经济应用数学基础丛书

微积分

主编 宋礼民 刘 原 阮霭兰
柳翠华 金 璐 屈力进

中国地质大学出版社

经济应用数学基础丛书

微 积 分

主编 宋礼民 刘 原 阮霭兰
柳翠华 金 璐 屈力进

中国地质大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括函授与极限、导数与微分、中值定理、不定积分、定积分、无穷级数以及多元函数的微积分和微分方程。每章末配有习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨，叙述清楚，可以作为高等专科学校、成人高校和高等职业技术学院的经济、管理和财贸、计算机应用等专业微积分课程教材，也可作为财经管理人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/宋礼民，刘原等主编.—武汉：中国地质大学出版社，2002.9

(经济应用数学基础丛书)

ISBN 7-5625-1710-X

Ⅰ.微…

Ⅱ.①宋… ②刘…

Ⅲ.微积分-教材

Ⅳ.O13

微积分 宋礼民 刘 原 等主编

责任编辑：方 菊 责任校对：张咏梅

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路31号) 邮编：430074

电话：(027)87482760 传真：87481537 E-mail：cbo@cug.edu.cn

经 销：全国新华书店

开本：850毫米×1168毫米 1/32 字数：360千字 印张：13.875

版次：2002年9月第1版 印次：2002年9月第1次印刷

印刷：武汉市教育学会印刷厂 印数：1—2 500套

ISBN 7-5625-1710-X/O·55 全套定价：36.00元

前　言

《经济应用数学基础丛书》是根据国家教育部批准印发的《高等工程专科学校课程教学基本要求》编写的。

在编写中，力求贯彻“必须、够用”的原则，结合经济、管理实践，按照教育改革的要求，尝试对教材进行改革。本丛书注重基本概念和原理的讲解，注重基本技能的训练，注重培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，同时兼顾数学的严密性和系统性，在例题和习题的选择上尽可能多联系经济和管理科学的实际。

《经济应用数学基础丛书》分两册出版。本册《微积分》介绍函数和极限、导数和微分、中值定理、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数微积分和微分方程等内容；另一册为《概率论与数理统计》，介绍随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理、数理统计学概论、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等内容。

本书编写结构严谨，叙述通俗易懂，每章末尾配有习题，包括选择题和解答题，书末附有习题答案。该丛书可供高等专科学校、成人高校和高等职业技术学院的财经、管理和计算机等专业高等数学课程使用，也可作为经济管理人员的学习参考书。书中带有“*”号标记的章节可选学。

本书由宋礼民、刘原、阮霭兰、柳翠华、金璐、屈力进等编写。全书由宋礼民、刘原修改和统稿。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家、读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

（注：* 号为选学内容）

第 1 章　函数与极限

微积分研究的基本对象是函数，主要工具是极限理论. 因而，函数与极限是高等数学里重要的概念. 本章将介绍函数、极限、函数的连续性等概念以及它们的一些性质.

1.1　函数

1.1.1　集合

(1)　集合的概念.

所谓集合，就是指具有某种特定性质的一些事物的全体. 例如，某班级的全体同学构成了一个集合；全体实数也是一个集合.

集合一般用大写英文字母表示，如 A、B、C 等，构成集合的每一对象称为该集合的元素，用小写字母 a、b、c、x 等表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a \in A$；若 a 不是 A 的元素，是说 a 不属于 A，记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$.

(2)　集合的表示法.

集合一般有两种表示方法:列举法和描述法.

所谓列举法,就是把集合的所有元素按任意顺序列出,然后用“{ }”括起来.要求元素不能重复,不能遗漏.

例如,由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合A,可记作

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

如果用 B 表示方程$x^2-5x+6=0$ 的根这一集合,那么用列举法可表示为

$$B=\{2,3\}$$

所谓描述法,是指把集合中元素所具有的共同属性描述出来.

设 A 是一个集合,x 是A 中任一元素,$P(x)$是 x 所具有的属性,则记

$$A=\{x \mid P(x)\}$$

例如,设 M 表示大于 -2 且不超过 4 的全体实数,则用描述法可表示为

$$M=\{x \mid -2<x\leqslant 4\}$$

一般地,用 N 表示自然数集;用 R 表示实数集;用 $\varnothing$ 表示空集(不含任何元素的集合).

(3) 集合的运算.

集合之间的运算常见的有两种:并集与交集.

定义 1.1 由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

例 1 设 $A=\{1,2,3,4\}$;$B=\{1,3,5,7\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$.

例 2 设 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$；$B=\{x\mid -1<x\leqslant \frac{1}{2}\}$，则 $A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.

定义 1.2 由集合 A 与集合 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

如例 1 中，$A\cap B=\{1,3\}$；例 2 中，$A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\}$.

(4) 区间.

在中学里已经学过：规定了原点、正方向与单位长度的直线叫数轴. 数轴上的点与实数之间是一一对应的关系. 有时为了形象化起见，把数 x 称为点 x，就是指数轴上与数 x 对应的那个点.

定义 1.3 设 $a,b\in \mathrm{R}$，且 $a<b$，称介于 a,b 间的全体实数为以 a,b 为端点的开区间，记为 (a,b).

它表示满足 $a<x<b$ 的所有 x 构成的集合，因此有

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

其中，称 a 为左端点，b 为右端点. 显然开区间不包含它的两个端点（图 1－1）.

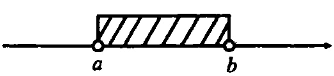

图 1－1

图 1－2

称满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x 为以 a,b 为端点的闭区间，记为 $[a,b]$（图 1－2），即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

类似地，可以定义半开半闭区间：

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\} \qquad (图\ 1-3)$$

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\} \qquad (图\ 1-4)$$

图 1－3

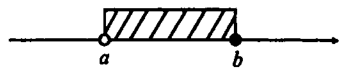

图 1－4

以上这些端点为有限值的区间都称为有限区间.

此外，还有下列无限区间.我们规定下面符号所表示的含义为

$$(-\infty,+\infty)=\mathrm{R}$$

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\} \qquad (图\ 1-5)$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\} \qquad (图\ 1-6)$$

$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$

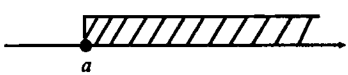

图 1－5

图 1－6

(5) 邻域.

定义 1.4 设 $a,\delta\in\mathrm{R}$，且 $\delta>0$.称数集 $\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}$ 为点 a 的 δ 邻域.记为 $N(a,\delta)$.即

$$N(a,\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}$$

点 a 叫做$N(a,\delta)$的中心，δ 叫做$N(a,\delta)$的半径.

由于$|x-a|$表示点x与点a之间的距离，因此点 a 的δ 邻域在数轴上表示与点 a 距离小于δ 的一切点x 的全体(图 1－7)，即开区间$(a-\delta,a+\delta)$(用不等式的性质也可说明).所以有

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

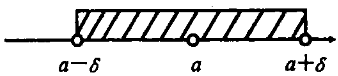

图 1－7

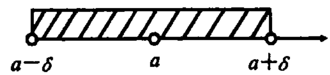

图 1－8

例如，$|x-1|<\frac{1}{2}$表示 1 的$\frac{1}{2}$邻域 $N(1,\frac{1}{2})$，它是以 1 为中心，$\frac{1}{2}$为半径的开区间，即

$$(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2})=(0.5,1.5)$$

有时，我们还会遇到空心(去心)邻域这个概念.

所谓 a 的δ 空心邻域，就是在 a 的δ 邻域里去掉中心点a 后所剩下的部分(图 1－8)，记为 $N(a,\delta)$.即

$$N(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

1.1.2 函数概念

生活中，我们时常会接触到各种各样的量，其中有些量在考察的过程中不起变化，也就是保持固定的值不变，这种量叫做常量.但有些量在考察的过程中却有变化，可以取各种不同的数值，这种

量叫做变量.

例如,任意三角形的各内角的大小可以变化,是变量;但其内角和却始终等于 180°,是常量.又如,在经济生活中,讨论某产品的总成本时,可以把总成本看成是固定成本与变动成本之和.其中,固定成本不因产量的变化而改变,是常量;而变动成本却随产量的增加而增加,是变量.

习惯上,用 a、b、c 等符号表示常量;用 x、y、σ、t 等表示变量.为研究问题方便,有时也把常量看成取同一个值的变量.

自然界里,各种不同的变量之间不是彼此孤立的.它们相互联系、相互依赖.这种变量之间的依存关系中最简单而又非常重要的一种关系就是数学里的函数关系.

如圆面积 S 与圆半径 r 之间有如下关系

$$S=\pi r^2$$

对于半径的每一取值 r,通过上式,可以得到唯一的面积值 S 与之对应,我们就称 S 是 r 的函数.

下面给出函数的一般性定义:

定义 1.5 设 x,y 是两个变量,如果存在一个对应规律 f,对于变量 x 在其变化范围内的每一个值,根据这一对应规律,变量 y 总有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数.记为

$$y=f(x)$$

这时,称 x 为自变量,y 为因变量.

例如:$y=x+1$,当 x 取任一实数值 x_0 时,通过上式,一定有唯一的 y 的取值 $y_0=x_0+1$ 与之对应,所以关系式 $y=x+1$ 表明 y

是x的函数.

同样地，$y=\sqrt{x^2-4}$；$y=\sin x$；$y=\ln\cos x$；

$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 都表明y是x的函数.

称在自变量x的不同取值范围内，用不同的式子来表示的函数为分段函数.如上面提到的绝对值函数$y=|x|$.又如符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ e^x+2, & x<1\end{cases}$$

等都是分段函数.

我们把自变量x的变化范围叫做函数的定义域.记为$D(f)$，它是使$y=f(x)$有意义(确定值)的自变量x的取值的全体.

所谓对应规律f，它代表的只是x与y之间的一种关系.它可用其他符号代替，如φ, g, F等均可.如果需要同时考察x的几个函数，为避免混淆，就要用不同的记号来分别表示对应规律.

定义1.6 设函数$y=f(x)$的定义域为$D(f)$，对$x_0\in D(f)$，称函数y的对应值y_0为函数在x_0处的函数值，记为

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}$$

全体函数值所构成的集合叫做$y=f(x)$的值域.记为Z或$Z(f)$.

例3 已知函数$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求$f(1), f(0), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，

$f[f(-2)]$.

解 分析:要求出函数在某处 $x=x_0$ 的函数值 $f(x_0)$,只要将 x_0 代替函数表达式中自变量 x 的位置即可.因此有

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(0)=\frac{0}{0+1}=0$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{x+1}$$

$$f(-2)=\frac{-2}{-2+1}=2,\quad f[f(-2)]=f(2)=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ -2x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$及 $f(x^2+1)$.

解 分析:求分段函数在某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$时,首先要判别 x_0 属于哪个范围,再把 x_0 的值代入相对应的式子中的 x 的位置即可.于是有

$$f(0)=-2\times 0=0$$

$$f(2)=2^2+1=5$$

$$f(-1)=-2\times(-1)=2$$

$$f(x^2+1)=(x^2+1)^2+1$$

例 5 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$及 $f(1)$.

解 因为 $f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$, 用 x 代替上式中的 $x+$

$\frac{1}{x}$得

$$f(x)=x^2-2$$

故
$$f(1)=1^2-2=-1$$

为了更好地理解函数概念的实质，必须进一步研究函数的两个要素，即函数的定义域与对应规律．

求函数的定义域时，要掌握以下两点：

第一，若函数表示实际问题，就要根据变量的实际意义来确定定义域．

例如前面提到的圆面积 S 与半径 r 之间的函数关系

$$S=\pi r^2$$

因圆的半径不能为零或负数，所以其定义域为$(0,+\infty)$．

第二，若函数 $y=f(x)$是解析式，其定义域是使表达式有意义的自变量的全体，这时，求定义域应遵循以下几点：

①分式的分母不能为零．

②偶次根号下的式子非负．

③对数符号后的真数必须为正数．

④反正弦或反余弦符号后的式子的绝对值不超过 1．

⑤正切符号后的式子不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；余切符号后的式子不能等于 $k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．

⑥若函数式由若干项组成，则其定义域是各项定义域的交集（公共部分）．

例 6 求函数 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{\lg x-1}+\arcsin(\frac{x}{10}-1)$的定义域．

解 要使 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{\lg x-1}+\arcsin(\frac{x}{10}-1)$ 有定义，必须满足

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x>0 \\ \lg x-1\neq 0 \\ \left|\frac{x}{10}-1\right|\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x>0 \\ x\neq 10 \\ 0\leqslant x\leqslant 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 20 \\ \text{且 } x\neq 10 \end{cases}$$

所以，所求定义域为

$$D(f)=[2,10)\cup(10,20]$$

例 7 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \sin x+1, & x<0. \end{cases} \qquad \text{求 } D(f).$$

解 分段函数的定义域为各部分(各段)定义域的并集.

①当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{1-x}$，因为分母不能等于 0，即 $1-x\neq 0$，得 $x\neq 1$，定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

②当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，定义域为 $\{0\}$.

③当 $x<0$ 时，$f(x)=\sin x+1$ 都有意义，定义域为 $(-\infty,0)$.

综合①、②、③知所求定义域为

$$\begin{aligned} D(f) &= (-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,1)\cup(1,+\infty) \\ &= (-\infty,1)\cup(1,+\infty) \end{aligned}$$

例 8 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域.