

實用微積分

下 卷

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

國立廈門大學數理學系印
中華民國三十二年一月

實用微積分目次

下 卷

第十二章	積分方法	頁(219—256)
第十三章	體積，面積，質量	(257—274)
	第十三章附圖	
第十四章	力學上之定積分	(275—306)
第十五章	均值定理與不定式	(307—324)
	第十四及第十五兩章附圖	
第十六章	級數	(325—354)
第十七章	立體解析幾何	(355—372)
	第十七章附圖	
第十八章	偏微分及其應用	(373—404)
第十九章	重積分	(405—432)
	第十八章及第十九章兩章附圖	
第二十章	近似的及機械的積分法	(433—444)
	第二十章附圖	

英漢名詞對照表及索引

勘誤表

如欲知詳情請向
第一編者或出版者
或各經銷處接洽

第十二章 積分方法

(12.1) 積分表 求函數之積分，其方法較諸求函數之微分，實為較繁艱。為便于應用起見，遂有積分表之刊印，將較常用之積分，分類登記，以資檢用。此等表篇幅之較大者當推 Bierens de Haan 所計之定積分表 (Tables d'intégrales définies) 而流傳較廣者則為 B. O. Pierce 教授所編之積分簡表 (A Short Table of Integrals)。此外，各微積分教本多附有更簡要之積分表，以便讀者。欲示積分表中各公式之真確，固可將兩方微分而證之，但在純粹數學方面言之，各公式應如何推演，實為甚重要且富有趣味之問題。至於應用方面，因有時所欲求之積分，表中未曾列入，僅可由表中其他公式推算而得，故有系統的積分方法亦為實用數學家所亟欲考究。本章目的即為略舉各種常用之較重要之積分方法。

(12.2) 最基本之積分 最基本之積分公式實不甚多。茲將積分常數略去而將此等公式之曾經前此證過者彙集於下以資參考 ($a, b, c, \dots$ 等為常數)：

A. 普通公式：

$$(I) \quad \int \{f(x) \pm g(x) \pm \dots\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \dots;$$

$$(II) \quad \int a f(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$(III) \quad \int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du;$$

B. 特別公式：

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| \quad (2)$$

$$\int \sin u du = -\cos u \quad (3)$$

$$\int \cos u du = \sin u \quad (4)$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u \quad (5)$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u \quad (6)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \quad (8)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \sin^{-1} u \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u \quad (10)$$

自上述各公式即可推得不少之常用積分，茲分別陳述之。

(12.3) 代替法 代替法之理論，已包含在普通公式(III)中，

前曾屢用之。簡言之，此法係另選一適當之變數代入被積數 $f(x)$ 及微分 dx 中，以使所欲求之積分可化為上列各特別公式之一。讀者對於此法之應用，貴能一見即知應如何代替，此與善於觀察之生物學家遇及動物植物時，能即知其屬於何門類頗相似。

例如 $\int \sqrt{a+bx} dx$, $\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}} dx$, (頁 99), $\int \cos ax$,

(頁 137), $\int e^{ax} dx$ (頁 169) 及 $\int \tan x dx$ (頁 174) 等皆是。

(12.4) $\sin^m x \cos^n x$ 之積分 若 m 或 n 為整數, 則 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 可依照特別公式 (1), (2), (3) 及 (4) 以推演之。但演算之時尚需下列三角公式:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (11),$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (12),$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (13),$$

及 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (14).$

茲分為三目而討論之如下:

(A) 若 m 為正奇數, 例如 $2q+1$ (q 為任何正整數或 0), 則 $\sin^m x dx$ 可寫為

$$-\sin^{2q} x d \cos x = -(1 - \cos^2 x)^q d \cos x.$$

如以 $u = \cos x$ 代入, 則

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\int (1 - \cos^2 x)^q \cos^n x d(\cos x) \\ &= -\int (1 - u^2)^q u^n du, \end{aligned}$$

再用兩項定理發展 $(1 - u^2)^q$, 則被積函數將為 u 之多項式而公式 (1) 即可應用矣。

例 1 $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x d \cos x$
 $= -\int (\cos^6 x - \cos^4 x) d \cos x = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

(B) 若 n 為正奇數, 例如 $2p+1$ (p 為任何正整數或 0)

則類推上述方法即有

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int (\sin^m x) (1 - \sin^2 x)^p d \sin x \\ &= \int v^m (1 - v^2)^p dv,\end{aligned}$$

而公式(1)復可應用。

例 2 $\int \cos^5 x \sin^{-\frac{1}{2}} x dx = \int \cos^4 x \sin^{-\frac{1}{2}} x d \sin x$

$$\begin{aligned}&= \int (1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x) \sin^{-\frac{1}{2}} x d \sin x \\ &= \int (\sin^{-\frac{1}{2}} x - 2 \sin^{\frac{3}{2}} x + \sin^{\frac{7}{2}} x) d \sin x \\ &= 2 \sin^{\frac{1}{2}} x - \frac{4}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x + \frac{2}{9} \sin^{\frac{9}{2}} x + C.\end{aligned}$$

(C) 若 m 及 n 均為正偶數，則可先用方程(14)，(13)或(12)化被積函數為倍角之正弦與餘弦，然後再展為多項式而積分之。

例 3 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \cos^3 x dx$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \frac{d \sin 2x}{2} \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.\end{aligned}$$

例4 $\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx$

把式子展開

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$\sin^2 x$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}) dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C.$$

(12.5) 倍數角正弦與餘弦相乘之積分 遇被積函數為 $\sin px$

$\cos qx$ ，或 $\sin px \sin qx$ 或 $\cos px \cos qx$ 各乘積時，可先用下列

$$\sin(p \pm q)x = \sin px \cos qx \pm \cos px \sin qx$$

三角公式： $\sin(p+q)x = \sin px \cos qx + \cos px \sin qx$

$$2 \sin px \cos qx = \sin(p-q)x + \sin(p+q)x \quad (15),$$

$$2 \sin px \sin qx = \cos(p-q)x - \cos(p+q)x \quad (16),$$

$$2 \cos px \cos qx = \cos(p-q)x + \cos(p+q)x \quad (17),$$

將各乘積改為適當之和然後再引用公式(3)與(4)而積分之。

例 $\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(3-2)x + \cos(3+2)x) dx$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.$$

(12.6) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ 與 $\int \cot^m x \csc^n x dx$ 設 n 為正

偶數而 m 非正奇數，則因有

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (18),$$

$$d \tan x = \sec^2 x dx \quad (19),$$

及

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad (20),$$

$$d \cot x = -\csc^2 x dx \quad (21)$$

各關係，故若令 $n=2p+2$ ， p 為適當之整數，復以 $u=\tan x$ ，或 $v=\cot x$ 代入，則

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x dx &= \int \tan^m x \sec^{2p} x (\sec^2 x dx) \\ &= \int u^m (1+u^2)^p du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cot^m x \csc^n x dx &= \int \cot^m x \csc^{2p} x \csc^2 x dx \\ &= - \int v^m (1+v^2)^p dv,\end{aligned}$$

而于展開後復可按項積分之矣。

例 1
$$\int \tan^{\frac{2}{3}} x \sec^4 x dx = \int \tan^{\frac{2}{3}} x (1 + \tan^2 x) d \tan x$$

$$= \frac{3}{5} \tan^{\frac{5}{3}} x + \frac{3}{10} \tan^{\frac{11}{3}} x + C.$$

例 2
$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx = \int \cot^4 x \csc^2 x dx = - \int \cot^4 x d \cot x$$

$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x + C.$$

設 m 為正奇數， n 為任何數，則積分之法有二：其一係將 $\tan x$ ， $\sec x$ ， $\cot x$ ，或 $\csc x$ 表為 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之函數而後應用(12.4)節(A)目或(B)目方法；其他則應用方程(18)或(20)及

$$d \sec x = \sec x \tan x dx \quad (22),$$

$$d \csc x = -\csc x \cot x dx \quad (23).$$

之關係而令 $u = \sec x$ ， $v = \csc x$ ，將所求之積分化為（令 $m=2q+1$ ）：

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \tan^{2q} x \sec^{n-1} x d \sec x = \int (u^2-1)^q u^{n-1} du,$$

$$\int \cot^m x \csc^n x dx = - \int \cot^{2q} x \csc^{n-1} x d \csc x = - \int (v^2-1)^q v^{n-1} dv,$$

然後展開再按項積分之。

$$\begin{aligned}\text{例 3 } \int \tan^5 x \sec^{\frac{1}{2}} x dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^{-\frac{1}{2}} x d \sec x \\ &= \int (\sec^{\frac{7}{2}} x - 2 \sec^{\frac{3}{2}} x + \sec^{-\frac{1}{2}} x) d \sec x \\ &= \frac{2}{9} \sec^{\frac{9}{2}} x - \frac{4}{5} \sec^{\frac{5}{2}} x + 2 \sec^{\frac{1}{2}} x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{或 } \int \tan^5 x \sec^{\frac{1}{2}} x dx &= \int \sin^5 x \cos^{-\frac{11}{2}} x dx \\ &= - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^{-\frac{11}{2}} x d \cos x \\ &= - \int (\cos^{-\frac{11}{2}} x - 2 \cos^{-\frac{7}{2}} x + \cos^{-\frac{3}{2}} x) d \cos x \\ &= -\frac{2}{9} \cos^{-\frac{9}{2}} x + \frac{4}{5} \cos^{-\frac{5}{2}} x - 2 \cos^{-\frac{1}{2}} x + C.\end{aligned}$$

(12.7) $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ 之積分 此積分只需公式(10)與(2)

茲分 $p=0$ 及 $p \neq 0$ 兩目而討論之。 10. $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \sin^{-1} u$

(A) $p=0$ ，遇此之時，可將 ax^2+bx+c 配成兩完全平方之和或差，如

$$ax^2+bx+c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right\};$$

若 $4ac > b^2$ ，則用 $u = x + \frac{b}{2a}$ ， $k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 代入，乃有

$$\int \frac{q dx}{ax^2+bx+c} = \frac{q}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{q}{a} \int \frac{du}{u^2+k^2} = \left(\frac{q}{ak} \right) \int \frac{d\left(\frac{u}{k}\right)}{\left(\frac{u}{k}\right)^2+1}$$

而公式(10)即可應用。

若 $4ac < b^2$ ，則以 $u = x + \frac{b}{2a}$ ， $m^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 代入，乃有

$$\int \frac{q dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{q}{a} \int \frac{du}{u^2 - m^2} = \frac{q}{2am} \int \left(\frac{du}{u-m} - \frac{du}{u+m} \right),$$

而公式(2)即可應用。

例 1 $\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{2(x+1)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\sqrt{2}(x+1)}{2(x+1)^2 + 1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \sqrt{2}(x+1) + C.$$

例 2 $\int \frac{dx}{2x^2 + 4x - 1} = \int \frac{dx}{2(x+1)^2 - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 - \frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\frac{du}{x+1-\sqrt{\frac{3}{2}}} - \frac{du}{x+1+\sqrt{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{3/2}} \ln \frac{x+1-\sqrt{3/2}}{x+1+\sqrt{3/2}} + C.$$

(B) $p \neq 0$ 。遇此時，可先將分子配成分母之紀數與一常數之和如下：

$$\int \frac{(px+q) dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b) + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx$$

$$= \frac{p}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

右邊第一積分可用公式(2)，第二積分則可按前段所述之方法求之。

例 3 $\int \frac{(3x+4) dx}{x^2+4x+3} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4) - 2}{x^2+4x+3} dx$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+3) - \int \frac{2 dx}{(x+2)^2 - 1}$$

$$\int \frac{2dx}{(x+2)^2-1} = 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2-1} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \ln(x+1) - \ln(x+3) = \ln \frac{x+1}{x+3}$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+3) - \ln \frac{x+1}{x+3} + C,$$

(12.8) 有理函數之積分 凡函數可表為兩多項式之商者名為

有理函數，例如

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b^{m-1} x + b^m},$$

此中各 a 與各 b 均為常數， m 與 n 則為正整數。如 $n \geq m$ ，則照其所示之除法計算後，即可寫 $R(x)$ 為

$$R(x) = P(x) + \frac{f(x)}{F(x)},$$

此中之 $P(x)$ ， $f(x)$ 及 $F(x)$ 均為 x 之多項式，惟 $f(x)$ 之次數較 $F(x)$ 低，二者之間且無公共之因子。 $P(x)$ 之積分不難立即求得，故所待討論者僅有 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 之積分。茲分四目陳述之。

(A) 若 $F(x)$ 之 m 個根均為實數，且無重複者，例如 $s_1, s_2, \dots, s_m$ ，則可將之寫為

$$F(x) = b_0(x-s_1)(x-s_2)\dots(x-s_m).$$

于是按代數原理 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 分數可拆為 m 個部分分數 (partial fractions)，其分母各為 $(x-s_1), (x-s_2), \dots, (x-s_m)$ 等於下：

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-s_1} + \dots + \frac{A_m}{x-s_m},$$

此中各 A 代表適當之常數，而積分時可逕用公式(2)。求各部分分數中之各常數 (例如 A_m)，其法甚多。最速者似為將恆等式兩邊各乘以 $(x-s_m)$ 後，再令 $x=s_m$ 。如是右邊為 A_m

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-s_1} + \frac{A_1}{x-s_2} + \cdots + \frac{A_m}{x-s_m}$$

$$\frac{(x-s_m)f(x)}{F(x)} = \frac{(x-s_m)A}{x-s_1} + \frac{(x-s_m)A_1}{x-s_2} + \cdots + A_m$$

228 Put $x = s_m$ 第十二章 積分方法

而
$$A_m = \left(\frac{f(x)}{(x-s_1)(x-s_2)\cdots(x-s_{m-1})} \right)_{x=s_m} = \frac{f'(s_m)}{F'(s_m)}$$

此中之 $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, $F'(s_m)$ 指將 s_m 代 $F'(x)$ 中 x 所得之值。

例 1 求 $\int \frac{3x+1}{x(x^2-1)} dx$ 。

被積函數之分子，其次數已較低於其分母，故可即行拆為部分分數。分母 $F(x)$ 之根有三，即 $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ 及 $s_3 = -1$ ，故令

$$\frac{3x+1}{x(x^2-1)} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}。$$

欲定 A_1 之值，將此恆等式兩邊各乘以 x ，再以 $x=0$ 代入。

如是得

$$A_1 = \left(\frac{3x+1}{x^2-1} \right)_{x=0} = \frac{1}{-1} = -1, \text{ 於 } x=1, \text{ 於 } x=-1$$

同樣
$$A_2 = \left(\frac{3x+1}{x(x+1)} \right)_{x=1} = \frac{3+1}{1(1+1)} = \frac{4}{2} = 2,$$

而
$$A_3 = \left(\frac{3x+1}{x(x-1)} \right)_{x=-1} = \frac{-3+1}{-1(-1-1)} = \frac{-2}{2} = -1,$$

是以
$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x(x^2-1)} dx &= - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2 dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\ln x + 2 \ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln c \\ &= \ln \frac{c(x-1)^2}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

(B) 若 $F(x)$ 之 m 個根均為實數而其中復有重複 r 次之根

s ，則 $F(x)$ 可寫為

$$F(x) = b_1(x-s_1)\cdots(x-s)^r\cdots(x-s_m),$$

而分析為部分分數時，乃有

$$\frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{A_1}{a-s_1} + \dots + \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{B_2}{(x-s)^2} + \dots + \frac{B_r}{(x-s)^r} + \dots$$

$$\dots + \frac{A_m}{a-s_m} \quad \text{Handwritten: } \text{for } (x-s)^r \text{ put } x=s.$$

此中各 A 及 B_r 均不等於 0，但其他各 B 可為 0！

求積分時只須用公式(1)與(2)。此中各 A 可依前所述之方法求之。至於各常數 B ，可用同法先求 B_r ，再自恆等式兩方減去 $\frac{B_r}{(x-s)^r}$ 一分數而後用前法以求 B_{r-1} 。其他各 B 可仿此逐步計之。

例 2 求 $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)} dx$ 。

令
$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x^3} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x}$$

乘兩邊以 $(x+1)$ 再以 $x=-1$ 代入即得

$$A = \left(\frac{3x^2+2x-3}{x^3} \right)_{x=-1} = \frac{3-2-3}{-1} = 2;$$

乘兩邊以 x^3 ，再以 $x=0$ 代入，則得

$$B_3 = \left(\frac{3x^2+2x-3}{x+1} \right)_{x=0} = -3;$$

將 $\frac{B_3}{x^3}$ 移至左邊，則有

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)} + \frac{3}{x^3} = \frac{3x^2+2x-3+3x+3}{x^3(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2+5x}{x^3(x+1)} = \frac{3x+5}{x^2(x+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_1}{x}.$$

乘兩方以 x^2 ，再以 $x=0$ 代入，乃有

$$B_2 = \left(\frac{3x+5}{x+1} \right)_{x=0} = 5;$$

欲求 B_1 固可再自恆等式兩邊減去 $\frac{B_2}{x}$ 而後仿前法計之。但因只餘 B_1 一常數未知，故可任意令 x 為一適當值，即可計得之。設

令 $x=1$ ，則有 $\frac{3+5}{2} = \frac{2}{2} + 5 + B_1$ ，即 $B_1 = 4 - 6 = -2$ 。

$$\begin{aligned} \text{故 } \int \frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} \right) dx \\ &= 2 \ln \frac{x+1}{x} + \frac{3}{2} x^{-2} - 5x^{-1} + C. \end{aligned}$$

(C) 若 $F(x)$ 之根非全為實數，則 $F(x)$ 之中必含如 $a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ 之因子且 $b_1^2 < 4a_1 c_1$ 。設此等因子未曾重複則

$\frac{f(x)}{F(x)}$ 應拆為

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1}{x-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{p_1 x + q_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} \\ &\quad + \frac{p_2 x + q_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \dots, \end{aligned}$$

此中各 A 不等 0，同下標之 p 與 q 不能同為 0。

求積分時除公式(2)外，尚需(12.7)節所述之方法。此中各 A 仍可用前此所述之法計之，至於各 p 與各 q 之值，可先將已求得含各 A 之分數減去，然後通分右方分數，再行比較分子各乘幂之係數。

例 3 求 $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 6x - 13}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$ 。

因分子與分母同次，故應先相除以零

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 6x - 13}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = 1 - \frac{2(x^2 - 4x + 7)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}.$$

因 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + 1)(x - 1)^2$ ，故可寫

$$\frac{x^2 - 4x + 7}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{px+q}{x^2+1};$$

乘以 $(x-1)^2$ 後再以 $x=1$ 代入，即得

$$B_2 = \left(\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 1} \right)_{x=1} = \frac{1 - 4 + 7}{1 + 1} = \frac{8 - 4}{2} = 2;$$

將 $\frac{B_2}{(x-1)^2}$ 移至左邊而化之，則 S

$$\frac{x^2 - 4x + 7 - 2(x^2 + 1)}{(x-1)^2(x^2 + 1)} = \frac{B_1}{x-1} + \frac{px+q}{x^2+1},$$

$$\text{或 } \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2(x^2 + 1)} = \frac{-(5+x)}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{B_1}{x-1} + \frac{px+q}{x^2+1};$$

次乘以 $(x-1)$ 後再以 $x=1$ 代入，乃得

$$B_1 = \left(\frac{-(5+x)}{x^2 + 1} \right)_{x=1} = -\frac{5+1}{1+1} = -3;$$

再將 $\frac{B_1}{x-1}$ 移至左邊而化之，則

$$\frac{3x^2 + 3 - 5 - x}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{3x+2}{x^2+1} = \frac{px+q}{x^2+1};$$

比較分子各 x 乘幕之係數即得 $p=3, q=2$ 。是以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^3 + 6x - 13}{(x^2 + 1)(x-1)^2} dx &= \int dx - 2 \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{3x+2}{x^2+1} \right) dx \\ &= x + 4(x-1)^{-1} + 6 \ln(x-1) - 3 \int \frac{2x dx}{x^2+1} - 4 \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= x + \frac{4}{x-1} + 6 \ln(x-1) - 3 \ln(x^2+1) - 4 \tan^{-1} x + C. \end{aligned}$$

(D) 若 $F(x)$ 中之二次因子與一次因子均有重複者，則 $\frac{f(x)}{F(x)}$

應拆為含 $\frac{B_i}{(x-s)^i} + \dots + \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{p_r x + q_r}{(ax^2 + bx + c)^r} + \dots$
 $\dots + \frac{p_1 x + q_1}{ax^2 + bx + c}$ 各部分分數。此中常數 B_i 不等 0， p_r 與 q_r 不得同為 0，其餘各 B 與 p 及 q 則可為 0。至于其值均可按前述方法計之。拆為部分分數後只有下列兩普通形式

$$\int \frac{dx}{(x-s)^n} \quad \text{及} \quad \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx;$$

前者可運用公式(1)或(2)而後者可化為

$$\begin{aligned} \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx &= \int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b) + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^n} dx \\ &= \frac{p}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q + \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}. \end{aligned}$$

此中之第一積分亦屬於公式(1)或(2)之類，其第二積分則于配 ax^2+bx+c 成兩平方之和或差後，可用後(12.13)節(A)目之公式逐步簡化之，以至只須求 $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ 。惟此積分之算法已見前(12.7)節(A)目，故本目各積分亦得分別計之。

綜合各結果言之，凡有理函數之積分必可以有理，對數或反正切三種初等函數表之。

例4 求 $\int \frac{3x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 2}{x(x^2+1)^3} dx$

令 $\frac{3x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{p_1 x + q_1}{x^2+1} + \frac{p_2 x + q_2}{(x^2+1)^2}$

乘以 x 後再令 $x=0$ 即得 $A=2$ 。自兩邊減去 $\frac{A}{x} = \frac{2}{x}$ ，則有

$$dx = \frac{v}{a(ax+b)^{\frac{r}{p}}} dt$$

$$= \frac{v}{a} \frac{t^{r-1} dt}{t^{-r}} = \frac{v}{a} t^{r-1} dt \quad \text{Stan}$$

實 用 微 積 分

$$\frac{3x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 2 - 2(x^2 + 2x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\equiv \frac{p_1 x + q_1}{x^2 + 1} + \frac{p_2 x + q_2}{(x^2 + 1)^2}$$

乘以 $(x^2 + 1)^2$ 後再令 $x^2 = -1$, 維持 x 不變而比較係數, 則因

$$p_2 x + q_2 \equiv (x^3 + x^2 + 4x + 1)_{x^2 = -1} = -1 - x - 1 + 4x + 1 = 3x,$$

故 $p_2 = 3, q_2 = 0$ 。再減去 $\frac{3x}{(x^2 + 1)^2}$, 乃有

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \equiv \frac{p_1 x + q_1}{x^2 + 1};$$

比較分子各項之係數, 即知 $p_1 = 1, q_1 = 1$ 。故所求之積分爲

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int \left\{ \frac{2}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{3x}{(x^2+1)^2} \right\} dx$$

$$= \int \frac{2 dx}{x} + \left[\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \right] + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{a(ax+b)^{\frac{r}{p}}} dx = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{3}{2(x^2 + 1)} + C.$$

(12.9) 被積函數含 $(ax+b)^{\frac{1}{p}}$ 及 $(ax+b)^{\frac{1}{q}}$ 時

今若令

$(ax+b)^{\frac{1}{r}} = t, r$ 爲 p 與 q 之最小公倍數, 例如 $r = np = mq$ (m 與

n 均爲正整數), 則 $(ax+b)^{\frac{1}{p}} = (ax+b)^{\frac{n}{r}} = t^n, (ax+b)^{\frac{1}{q}} = t^m,$

$dx = \frac{rt^{r-1} dt}{a}$ 。如是被積函數可化爲 t 之有理函數, 而得應用

(12.8) 節之方法以積分之。

$$\frac{3x}{(x^2+1)^2} = \frac{p_1 x + q_1}{x^2+1} + \frac{p_2 x + q_2}{(x^2+1)^2}$$

$$3x = p_1 x \quad p_1 = 3$$

例 1 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

令 $t = x^{\frac{1}{6}}, x = t^6, dx = 6t^5 dt$, 如是