

科學圖書大庫

# 數學是什麼

譯者 吳英格 余文能 劉政  
校閱 張壽彭 趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

# 數學是什麼

譯者 吳英格 余文能 劉 政

校閱 張壽彭 趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會  
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月二十日五版

## 數學是什麼

基本定價 3.60

譯者 吳英格 東海大學講師  
余文能 東海大學講師  
劉政 清華大學講師  
校閱 張壽彭 輔仁大學教授  
趙少鐵 成功大學教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號  
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 15795 號  
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

## 中譯本卷頭語

這是一部深入淺出的數學名著。著者不僅是當代分析學巨擘、德意志偉大數學傳統的繼承人之一，也是希爾柏學派內圈人物中碩果僅存的一位。跟他的老師希爾柏一樣，庫朗在數學研究與數學教育上的影響之既深且廣，是極少有人可以望其項背的。庫朗著述等身，多半是純學術性的數學論著；此外，教育性的著作也不少，其中最最有名的，大概要算這一部了。本書內容精闢深入，文筆則飄逸謹嚴兼而有之；令人不讀則已，一讀就非一氣讀完不可！我們希望中譯本能對我國的青年科學工作者有所啓發；並希海內方家不吝指教。

## 二、三、四版序

在以往若干年裡，由於種種事件的影響，數學知識與訓練的需要日增。除非學生與教師都設法超越過數學上的形式主義與解題主義，並力求把握數學的真實本質，否則將難逃失敗與幻滅的危險。本書就是專為這些學生與教師而寫的。第一版所得到的反應鼓勵了作者所期望的：本書將對您有所助益。

大批讀者的批評，使本書作了許許多多的改正及改進。對 Natascha Artin 夫人不辭辛勞的為第四版作準備工作，謹表示由衷的謝意。

## 初版序言

兩千多年來，通曉數學一直被視為每一個受教育的人所不可或缺的知識裝備。如今，數學教育的傳統地位陷入危險的境域中；不幸的是，數學專家們都責無旁貸。數學教育有時已退化為空洞的解題訓練了。解題雖能發揮表面上的能力，却無法引致實際的瞭解或更深入的思考獨立性。數學上的研究工作已走上過分專門或過分着重抽象化的趨勢，忽視了它的應用性以及跟其他部門間的關連性。不過，這種情況絲毫不能證明緊縮數學教育的政策有理；正相反，我們應當大力加強數學教育才對。事實上，那些留意到智慧訓練價值的人已經在這樣作了。教師、學生跟受教育的眾人都主張建設性的改革，不可聽其各自發展；目的在使學生真正地體會到數學為一有機的整體，並為科學思考與活動的基礎。

某些傳記性與歷史性的名著和某些富有刺激性的暢銷讀物曾鼓起潛在的一般興趣。然而知識不能僅靠間接方式學得。想藉着不假思索的傳授增加對數學的瞭解，並不比靠着報章雜誌把音樂傳授給那些從來沒有專心聽過音樂的人來得容易。每一個人都要跟活生生的數學概念及內容多多接觸，但不用一下子就走上學術性的工作，也不必多走不必走的彎路。數學的教學不必太注重通俗性的東西，這正如不應武斷一樣，因為武斷會掩飾動機或目的，因而總是變成進步的障礙。其實，我們可以從非常基本的事實開始直接達到有利的地位，不必拐彎抹角；而一到這個地位便可看出近代數學的重點及原動力所在了。

本書打算朝此方向進行。由於我們假定高中程度就足夠了，所以本書就是看做通俗讀物也無妨。但這並非對巧避任何努力的危險趨勢讓步的意思。閱讀本書需要某種程度的智性的成熟與目行思考的意願方能濟事。本書是為初學者與專家，學生與教師，哲學家與工程師，教學與參考而寫的。也許野心太大了！在其他工作的壓力下，本書雖經過若干年的準備，然係在其真正完成之前出版，故須作若干折衷處理；因此，任何批評與建議均所歡迎。

無論如何，作者期望本書能對美國高等教育有所貢獻，俾對這個國家給我的機會深致謝意。此書的計劃與觀點都應由本人負責，至於任何成果與榮譽則須跟 Herbert Robbins 共享。自從參與此工作後，他便全力以赴。此書之能以這樣的形式呈現在讀者之前，他的功勞實不可沒。

這裡得感謝幾位朋友的幫忙。跟Niels Bohr, Kurt Friedrichs及Otto Neugebauer的討論，對本書的哲理觀點跟歷史態度，影響頗大；Edna Kramer站在教師的觀點，也給了很多有意義的批評；David Gilbarg為本書定初稿；Ernest Courant, Norman Davids, Charles de Prima, Alfred Horn, Herbert Mintzer Wolfgang Wasow以及其他一些人幫忙抄寫及重抄原稿並改進很多細節；Donald Flanders細查原稿並在印刷上提供不少有價值的建議；John Knudsen, Hertha von Gumpenberg, Irving Ritter, 及Otto Neugebauer繪圖；H. Whitney 提供附錄中所列的練習。洛克菲洛基金會一般教育組慷慨支持此課程與講義；本書即係以此為基礎寫成的。對Waverly Press, 尤其G rover C. Orth, 極其勝任的工作，還有，對於牛津大學印刷所，特別是Philip Vaudrin及W. Oman兩位先生的鼓勵跟合作，在此均一併致謝。

庫 朗

# 本書的讀法

本書雖係以有系統的次序寫的，但讀者不用逐頁逐章仔細研讀。例如，歷史性或哲學性的引言可以延到唸完該章之後再看。各章彼此之間大部分不相關連。通常一節在開始時比較容易瞭解，然後慢慢的深，再變成難，直到一節之末或補充教材。因此，想要知道普通常識基於特別知識的讀者，可以把較詳細的討論部分略掉。

數學程度較淺的讀者須作一抉擇；有星號的或小體字的部分可以在第一次閱讀時省去，這樣做不致於對後半部的瞭解有所影響。再者，讀者不妨只學習書中認為比較有興趣的章節。大部分練習都是精選的；比較難的附以星號，讀者千萬不要因其較難或無法解答而灰心。

高中教師可以從幾何作圖與極大極小兩章中選出一些有益的材料給特選的學生參考。

作者期望本書能給大一到研究生階段的大學生以及對科學有特殊興趣的專業人士帶來一些用處。再者，本書可以作為非慣例性的大學課程中介紹基本觀念的教材。第Ⅲ、Ⅳ與Ⅴ章可用做幾何課程，第Ⅵ與Ⅷ章構成了完整的微積分教材。這兩章注重內容的瞭解，並非通俗性的講解。這些材料對於想按需要而補充一些資料，以使內容更富有活性的教師來說，都可以用做初步的教材。分散在各章節裡的練習和附在書末另外收集的問題，都可以作為課堂上使用本書時的輔助。

作者甚至希望專家們對於若干細節以及一些含有進一步發展的種子的初步討論感到興趣。



# 目 錄

中譯本卷頭語.....	III
初版序言.....	IV
二、三、四版序.....	VI
本書的讀法.....	VII
數學是什麼.....	XV
<b>第一章 自然數</b> .....	1
引言.....	1
§ 1. 整數計算.....	1
1. 算術的法則 2. 整數的表法 3. 十進位以外其他體系的計算。	
§ 2. 數系中的無限數 數學歸納法.....	8
1. 數學歸納法原理 2. 算術級數 3. 幾何級數 4. 首 $n$ 個數的平方和 5. 重要的不等式 6. 二項式定理 7. 再論數學歸納法	
第一章補充 數論.....	19
引言.....	19
§ 1. 質數.....	19
1. 基本事實 2. 質數的分佈 a. 質數的生成公式 b. 算術級數裡的質數 c. 質數定理 d. 兩個尚未解決的質數問題。	
§ 2. 同餘式.....	28
1. 一般觀念 2. 菲瑪 (Fermat) 定理 3. 二次剩餘	
§ 3. 畢氏數與菲瑪最後定理.....	35
§ 4. 歐幾里得算術.....	37
1. 一般理論 2. 在算術基本定理上的應用 3. 歐拉 (Euler) 函數 $\varphi$ 與菲瑪定理 4. 連分數. Diophantine 方程式	
<b>第二章 數系</b> .....	47
引言.....	47
§ 1. 有理數.....	47
1. 作為度量的有理數 2. 有理數的本然需要 推廣的原理 3. 有理整數的幾何意義	
§ 2. 不可通約量的線段, 無理數及極限觀念.....	52

1. 引言 2. 小數 無窮小數 3. 極限 無窮幾何級數 4. 有理數與循環小數 5. 利用巢區間作之無理數的一般定義 6. 無理數的另一種界說法 · Dedekind 分割

§ 3. 解析幾何簡介..... 63

1. 基本原理 2. 直線與曲線的方程式

§ 4. 無限的數理解析..... 67

1. 基本觀念 2. 有理數的可數性與實數閉聯體的不可數性  
3. Cantor 的“基數” 4. 間接證法 5. “無限”的矛盾  
6. 數學的基礎

§ 5. 複素數..... 76

1. 複素數之來源 2. 複素數的幾何意義 3. 棣莫弗定理與  $1$  之  $n$  次方根 4. 代數基本定理

§ 6. 代數數與超越數..... 88

1. 定義與存在 2. Liouville 定理與超越數的創立

第二章補充 集合代數..... 93

1. 一般理論 2. 對數理邏輯的應用 3. 對機率論的應用

第三章 幾何作圖 數體的代數..... 101

引言..... 101

第一部分 不可能性的證明與代數..... 103

§ 1. 基本幾何作圖..... 103

1. 體的創造與開平方 2. 正多邊形  
3. 阿波羅 ( Appollonius ) 問題

§ 2. 可作圖的數與數體..... 109

1. 一般理論 2. 可作圖的數都是代數數

§ 3. 三個不可解的希臘問題..... 115

1. 二倍立方體的體積 2. 三次方程式定理 3. 三等分任一已知角 4. 正七邊形 5. 一圓面積的平方問題簡介

第二部分 幾個不同的作圖方法..... 120

§ 4. 幾何變換 反演變換..... 120

1. 引言 2. 反演變換的性質 3. 反演點的幾何作圖 4. 僅用圓規平分線段以及求圓心的作圖法

§ 5. 用其他工具的作圖法 僅用圓規的 Mascheroni 作圖法..... 125

1. 兩倍立方體體積的古典作圖法 2. 僅用圓規的作圖法

3. 用機械工具作圖，機械曲線，擺線	4. 傳桿裝置 Peaucellier 與 Hart 的反演器	
§ 6. 再論反演變換及其應用		36
1. 角的不變性，圓系	2. 反演變換在 Apollonius 問題上的應用	3. 重複反射
<b>第四章 射影幾何學 公理 非歐幾何學</b>		145
§ 1. 引言		145
1. 幾何性質的分類，變換下的不變性	2. 射影變換	
§ 2. 基本概念		147
1. 射影變換群	2. 德薩 (Desargues) 定理	
§ 3. 交比		151
1. 不變性的定義與證明	2. 在完全四邊形上的應用	
§ 4. 平行性與無限大		159
1. 無窮遠點視為“理想點”	2. 理想元素與射影	3. 無窮遠元素的交比
§ 5. 應用		163
1. 初步說明	2. 平面上德薩 (Desargues) 定理的證明	3. 巴斯科 (Pascal) 定理
4. 布利安壯 (Brianchon) 定理	5. 對偶性簡介	
§ 6. 解析表示		169
1. 簡介	2. 齊次坐標，對偶性的代數基礎	
§ 7. 僅用直尺的作圖問題		173
§ 8. 圓錐曲線與二次曲面		175
1. 圓錐曲線的初等測度幾何學	2. 圓錐曲線的射影性質	3. 視圓錐曲線為線曲線
4. Pascal 與 Brianchon 的一般定理	5. 雙曲面	
§ 9. 公設與非歐幾何學		190
1. 公設的方法	2. 雙曲線非歐幾何學	3. 幾何與實體
4. Poincare 的模型	5. 橢圓或黎曼幾何	
附錄 高度空間的幾何學		201
1. 引言	2. 解析法探討	3. 幾何法或組合法探討
<b>第五章 拓樸學</b>		207
引言		207
§ 1. 多面體的 Euler 公式		208

§ 2 圖形的拓樸性質.....	212
1. 拓樸性質 2. 連通性	
§ 3 拓樸定理的其他例子.....	216
1. Jordan 曲線定理 2. 四色問題 3. 維度概念 4. 定點定理 5. 結	
§ 4 曲面的拓樸分類.....	226
1. 曲面的屬數 2. 曲面的歐拉 ( Euler ) 特徵 3. 單邊曲面	
附錄.....	234
1. 五色定理 2. 多邊形的姚丹 ( Jordan ) 曲線定理 3. 代數基本定理	
第六章 函數與極限.....	241
引言.....	241
§ 1. 變數與函數.....	242
1. 定義與例題 2. 角的弧度量 3. 函數的圖形, 反函數 4. 合成函數 5. 連續性 6. 多變數函數 7. 函數與變換	
§ 2. 極限.....	256
1. 數列 $a_n$ 的極限 2. 單調數列 3. 歐拉 ( Euler ) 數 $e$ 4. 數 $\pi$ 5. 連分數	
§ 3. 藉連續趨近求極限.....	269
1. 引言 一般定義 2. 極限觀念評述 3. $\sin x / x$ 的極限 4. 當 $x \rightarrow \infty$ 之極限	
§ 4. 連續概念的精確定義.....	275
§ 5. 有關連續函數的兩基本定理.....	277
1. Bolzano 定理 2. Bolzano 定理的證明 3. 有關極端值的 Weierstrass 定理 4. 有關數列的定理, 緊緻集合	
§ 6. Bolzano 定理的一些應用.....	281
1. 幾何學上的應用 2. 力學問題上的應用	
第六章補充 有關極限與連續進一步的例題.....	285
§ 1. 極限的例題.....	285
1. 一般說明 2. $q^n$ 的極限 3. $\sqrt[n]{p}$ 的極限 4. 不連續函數為連續函數的極限函數表示 5. 疊進求極限	
§ 2. 連續的例題.....	290
第七章 極大與極小.....	291

引言.....	291
§ 1. 初等幾何學的問題.....	292
1. 兩邊已定的三角形極大面積	
2. Heron 定理, 光射線的極值性質	
3. 三角形問題上的應用	
4. 橢圓與雙曲線的切線性質及其對應的極值性質	
5. 對已給曲線距離的極值	
§ 2. 極值問題的一般原理.....	300
1. 原理	
2. 例題	
§ 3. 逗留點 ( Stationary point ) 與微分運算.....	303
1. 極值與逗留點	
2. 多變數函數的極大與極小	
鞍點 ( Saddle Point )	
3. 極小極大點 ( Minimax Point ) 與拓樸學	
4. 由一點至一曲面的距離	
§ 4. Schwarz 的三角形問題.....	307
1. Schwarz 的證明	
2. 另一種證明	
3. 鈍角三角形	
4. 由光線所形成的三角形	
5. 有關反射問題的摘要與多態經歷 ( Ergodic ) 的運動	
§ 5. Steiner 的問題.....	315
1. 問題與解答	
2. 對另外一種解法的分析	
3. 補充問題	
4. 補充與習題	
5. 網狀街道問題的一般情形	
§ 6. 極值與不等式.....	322
1. 兩個正量的算術平均與幾何平均	
2. $n$ 個變數的情形	
3. 最小二乘法	
§ 7. 極值的存在: Dirichlet 原理.....	325
1. 摘要	
2. 例題	
3. 初等極值問題	
4. 在更複雜情形中所存在的困難	
§ 8. 等周長的問題.....	332
§ 9. 具有界限條件的極值問題 Steiner 問題與等周長問題間的關連	335
§ 10. 變分法.....	337
1. 引言	
2. 變分法, 光學中的菲瑪 ( Fermat ) 原理	
3. 柏努利對於捷線問題的處理	
4. 球面上的測地線 ( Geodesics )	
§ 11. 極小值問題的實驗解答及皂膜實驗.....	343
1. 引言	
2. 皂膜實驗	
3. 關於 Plateau 問題的幾種新實驗	
4. 關於其他數學問題的實驗解答	
第八章 微積分學.....	357

引言	357
§ 1 積分	358
1. 面積之爲極限 2. 積分 3. 積分觀念的一般說明 一般 定義 4. 積分之例 $x^r$ 的積分 5. "積分運算"的法則	
§ 2 導數	371
1. 導數與斜率 2. 導數之爲極限 3. 例題 4. 三角函數的 導數 5. 微分與連續 6. 導數與速度 二階導數與加速度 7. 二階導數的幾何意義 8. 極大與極小	
§ 3 微分的技巧	382
§ 4 萊布尼茲的記號與"無限小"	387
§ 5 微積分學的基本定理	389
1. 基本定理 2. 積分學基本定理的應用 $x^r, \cos x, \sin x,$ $\arctan x$ 的積分 3. $\pi$ 的萊布尼茲公式	
§ 6 指數函數與對數	395
1. 對數的定義與性質 歐拉 (Euler) 數 $e$ 2. 指數函數 3. $e^x, a^x, x^a$ 的微分公式 4. 以極限表 $e, e^x$ , 與 $\log x$ 的公式 5. 對數的無窮級數、數值計算	
§ 7 微分方程式	405
1. 定義 2. 指數函數的微分方程式 放射性蛻變 生長率 複利 3. 其他例題、簡單振動 4. 牛頓的運動定律	
第八章補充	413
§ 1 原理方面的問題	413
1. 可微分性 2. 積分 3. 積分觀念的其他應用、功、長度	
§ 2 大小之階數	419
1. 指數函數與 $x$ 之乘冪 2. $\log(n!)$ 的大小階數	
§ 3 無窮級數與無限積	422
1. 函數的無窮級數 2. 歐拉公式 $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ 3. 調 和級數與 Zeta 函數、正弦的歐拉乘積	
§ 4 得自統計方法的質數定理	431
附錄：補述，問題與習題	435
算術與代數	435
解析幾何	436
幾何作圖	441

射影與非歐幾何學.....442

石樸學.....443

函數，極限與連續.....445

極大與極小.....446

微積分學.....448

積分的技巧.....450

**索引**.....455

# 第一章 自然數

## 引 言

數是近代數學的基礎。然而數是什麼？ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ， $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  以及  $(-1) \cdot (-1) = 1$  等等又是代表什麼意思呢？在學校，我們學習過分數與負數的運算技巧，但要對數系有所了解，我們就必須回溯到最簡單、最基本的東西上去。希臘人以點與線的幾何概念作為他們的數學基礎，而近代數學的指導原理則是把所有數學上的敘述統統化簡成自然數  $1, 2, 3, \dots$  的敘述。在「上帝創造自然數，其餘都是人造的」這句話裡，Leopold Kronecker (1823 ~ 1891) 明確的指出，數學的結構可以在這塊穩如磐石的基地上建立起來。

數是由人類心靈創造出來以便在各種不同集合裡計算東西的個數；數與被計算之東西的特性之間並沒有任何關係。「六」這個數就是由一個含有六個東西的集合經抽象而得的。它與這些東西的性質或符號無關。數之概念的抽象特性只有在智力發展到某一更高階段後才會顯得清晰。對小孩子而言，數總是和實際的東西如手指、珠子等相關連的。

幸運的是，數學家不須涉及由具體的東西集合轉換到抽象之數的概念的哲學性質。因此我們將自然數及其結合法（加法和乘法兩種運算）視為已知而予以接受，不深究其本質了。

## § 1. 整數的計算

### 1. 算術的法則

自然數（或稱正整數）的數學理論稱為算術 (Arithmetic)。自然數的加法



## 2 數學是什麼

和乘法兩種運算滿足一些法則。爲了敘述這些法則的一般性，我們不能使用 1, 2, 3 一類的符號，因爲它們是代表固定的整數的。例如，

$$1 + 2 = 2 + 1$$

表示任意兩整數的和與其相加的次序無關，這只是一般法則的一個特例而已。因此，當我們要表示與特定整數無關的整數間的某些關係時，我們以符號  $a, b, c$  等代表整數。用上述的符號，我們可將各位熟悉的五個算術學上的基本法則敘述如下：

$$(1) a + b = b + a,$$

$$(2) ab = ba,$$

$$(3) a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (4) a(bc) = (ab)c,$$

$$(5) a(b + c) = ab + ac.$$

(1)與(2)分別表加法和乘法的交換律 (commutative law)，它說在加法與乘法運算中元素的次序可以交換。(3)即加法結合律 (associative law)，它指出三數相加，不管我們是以第一個與第二、第三個的和相加，或第一個和第二個相加後再與第三個相加，其結果均相同。(4)即乘法結合律。(5)即分配律 (distributive law)，它表示將一整數乘以兩整數的和等於先以此整數乘各整數再求其和。

算術的法則很簡單，看起來似乎是很顯然的。但它們對整數以外的東西可能不適用。若  $a$  和  $b$  不代表整數而代表化學物質，且加法表口語上的意義時，則交換律不一定能成立。例如硫酸加到水裡，可得到稀溶液，而水加入純硫酸則可能對實驗發發生危險。這表示在“化學算術”裡，加法的結合律和分配律不一定成立。因此，我們可設想一套一個或多個算術法則不成立的算術。像這樣的系統在近代數學中實際上已經被研究過了。

下面我們用具體模型表示法則(1)–(5)的直覺基礎。我們用長方形盒子的集合代表所給集合裡東西個數的整數，即一點代表一件東西。用這些盒子作運算，就可研究整數的算術法則。兩整數  $a, b$  相加時，將其所代表的兩盒子的頭尾相接，同時除去接合處的隔板。


$$\boxed{\dots\dots} + \boxed{\dots\dots} = \boxed{\dots\dots\dots}$$

圖 1. 加法

兩整數  $a, b$  相乘時，先將兩盒子內的點排成行，然後做一個新盒子使