科學圖書大庫

數學是什麼

譯者　吳英格　余文能　劉　政
校閱　張壽彭　趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學是什麼

譯者　吳英格　余文能　劉　政
校閱　張壽彭　趙少鐵

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日五版

數學是什麼

基本定價 3.60

譯者 吳英格 東海大學講師
余文能 東海大學講師
劉 政 清華大學講師
校閱 張壽彭 輔仁大學教授
趙少鐵 成功大學教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

中譯本卷頭語

這是一部深入淺出的數學名著。著者不僅是當代分析學巨擘、德意志偉大數學傳統的繼承人之一，也是希爾柏學派內圈人物中碩果僅存的一位。跟他的老師希爾柏一樣，庫朗在數學研究與數學教育上的影響之既深且廣，是極少有人可以望其項背的。庫朗著述等身，多半是純學術性的數學論著；此外，教育性的著作也不少，其中最最有名的，大概要算這一部了。本書內容精闢深入，文筆則飄逸謹嚴兼而有之；令人不讀則已，一讀就非一氣讀完不可！我們希望中譯本能對我國的青年科學工作者有所啓發；並希海內方家不吝指教。

二、三、四版序

在以往若干年裡，由於種種事件的影響，數學知識與訓練的需要日增。除非學生與教師都設法超越過數學上的形式主義與解題主義，並力求把握數學的眞實本質，否則將難逃失敗與幻滅的危險。本書就是專爲這些學生與教師而寫的。第一版所得到的反應鼓勵了作者所期望的：本書將對您有所助益。

大批讀者的批評，使本書作了許許多多的改正及改進。對Natascha Artin夫人不辭辛勞的爲第四版作準備工作，謹表示由衷的謝意。

初版序言

兩千多年來，通曉數學一直被視為每一個受教育的人所不可或缺的知識裝備。如今，數學教育的傳統地位陷入危險的境域中；不幸的是，數學專家們都責無旁貸。數學教育有時已退化為空洞的解題訓練了。解題雖能發揮表面上的能力，却無法引致實際的瞭解或更深入的思考獨立性。數學上的研究工作已走上過分專門或過分着重抽象化的趨勢，忽視了它的應用性以及跟其他部門間的關連性。不過，這種情況絲毫不能證明緊縮數學教育的政策有理；正相反，我們應當大力加强數學教育才對。事實上，那些留意到智慧訓練價值的人已經在這樣作了。教師、學生跟受教育的衆人都主張建設性的改革，不可聽其各自發展；目的在使學生眞正地體會到數學為一有機的整體，並為科學思考與活動的基礎。

某些傳記性與歷史性的名著和某些富有刺激性的暢銷讀物曾鼓起潛在的一般興趣。然而知識不能僅靠間接方式學得。想藉着不假思索的傳授增加對數學的瞭解，並不比靠着報章雜誌把音樂傳授給那些從來沒有專心聽過音樂的人來得容易。每一個人都要跟活生生的數學概念及內容多多接觸，但不用一下子就走上學術性的工作，也不必多走不必走的彎路。數學的教學不必太注重通俗性的東西，這正如不應武斷一樣，因為武斷會掩飾動機或目的，因而總是變成進步的障礙。其實，我們可以從非常基本的事實開始直接達到有利的地位，不必拐彎抹角；而一到這個地位便可看出近代數學的重點及原動力所在了。

本書打算朝此方向進行。由於我們假定高中程度就足夠了，所以本書就是看做通俗讀物也無妨。但這並非對巧避任何努力的危險趨勢讓步的意思。閱讀本書需要某種程度的智性的成熟與自行思考的意願方能濟事。本書是為初學者與專家，學生與教師，哲學家與工程師，教學與參考而寫的。也許野心太大了！在其他工作的壓力下，本書雖經過若干年的準備，然係在其眞正完成之前出版，故須作若干折衷處理；因此，任何批評與建議均所歡迎。

無論如何，作者期望本書能對美國高等教育有所貢獻，俾對這個國家給我的機會深致謝意。此書的計劃與觀點都應由本人負責，至於任何成果與榮譽則須跟 Herbert Robbins 共享。自從參與此工作後，他便全力以赴。此書之能以這樣的形式呈現在讀者之前，他的功勞實不可沒。

這裡得感謝幾位朋友的幫忙。跟Niels Bohr, Kurt Friedrichs及Otto Neugebauer的討論，對本書的哲理觀點跟歷史態度，影響頗大；Edna Kramer站在教師的觀點，也給了很多有意義的批評；David Gilbarg 爲本書定初稿；Ernest Courant, Norman Davids, Charles de Prima, Alfred Horn, Herbert Mintzer Wolfgang Wasow以及其他一些人幫忙抄寫及重抄原稿並改進很多細節；Donald Flanders細查原稿並在印刷上提供不少有價值的建議；John Knudsen, Hertha von Gumppenberg, Irving Ritter, 及 Otto Neugebauer繪圖；H.Whitney 提供附錄中所列的練習。洛克菲洛基金會一般教育組慷慨支持此課程與講義；本書即係以此爲基礎寫成的。對Waverly Press,尤其Grover C.Orth, 極其勝任的工作，還有，對於牛津大學印刷所，特別是Philip Vaudrin及W. Oman兩位先生的鼓勵跟合作，在此均一併致謝。

庫　朗

本書的讀法

本書雖係以有系統的次序寫的，但讀者不用逐頁逐章仔細研讀。例如，歷史性或哲學性的引言可以延到唸完該章之後再看。各章彼此之間大部分不相關連。通常一節在開始時比較容易瞭解，然後慢慢的深，再變成難，直到一節之末或補充教材。因此，想要知道普通常識甚於特別知識的讀者，可以把較詳細的討論部分略掉。

數學程度較淺的讀者須作一抉擇；有星號的或小體字的部分可以在第一次閱讀時省去，這樣做不致於對後半部的瞭解有所影響。再者，讀者不妨只學習書中認爲比較有興趣的章節。大部分練習都是精選的；比較難的附以星號，讀者千萬不要因其較難或無法解答而灰心。

高中教師可以從幾何作圖與極大極小兩章中選出一些有益的材料給特選的學生參考。

作者期望本書能給大一到研究生階段的大學生以及對科學有特殊興趣的專業人士帶來一些用處。再者，本書可以作爲非慣例性的大學課程中介紹基本觀念的教材。第Ⅲ、Ⅳ與Ⅴ章可用做幾何課程，第Ⅵ與Ⅷ章構成了完整的微積分教材。這兩章注重內容的瞭解，並非通俗性的講解。這些材料對於想按需要而補充一些資料，以使內容更富有活性的教師來說，都可以用做初步的教材。分散在各章節裡的練習和附在書末另外收集的問題，都可以作爲課堂上使用本書時的輔助。

作者甚至希望專家們對於若干細節以及一些含有進一步發展的種子的初步討論感到興趣。

目　錄

第一章 自 然 數

引 言

數是近代數學的基礎。然而數是什麼？$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$以及$(-1)\cdot(-1)=1$等等又是代表什麼意思呢？在學校，我們學習過分數與負數的運算技巧，但要對數系有所了解，我們就必須回溯到最簡單、最基本的東西上去。希臘人以點與線的幾何概念作爲他們的數學基礎，而近代數學的指導原理則是把所有數學上的敍述統統化簡成自然數 1，2，3，……的敍述。在「上帝創造自然數，其餘都是人造的」這句話裡，Leopold Kronecker(1823～1891)明確的指出，數學的結構可以在這塊穩如磐石的基地上建立起來。

數是由人類心靈創造出來以便在各種不同集合裡計算東西的個數；數與被計算之東西的特性之間並沒有任何關係。「六」這個數就是由一個含有六個東西的集合經抽象而得的。它與這些東西的性質或符號無關。數之概念的抽象特性只有在智力發展到某一更高階段後才會顯得清晰。對小孩子而言，數總是和實際的東西如手指、珠子等相關連的。

幸運的是，數學家不須涉及由具體的東西集合轉換到抽象之數的概念的哲學性質。因此我們將自然數及其結合法（加法和乘法兩種運算）視爲已知而予以接受，不深究其本質了。

§1. 整數的計算

1. 算術的法則

自然數（或稱正整數）的數學理論稱爲算術(Arithmetic)。自然數的加法

和乘法兩種運算滿足一些法則。爲了敍述這些法則的一般性，我們不能使用1，2，3一類的符號，因爲它們是代表固定的整數的。例如，

$$1+2=2+1$$

表示任意兩整數的和與其相加的次序無關，這只是一般法則的一個特例而已。因此，當我們要表示與特定整數無關的整數間的某些關係時，我們以符號a，b，c等代表整數。用上述的符號，我們可將各位熟悉的五個算術學上的基本法則敍述如下：

(1) $a+b=b+a$，　(2) $ab=ba$，

(3) $a+(b+c)=(a+b)+c$，　(4) $a(bc)=(ab)c$，

(5) $a(b+c)=ab+ac$。

(1)與(2)分別表加法和乘法的交換律（commutative law），它說在加法與乘法運算中元素的次序可以交換。(3)即加法結合律(associative law)，它指出三數相加，不管我們是以第一個與第二、第三個的和相加，或第一個和第二個相加後再與第三個相加，其結果均相同。(4)即乘法結合律。(5)即分配律（distributive law），它表示將一整數乘以兩整數的和等於先以此整數乘各整數再求其和。。

算術的法則很簡單，看起來似乎是很顯然的。但它們對整數以外的東西可能不適用。若a和b不代表整數而代表化學物質，且加法表口語上的意義時，則交換律不一定能成立。例如硫酸加到水裡，可得到稀溶液，而水加入純硫酸則可能對實驗發發生危險。這表示在"化學算術"裡，加法的結合律和分配律不一定成立。因此，我們可設想一套一個或多個算術法則不成立的算術。像這樣的系統在近代數學中實際上已經被研究過了。

下面我們用具體模型表示法則(1)—(5)的直覺基礎。我們用長方形盒子的集合代表所給集合裡東西個數的整數，即一點代表一件東西。用這些盒子作運算，就可研究整數的算術法則。兩整數a，b相加時，將其所代表的兩盒子的頭尾相接，同時除去接合處的隔板。

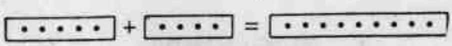

圖1．加法

兩整數a，b相乘時，先將兩盒子內的點排成行，然後做一個新盒子使