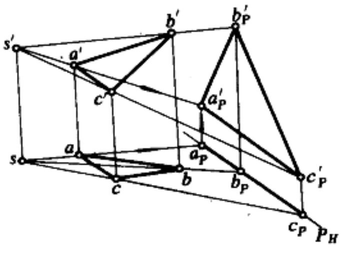


图 1-5　铅垂面为中心投影面

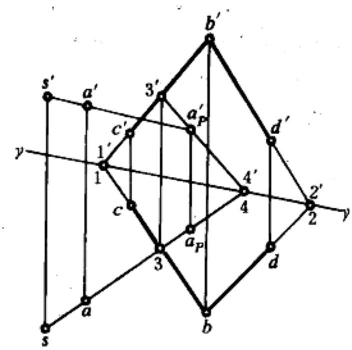


图 1-6　一般位置平面为中心投影面

若以点 S 为投射中心，以铅垂面* P 为中心投影面，则$\triangle ABC$在 P 面上的中心投影为$\triangle A_PB_PC_P$，它的水平投影为直线 $a_Pb_Pc_P$，正面投影为$\triangle a'_Pb'_Pc'_P$。图中是以 A 点为例，图示出作图过程的。

例二　以一般位置平面为中心投影面，求空间几何要素的中心投影的正投影(见图 1-6)。

若以 S 为投射中心，以相交两直线 CB，DB 所决定的平面 P 为中心投影面，求 A 点在 P 面上的中心投影，实际上就是求投射线 SA 与 P 面的交点 A_P，根据两重合平面场透视仿射对应的作图方法，其作图步骤如下：

(1)　连接 sa 并延长交 bc 于 3 点，交透视仿射对应轴 γ-γ 于 4 点。

(2)　求出 3 点的对应点 $3'$。

(3)　连接 $3'4'$，即为 34 的对应直线。

---

* 铅垂面、正垂面、侧垂面是指在三面正投影体系中，分别垂直于 H、V、W 面的平面。同理铅垂线、正垂线、侧垂线是指分别垂直于 H、V、W 面的直线(以下同)。水平面、正平面、侧平面是指在三面正投影体系中，分别平行于 H、V、W 的平面。同理水平线、正平线、侧平线是指分别平行 H、V、W 的直线(以下同)。

(4) 连接 $s'a'$ 并延长与 $3'4'$ 交于 a'_P 点，该点就是 A 点在 P 面上的中心投影的正面投影。

(5) 由 a'_P 确定 a_P，该点就是 A 点在 P 面上的中心投影的水平投影。

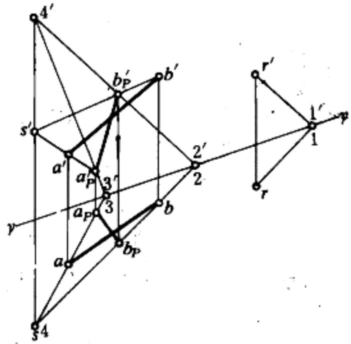


图 1-7 以点 R 和轴 γ-γ 所定平面为中心投影面

例三 以 S 为投射中心，以点 R 和平面场透视仿射对应轴 γ-γ 所决定的平面 P 为中心投影面，求线段 AB 在 P 面上的中心投影（见图 1-7）。

作图步骤如下：

(1) 连接 sb 并延长交透视仿射对应轴于点 2。

(2) 作 $r1 /\!/ sb$，再连 $r'1'$。

(3) 作 $2'4' /\!/ r'1'$。

(4) 连接 $s'b'$ 交 $2'4'$ 于点 b'_P，该点就是 B 点在 P 面上的中心投影的正面投影。

(5) 由点 b'_P 确定点 b_P，该点就是 B 点在 P 面上的中心投影的水平投影。

(6) 同理可求出 A 点的中心投影的正投影 a_P 和 a'_P。

(7) 连接 a_Pb_P 和 $a'_Pb'_P$，它们就是直接 AB 的中心投影的水平投影和正面投影。

由上述几例中可知：以空间任何平面为中心投影面，从投射中心过已知点引投射线，该投射线与中心投影面的交点，就是已知点的中心投影。然而，研究中心投影在正投影中应用时，一般不是求其中心投影本身，而是求其中心投影的正投影。

四、投射中心和中心投影面的设置

投射中心和中心投影面的设置，是依问题的需要而定的，应该力求使所设置投射中心和中心投影面，既有利于解决问题，又有利于简化作图。通过实例分析如下：

例一　在图 1-8 中，直线 EF 与平行四边形 $ABCD$ 相交，用中心投射法求其交点。

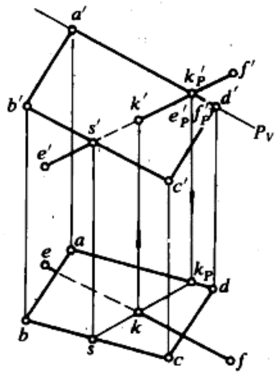


图 1-8　直线 EF 与四边形相交

首先确定中心投影面和投射中心，为了作图方便，取过 AD 的正垂面 P 为中心投影面，取 BC 上的 S 点为投射中心。其次求直线 EF 在 P 面上的中心投影，平面 $ABCD$ 在 P 面上的中心投影为重合于 AD 的直线，但其长度为无限长。由 S 点经 EF 的所有投射线，构成了一个垂直于 V 面的射线平面，该平面与 P 面的交线 E_PF_P，就是 EF 在 P 面上的中心投影（E_PF_P 是正垂线，图中只画出了 $e'_Pf'_P$，没有画 e_Pf_P）。所以 E_PF_P 与平行四边形的中心投影的交点 K_P，就是直线 EF 与平形四边形的交点 K 在 P 面上的中心投影。最后由 K_P 进行反投射，得到射线 SK_P 与 EF 的交点 K，该点就是 EF 与 $ABCD$ 的交点。在水平投影中，sk_P 与 ef 的交点 k，就是 K 点的水平投影，其正面投影为 k'。

例二　在图 1-9 中，求出直线 AB 与迹线平面 P 的交点。

首先把投射中心 S 取在 P_H 上，以 V 面为中心投影面，则平面

P 在 V 面上的中心投影为 P_V。直线 AB 在 V 面上的中心投影为 A_VB_V（A_VB_V 为 V 面内的铅垂线，其正投影为 a_Vb_V 和 $a'_Vb'_V$）。P_V 与 A_VB_V 的交点 K_V（正投影为 k_V 和 k'_V），就是线段 AB 与平面 P 的交点 K 在 V 面上的中心投影。然后由 K_V 进行反投射，射线 SK_V 与 AB 的交点 K，就是 AB 与 P 的交点。在正面投影中，$s'k'_V$ 与 $a'b'$ 的交点，就是 K 点的正面投影 k'，其水平投影为 k。

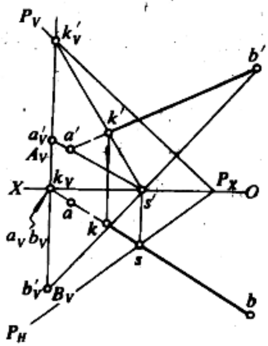


图 1-9 直线 AB 与 P 面相交

例三 在图 1-10 中，设已知△ABC 与△DEF 相交，求它们的交线。

首先取 B 点作为投射中心，取过 AC 的正垂面 P 作为中心投影面，则△ABC 在 P 面上的中心投影集聚为直线 A_PC_P（A_PC_P 与 AC 重合）。△DEF 的 DE 边和 DF 边分别交 P 面于点Ⅰ和Ⅱ，显然点Ⅰ和Ⅱ在 P 面上的中心投影 $Ⅰ_P$ 和 $Ⅱ_P$ 就是它们自身。再连接射线 BD，就可求出 D 点在 P 面上的中心投影 D_P（它的正投影为 d_P 和 d'_P），于是△$Ⅰ_PD_PⅡ_P$ 就是△ⅠDⅡ在 P 面上的中心投影。而△ⅠDⅡ就是△DEF 的下面部分。由于△ABC 在 P 面上的中心投影集聚为直线 A_PC_P，故△ABC 与△DEF 的交线 KJ 的中心投影 K_PJ_P 必与 A_PC_P 重合。同时从图中可看出，△DEF 的 DE 边与 DF 边同△ABC 应相交，若分别相交于 K、J 点，则Ⅰ、K 两点在 DE 上，Ⅱ、J 两点在 DF 上。于是在水平投影中，分别连接 d_P1_P 和 d_P2_P，并延长交 d_Pc_P 于 k_P 和 j_P，线段 k_Pj_P 就是两个三角形的交线在 P 面上的中心投影的水平投影，同理求出它的正面投影 $k'_Pj'_P$。最后由 K_P 和 J_P 进行反投射，连接射线 BK_P 和 BJ_P 并分别交 DE 和 DF 于 K 点和 J 点，