赛

MATHEMATICS
OLYMPIAD

数学竞赛

[redacted]

湖南教

数学竞赛

限期

《数学竞赛》编委会

湖南教育出版社

数 学 竞 赛

本 社 编

责任编辑：欧阳维诚 孟实华

湖南教育出版社出版发行（长沙展览馆路8号）
湖南省新华书店经销 湖南省邵阳市美术印刷厂印刷

787×1092毫米 32开 印张：2.35 字数：60000
1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷
印数：1—4,200

ISBN 7—5355—0908—8／G·940

定 价：1.10元

目　录

妙题巧解

他山之石

问题征解

舒五昌

(复旦大学数学系)

第四届全国中学生数学冬令营试题解答

第四届全国中学生数学冬令营于今年元月在合肥中国科技大学举行。17、18两天上午，来自全国各地的76名中学生参加了两场考试。每次考试各三题，每题20分。参赛学生中，最高成绩为119分，获得100分以上的有9名。下面是冬令营的试题及解答。

一　在半径为1的圆周上，任意给定两个点集A，B，它们都由有限段互不相交的弧组成，其中B的每段弧的长度都等于π/m，m是个自然数。用A^j表示将集合A沿反时针方向在圆周上转动$j\pi/m$弧度所得的集合($j=1,2,\cdots$)。求证：存在自然数k，使得

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}l(A)l(B),$$

这里$l(X)$表示组成点集X的互不相交的弧段的长度之和。

证　对于半径为1的圆周上的点集E，用$E^{(j)}$表示将E沿顺时针方向在圆周上转动$j\pi/m$弧度所得的集合($j=1,2,3,\cdots$)。设B是由i_0段互不相交的长度都是π/m的弧组成，这i_0段记为$B_1,B_2,\cdots,B_{i_0}$。于是

$$l(A^k\cap B)=l(A\cap B^{(k)})=\sum_{i=1}^{i_0}l(A\cap B_i^{(k)})\quad(k=1,2,\cdots)$$

又由于

$$l(A)=\sum_{k=1}^{2m}l(A\cap B_i^{(k)})\quad(i=1,2,\cdots,i_0)$$

就得到

$$\sum_{k=1}^{2m} l(A^k \cap B) = \sum_{k=1}^{2m}\Big(\sum_{i=1}^{i_0} l(A \cap B_i^{(k)})\Big) = \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{k=1}^{2m} l(A \cap B_i^{(k)})$$

$$= i_0 l(A)$$

因为$2m$个数之和为$i_0 l(A)$，因此，在1，…，$2m$中至少有一个k_0使得

$$l(A^{k_0} \cap B) \geqslant \frac{1}{2m} i_0 l(A).$$

注意到B是i_0段互不相交的长度都是π/m的弧所组成，

$$l(B) = i_0\pi/m.$$

即有

$$l(A^{k_0} \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{m} i_0 l(A) = \frac{1}{2\pi} l(A) l(B)$$

注 在讨论的点集都是圆周上互不相交的有限弧段所组成的集时，$l(A)$相当于A的长度．证明中用到的主要是下面的原理：如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相交，则$l(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = l(A_1) + \cdots + l(A_n)$。证明中，$l(A) = \sum_{k=1}^{2m} l(A \cap B_i^{(k)})$ 这个等式是因为 $\bigcup_{k=1}^{2m} B_i^{(k)}$就是整个圆周．在这里，$B_i$ 如果是长度为$\frac{\pi}{m}$的"半开半闭"的弧也完全适用．由于长度与弧段含不含端点是没有关系的，因此也不特别强调．有的同学用了"每一个点被盖住多少次"的说法，理由是没说清楚的．例如有若干块（为简单起见，假定都是三角形的）板放在桌上．设为A及 $B_1, B_2, \cdots, B_{10}$，如果A的每一点都至少被$B_1, \cdots, B_{10}$ 中的四块所盖住，要证明 $B_1, \cdots, B_{10}$中至少有一块面积$\geqslant \frac{4}{10}$乘A的面积，就不是很容易的事。

二 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$都是正数($n \geqslant 2$)，且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，求证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

证 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_i}{\sqrt{1-x_i}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}.$$

由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{1-x_i}\cdot 1)$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1}=\sqrt{n-1}\sqrt{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}\sqrt{n}=\sqrt{n}$$

又对于n个正数$y_1,\cdots,y_n$，由算术—几何—调和平均不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\geqslant\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}\geqslant\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}},$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}$$

把这些不等式合起来，就得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}$$

$$\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}$$

$$-\sqrt{n-1}\sqrt{n}=\frac{n^2-(n-1)n}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

注 本题有多种证法，原式右端由柯西不等式即知是$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$的。至于左端，考虑函数$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$，直接计算$f(x)$的导数，得到$f''(x)>0$ $(x\in(0,1))$。从而f在$(0,1)$上是凸函数。因此，对于$(0,1)$中的$x_1,\cdots,x_n$，$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$，因而题中不等式的左端$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$。也就证明了题中的不等式。

三 设S是复平面上的单位圆周（即模等于1的复数的集合），f是从S到S的映射，对于任何$z\in S$，定义

$$f^{(1)}(z)=f(z),\ f^{(2)}(z)=f(f(z)),\ \cdots,$$
$$f^{(k)}(z)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{k\text{个}f}(z)))),\ \cdots,$$

如果$c\in S$及自然数n使得

$$f^{(1)}(c)\neq c, f^{(2)}(c)\neq c,\cdots,f^{(n-1)}(c)\neq c,$$
$$f^{(n)}(c)=c,$$

我们就说c是f的n-周期点。

设m是大于1的自然数，f的定义如下：

$$f(z)=z^m \qquad (z\in S).$$

试计算f的1989-周期点的个数。

解 由$f(z)=z^m$，用归纳法易知$f^{(n)}(z)=z^{m^n}(n=1,2,3\cdots)$

对于自然数n，记$B_n=\{z\in S\,|\,f^{(n)}(z)=z\}$。由于$B_n$是1的$m^n-1$次根的全体所成之集，所以$|B_n|=m^n-1$。（$|B|$表示集$B$中元素的个数）。

对于自然数k及$z\in B_k$，易见对于自然数r，

$$f^{(rk)}(z)=f^{((r-1)k)}(f^{(k)}(z))=f^{((r-1)k)}(z)$$
$$=\cdots=f^{(k)}(z)=z.$$

所以当k，n为自然数且$k|n$时，$B_k\subset B_n$。

又如果k，n为自然数，$n=rk+j\quad(1\leqslant j\leqslant k-1)$，且$z\in B_k$，

$$f^{(n)}(z)=f^{(j)}(f^{(rk)}(z))=f^{(j)}(z).$$

所以，如果$z\in B_k\cap B_n$，则由上式得$z\in B_j$。用辗转相除法，即知$B_k\cap B_n\subset B_{(k,n)}$，($(k,n)$表示$k$和$n$的最大公约数)。

把上面的结论合并起来，即得

$$B_k\cap B_n=B_{(k,n)}\tag{1}$$

由定义，$\{f\text{的1989-周期点全体}\}=B_{1989}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{1988}B_k\right)$.

因此，它等于

$$B_{1989}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{1988}(B_{1989}\cap B_k)\right)=B_{1989}\backslash\left(\bigcup B_t\right)$$

(此处$t\in T=\{t\,|\,t\text{整除}1989,\ t<1989\}$)

由于$1989=3^2\cdot221=3^2\cdot13\cdot17$，1989的真约数必是663($=3\cdot13\cdot17$)，153($=3^2\cdot17$)，117($=3^2\cdot13$)这三个数中(至少)一个的约数，所以

$$\{f\text{的1989-周期点全体}\}=B_{1989}\backslash(B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117})\tag{2}$$

由容斥原理，

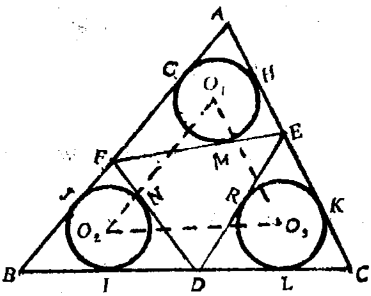
$$|B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}|=|B_{663}|+|B_{153}|+|B_{117}|$$
$$-|B_{663}\cap B_{153}|-|B_{663}\cap B_{117}|-|B_{153}\cap B_{117}|$$
$$+|B_{663}\cap B_{153}\cap B_{117}|=|B_{663}|+|B_{153}|+|B_{117}|$$
$$-|B_{51}|-|B_{39}|-|B_9|+|B_3|$$

于是，f的1989-周期点的总数为

$$m^{1989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{39}+m^9-m^3.$$

注 在本题的解答中，式(1)是重要的，再由1989的三个约

数663，153，117的性质(1989有三个素约数3，13，17，这三个数是1989分别除以这三个素约数的商)，就得到式(2)。再用容斥原理即得到结果。参赛学生中，不少人通过对于单位根的讨论，得到了相当于(1)的结论，一部分学生还指出了1989的这三个约数的性质，但极少人写出相当于(2)的结论，一般都直接写出"由容斥原理，即得f的1989-周期点的总数为…，"但算出的结果却有好几种不同的答案。本解答中用B_n的写法，使得容斥原理的用法明确而清楚。



四 设点 D，E，F 分别在$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB上，且$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$的内切圆有相等的半径r，又以r_0和R分别表示$\triangle DEF$和$\triangle ABC$的内切圆半径，求证

$$r+r_0=R$$

证 把$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$的内切圆圆心分别记为O_1，O_2，O_3，又对于一个三角形，用S，P分别表示面积及周长。我们先证明

$$P_{\triangle O_1O_2O_3}=P_{\triangle DEF}，\quad S_{\triangle O_1O_2O_3}=S_{\triangle DEF}.$$

三个内切圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$与相应的三角形的切点标记如图。由于$\overline{DE}=\overline{DR}+\overline{RE}=\overline{DL}+\overline{EK}$，$\overline{EF}=\overline{EM}+\overline{MF}=\overline{EH}+\overline{FG}$及$\overline{FD}=\overline{FN}+\overline{ND}=\overline{FJ}+\overline{ID}$。所以

$$P_{\triangle DEF}=\overline{KH}+\overline{GJ}+\overline{IL}.$$

再因为O_2I，O_3L都与BC垂直，且$\overline{O_2I}=\overline{O_3L}=r$，因此，有$\overline{O_2O_3}=\overline{IL}$，同理$\overline{O_3O_1}=\overline{KH}$，$\overline{O_1O_2}=\overline{GJ}$。即得$P_{\triangle DEF}=P_{\triangle O_1O_2O_3}$。

再看$\triangle DEF$与$\triangle O_1O_2O_3$的面积。

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CDE}$$

$$=\frac{r}{2}(P_{\triangle AEF}+P_{\triangle BFD}+P_{\triangle CDE})=\frac{r}{2}(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle DEF})$$

而 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3}$ 是三个等腰梯形 AO_1O_2B，BO_2O_3C，CO_3O_1A的面积之和，所以

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3}=S_{AO_1O_2B}+S_{BO_2O_3C}+S_{CO_3O_1A}$$
$$=(r\cdot\overline{GJ}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{AG}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{JB})+(r\cdot\overline{IL}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{BI}$$
$$+\frac{1}{2}r\cdot\overline{LC})+(r\cdot\overline{KH}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{CK}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{HA})$$
$$=\frac{r}{2}(2\cdot\overline{GJ}+2\overline{IL}+2\overline{KH}+\overline{AG}+\overline{JB}+\overline{BI}+\overline{LC}$$
$$+\overline{CK}+\overline{HA})=\frac{r}{2}(\overline{GJ}+\overline{IL}+\overline{KH}+P_{\triangle ABC})$$
$$=\frac{r}{2}(P_{\triangle O_1O_2O_3}+P_{\triangle ABC})$$

由$P_{\triangle DEF}=P_{\triangle O_1O_2O_3}$　即得$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle O_1O_2O_3}$。
这样，$\triangle DEF$和$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆半径相等(都是r_0)。

AO_1，BO_2，CO_3分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的平分线，其延长线的交点O是$\triangle ABC$的内心。因为$O_1O_2\parallel AB$，$O_2O_3\parallel BC$，$O_3O_1\parallel CA$，O也是$\triangle O_1O_2O_3$的内心。O到AB的距离是R，O到O_1O_2的距离是$\triangle O_1O_2O_3$的内切圆半径，等于$\triangle DEF$的内切圆半径r_0，O_1O_2与AB的距离为r，易见

$$r+r_0=R$$

本题有多种解法，这里的证明只用到平面几何的工具。

五　空间中有1989个点，其中任何三点不共线，把它们分成点数各不相同的30组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形。问：要使这种三角形的总数最大，各组的点数应为多少？

解　把1989个点分成30组，各组的点数记为$n_1,\cdots,n_{30}$时，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形，则这种三角形的总数为 $\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$。

由于总共只有有限种分法，因而使所作三角形总数最大的分法必定存在。

如果把一种分法的两组点数改动，其余各组不变，不妨设各组点数为n'_1，n'_2，…，n'_{30}，而$n'_i=n_i(i=3,4,\cdots,30)$。

由于 $$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k=\left(\sum_{k=3}^{30} n_k\right)n_1n_2+\left(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30} n_j n_k\right)\left(n_1+n_2\right)$$
$$+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n'_in'_jn'_k=\left(\sum_{k=3}^{30} n'_k\right)n'_1n'_2$$
$$+\left(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30} n'_jn'_k\right)(n'_1+n'_2)+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30} n'_in'_jn'_k$$
$$=\left(\sum_{k=3}^{30} n_k\right)n'_1n'_2+\left(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30} n_jn_k\right)(n_1+n_2)$$
$$+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k$$

因为$n_1+n_2=n'_1+n'_2$，因此，如果$|n'_2-n'_1|<|n_2-n_1|$，就有
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n_in_jn_k<\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30} n'_in'_jn'_k.$$

现设各组点数为n_1，…，n_{30}时，所作三角形总数最大，由于要求各组点数都不同，不妨设$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_{30}$。由上所述，可得到$n_1$，…，$n_{30}$必须有下列性质：

(i)对于任何$k(1\leqslant k\leqslant 29)$，$n_{k+1}-n_k\leqslant 2$。

如果某一个k_0使$n_{k_0+1}-n_{k_0}\geqslant 3$，则取$n'_{k_0}=n_{k_0}+1$，$n'_{k_0+1}=n_{k_0+1}-1$（$n'_i=n_i$当$i\neq k_0$，$k_0+1$）即在第$k_0+1$组中把一个点放入第$k_0$组，将使所作三角形总数确实增大。

(ii)使得$n_{k+1}-n_k=2$的k至多只有一个。

如果有二个i，j（不妨设 $1\leqslant i<j\leqslant 29$）使得 $n_{i+1}-n_i=2$，$n_{j+1}-n_j=2$。这时取$n'_{j+1}=n_{j+1}-1$，$n'_i=n_{i+1}$（其余各组点数不变）。这样将使所作三角形总数确实增大。

由于$\sum_{i=1}^{30} n_i=1989$。因此不可能$n_{k+1}-n_k=1$（$k=1$，2，…，

2^9)。（否则这30个数是等差数列，其和应为15的倍数，但$15 \nmid 1989$）。因而恰有一个k_0使$n_{k_0+1}-n_{k_0}=2$。这30个数为

$$n_1,\ n_1+1,\ \cdots,\ n_1+k_0-1,\ n_1+k_0+1,\ \cdots,\ n_1+30.$$

于是，$1989+k_0=\frac{1}{2}\cdot 30(n_1+1+n_1+30)=15(2n_1+31)$，

解得

$$k_0=6,\ n_1=51.$$

所求的各组点数为51，52，…，56，58，59，…，81。

注 本题实际上是要论证的题，使总数最大的分法的存在是需要指出的。从逻辑上讲，由存在性，必要条件以及使必要条件满足的解的唯一性，才能保证这是使得总数最大的分法。有的同学在论证时，用了如“当各组的点数越接近时，所作三角形总数越大”的说法。在两组的情况下这话还可理解，而在30组的情况下，“各组点数越接近”其实是一个含糊的说法。这是在论证中应该努力避免的。

六 f是定义在$(1,+\infty)$上且在$(1,+\infty)$中取值的函数，满足条件：对任何x，$y>1$及u，$v>0$，都成立

$$f(x^u y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}},$$

试确定所有这样的函数f。

解 设f是满足题中条件的函数，特别取$u=\frac{1}{2}$，得

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}f(y)^{\frac{1}{4v}}. \qquad (\text{当}x,y>1,v>0\text{时})$$

对于x，$y>1$，取v使$y^v=x^{\frac{1}{2}}$，即$v=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\ln y}$（这样的$v$是正数），从而对于$x$，$y>1$，都成立

$$f(x)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$$

$$f(x)^{\frac{1}{2}}\leqslant f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$$

$$f(x)^{\ln x}\leqslant f(y)^{\ln y}$$

由对称性，$f(x)^{\ln x}=f(y)^{\ln y}$。因此$f(x)^{\ln x}$是个常数$c(c>1)$

从而 $f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}$

下面验证当$c>1$时，函数$f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}$确实满足题中的条件。对于x，$y>1$，u，$v>0$，由于

$$f(x^u y^v)=c^{\frac{1}{\ln x^u y^v}}=c^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}},$$

即要验证 $c^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}\leqslant c^{\frac{1}{4u\ln x}}\cdot c^{\frac{1}{4v\ln y}}=c^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}$。

由$c>1$，上面的不等式等价于

$$\frac{1}{u\ln x+v\ln y}\leqslant\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}.$$

稍作代数运算，这个不等式等价于

$$4uv\ln x\ln y\leqslant(u\ln x+v\ln y)^2$$

但最后这个不等式是确实成立的。

由上所述，满足题中条件的函数是$f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}$，其中c是任何大于1的实数。

注 本题是求满足一个不等式的函数的一般形式，但由于不等式对于任何$x,y>1$，$u,v>0$成立，这个条件是很强的。而由这个不等式就可决定这函数必须是形为$c^{\frac{1}{\ln x}}$的函数。但这只是必要条件，所以后面的验证是不可少的。

命题研究

张筑生

（北京大学数学系）

第四届全国中学生数学冬令营试题评说

——命题思想与得分情况分析

早在1986年初，当首届全国中学生数学冬令营在南开大学举行的时候，主试组就确定了这样一个目标：令冬营竞赛试题的难度应该每年有所提高，争取在几年的时间里逐渐提高到国际中学生数学奥林匹克(IMO)的中等难度试题的水平。经过四年来的努力，这一目标已接近达到了。本届冬令营有不少参赛的同学取得了很好的成绩，这是很值得庆贺的一件事。这一届冬令营的主试组又首次统计公布了各题的得分情况，这也是一件大有好处的事。在这篇文章里，我们对第四届冬令营竞赛试题的命题思想与各题的得分情况作一概要的说明。通过对得分情况的分析，既可以检验命题的意图是否达到，又可以发现学生训练的不足之处。这对于今后改进命题与训练这两方面的工作，无疑都将起到促进作用。

第一题 在半径为1的圆周上，任意给定两个点集A和B，它们都由有限段互不相交的弧组成，其中B的每段弧的长度都等于$\frac{\pi}{m}$，m是个自然数。用A^j表示将集合A沿反时针方向在圆周上转动$\frac{j\pi}{m}$弧度所得的集合($j=1,2,3,\cdots$)。求证：存在自然数k，使得

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}l(A)l(B),$$

这里$l(X)$表示组成点集X的互不相交的弧段的长度之和。

这题的背景是遍历理论。考察单位圆周上旋转$2\pi\alpha$弧度的变

换。如果α是无理数，那么这旋转变换是遍历的。为了证明其遍历性，可以借助于适当的逼近手续并利用与本题类[illegible]等方法作估计。

本题的结论从几何直观的角度来看是很自然的。大多数学生都注意到：A中任何一点在旋转一周的过程中，恰好经过B的每一弧段一次。但有不少学生不知道怎样利用这一事实得到最后的结论。其实，如果以B^{-j}表示B沿顺时针方向转动$\frac{j\pi}{m}$弧度所得到的集合，那么只要稍作分析就能发现

$$l(A^j \cap B) = l(A \cap B^{-j}).$$

抓住这一要点，证明的困难就迎刃而解了。剩下的事情只不过是适当地利用平均值的性质——几个正数的平均值，介于其中的最大数与最小数之间。只要抓住了关键，就可以把这道题的证明写得既简单又清楚。如果不将转动A改换成转动B，虽然经过细致的讨论最终也能证明结论，但手续就麻烦得多。

这题的平均得分是9.3（每题满分为20，下同），低于命题时的估计。由此可见，相当一部分学生不善于通过分析题目的特点找出解决问题的适当途径。这使我们回想起第三届冬令营第三题的情形。在那一题中，“龙头”的定义只依赖于其后跟随的数，而与前面的数无关。有的学生没有抓住这一特点，在作归纳证明时，不去对数列的首项作归纳，而是对数列的尾项作归纳。本来应该着重考察“龙头”，他却去费劲地考察“龙尾”，这真是最笨的办法。

第二题 设x_1，x_2，…，x_n都是正数$(n \geqslant 2)$且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，求证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

这题考察学生综合运用几个重要的基本不等式的能力。解这