易進三角

郁祖同 編輯

中華民國三十八年一月 印行

易進三角

編輯兼發行人 郁祖同

上海(11)浙江路536號

印刷者 中和印刷廠

大通路138弄(同壽里)11號

發行處 易進出版社

上海福州路291號

文怡書局

經售處

上海各大書局

作者	廣益	文化	東南	新科學	東新
建國	求益	春秋	宏文	新蛙	聯益
上海	文怡	模範	立達	友聲	其昌

◆全國各大書局◆

編輯大意

1 本書擴充數值三角之範圍,為學者樹立高深之基礎,可作初學補充課本之用。

2. 本書舉例多而扼要,演算清楚而詳細,在初中學生代數有根柢而喜於研究者,可以瞭閱明瞭。即使根柢稍遜者,一經解釋,亦易領悟。習題與例類似,可以摹仿演習,必能心領神會,玩索有得,故可作自修課本之用。

3. 本書編列三角全部通用公式,習題豐贍,演算一遍,足使公式運用純熟。基本清澈,進求深造,易如反掌。

4 本書以學習時間短而希望學習分量多,故對於函數表,僅以書中用到之數為限,少而易查,不費時間。題中關於函數之取用,一查便得,節省時間,且饒興趣.對數解答限於時間,故付闕如,且於三角知識並無妨礙.

5. 本書從開始至第33頁為基本公式數值三角之範圍,習題十五組,足供一學期每週一時之教材. 從第34頁以後為任何角之函數及通用公式,全書習題四十三組,足供一學期每週二時之教材.

6. 本書圖解明晰,初學一目瞭然,且應有盡有,極便核對.

摘錄　民國三十年五月教育部公布數學課程標準

第四　實施方法概要

(二)課內練習:

(1)口問　凡基本觀念及法則,宜不時向學生口問,令其卽時作答.問時宜先述問題,再令學生作答.

(2)黑板練習　敎室四周宜多設黑板,練習題宜儘量指定學生在黑板上演算,旣可防止抄襲之弊,復可減輕學生課外作業之負擔,與敎師批改多量練習本之困難.敎師卽可餘出此項時間,充分指導學生自修.

(三)課外練習:

課外宜有相當練習.令學生安靜思考,養成列式有序,寫錄整潔,及謹愼覆驗諸習慣,用活葉紙或練習簿,可由敎員自定.

(四)考試:

應使學生了解考試之意義與價値,而樂於接受.

(1)臨時測驗　宜多舉行,每次時間宜短.

(2)段落試驗　應於相當段落時舉行,兩星期或三星期一次.

(3)學期試驗　於學期結束時舉行.

以下編者對於敎學方面之意見

(一)練習:　除上述實施方法外,學生每次上課必須帶練習本.　例題敎畢,不在黑板上演算之學生必須在練習本上演算,課後補足之.習題宜完全演算.　練習本倘不能每日收閱,則一星期收集一次,任擇幾題閱之

(二)考試:　一星期敎五時或六時者卽宜考試一次,至多兩星期必須考試一次.考試勤則引起學者興趣甚大.

易進三角目次

第一章 鋭角之三角函數……………… ………第 1 頁

1. 三角法　　2. 三角法之應用
3. 常數　變數　自變數　因變數又名函數
4. 三角函數　正弦　餘弦　正切　餘切　正割　餘割
5. 三角函數之大約求法　6. 餘函數
7. 特別角(30°, 45°, 60°)之三角函數之值
8. 特別角之函數表

第二章 三角函數之基本公式…………………第 10 頁

9. 基本公式之化出
10. 基本公式強生氏圖解　三角比之六角形
11. 用一個函數表其他五個函數　圖示法
12. 簡易三角恆等式　13. 簡易三角方程式

第三章 直角三角形之眞數解法…… ………第 26 頁

14. 三角函數之眞數表
15. 直角三角形眞數解法
16. 應用題中常用之名詞
鉛垂線　水平線　仰角(又名高度)　俯角
17. 應用題求高與距離

第四章 任何角之函數 …………… ……….第 34 頁

18. 量角法: 度數制(又名60分法) 弧度制 半徑角
19. 坐標軸　象限　橫軸又名X軸　縱軸又名Y軸
原點　橫坐標　縱坐標　坐標
20. 任何角之三角函數
21. 角之形成　動徑　始邊　終邊　22. 象限角
23. 同境界角之函數
24. 無窮大(Infinity)　符號爲∞　$\frac{a}{0}$之意義

25. 求0^0與90^0之三角函數
26. 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0五角函數之省便記憶法
27. 三角函數之線表示法　圓函數
28. 函數之變化
29. 化第二象限角之函數爲第一象限角之函數
30. 絕對值
31. 化第三象限角之函數爲第一象限角之函數
32. 化第四象限角之函數爲第一象限角之函數
33. 負角函數之化法　**34.** 同函數之角
第五章　兩角之和與差與倍角半角之函數…第 60 頁
35. 兩角之和與差之函數
36. 兩角和之正弦與餘弦
37. 兩角差之正弦與餘弦
38. 兩角和與差之正切與餘切
39. 二倍角之函數　**40.** 三倍角之函數
41. 半角之函數
第六章　兩角函數之乘積與和差之變化……第 74 頁
42. 化兩角函數之乘積爲和或差
43. 化兩角函數之和或差爲乘積
44. 證明三個角之和爲180^0或90^0之恆等式
第七章　斜三角形角與邊之關係及其解法…第 84 頁
45. 正弦定律　**46.** 三角形外接圓之直徑
47. 正切定律　**48.** 餘弦定律　**49.** 半角定律
50. 三角形內切圓之半徑
51. 三角形解答之有無
52. 斜角三角形之解法
53. 求斜角三角形面積之公式
公式提要　第 110 頁
本書中用到之三角函數眞數表　第 1 5 頁

第一章　銳角之三角函數

1. 三角法　數學中有研究三角函數(詳下第4節)之性質,關係及三角形之解法與應用者,稱爲**三角法**. (Trigonometry) 或稱**三角學**, **三角術**,亦有簡稱**三角**者.

2. 三角法之應用　三角法爲測量學,工程學,機械學與天文學之基礎.與物理學,地理學,軍事學等,亦有關係,其用甚廣.

3. 常數　變數　自變數　因變數又名函數

代數式或方程式中,一定不變之數,稱爲**常數**. 可任意給予而自爲改變之數,稱爲**變數**,亦稱爲**自變數**. 因自變數而定之數,稱爲**因變數**. 因變數又稱爲自變數之**函數**. 即在二變數中,前數給以一值時,後數對應之而得一值,則後數稱爲前數之**函數**. (Function).

例如: 在代數式 $3x+4$ 中, 3與4爲常數, x 爲變數.

又如: 在方程式 $y=3x+4$ 中, 3與4爲常數, x 與 y 爲變數. 但以 x 爲自變數, 令 $x=1, 2, 3, \cdots\cdots$, 則 y 因之而變,故稱 y 爲因變數. 又稱 y 爲 x 之函數.

如: 在 $y=3x+4$ 中,

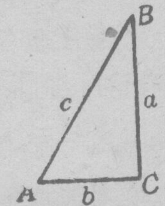
令 $x=$	1,	2,	3,	……
則 $y=$	7,	10,	13,	……

若以 y 爲自變數,則 x 爲因變數,亦可.

4. 三角函數 正弦 餘弦 正切 餘切 正割 餘割

直角三角形每兩邊之比值,稱爲某銳角之**三角函數**.

如圖: 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 爲直角. 以大寫字母 A, B, C, 表角之度量,而以小寫字母 a, b, c, 表其對邊之長. 在初學三角時,恆以 C 表直角,而以 c 表斜邊. 又 b 爲 A 之鄰邊, a 爲 B 之鄰邊.



一角(如 A) 有六個三角函數,其定義及讀法如下

正弦 sine

(1) $\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$

讀作"正弦 A 等於對邊比斜邊"

餘割 cosecant

(4) $\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{c}{a}$

"餘割 A 等於斜邊比對邊"

餘弦 cosine

(2) $\cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$

讀作"餘弦 A 等於鄰邊比斜邊"

正割 secant

(5) $\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$

"正割 A 等於斜邊比鄰邊"

正切 tangent

(3) $\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$

讀作"正切 A 等於對邊比鄰邊"

餘切 cotangent

(6) $\cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{b}{a}$

"餘切 A 等於鄰邊比對邊"

因在此六式中, a, b, c, 爲變數,故 A 有六個函數.

此外尙有下列二函數,但不常用,故舊時稱三角函數爲八線(詳第 47 頁)

正矢 versed sine

(7) $\operatorname{vers} A=1-\cos A$

餘矢 coversed sine

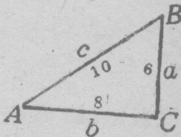
(8) $\operatorname{covers} A=1-\sin A$

(**注意**) $\sin A$ 讀作"正弦A",意卽 $\angle A$ 之正弦. 其餘類推. 學者必須讀熟此定義,始基清楚,乃易前進. 又(4)爲(1)之倒數. (5)爲(2)之倒數. (6)爲(3)之倒數. 學者只須認熟(1),(2),(3)三式,則(4),(5),(6),三式,不難隨之而熟.

例一. 已知直角三角形之三邊,

$a=6,\quad b=8,\quad c=10.$

求 A 之六個函數.



答

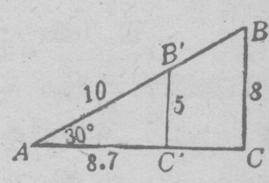
$$\begin{cases} (1)\ \sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{6}{10} & (4)\ \csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{10}{6} \\ (2)\ \cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{8}{10} & (5)\ \sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{10}{8} \\ (3)\ \tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{6}{8} & (6)\ \cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{8}{6} \end{cases}$$

5. 三角函數之大約求法 用量角器作 $\angle A=30^\circ$, 取 $AB=16$, 取 $AB'=10$.

作 $BC\perp AC$, 作 $B'C'\perp AC$

用尺量得 $BC=8$, $AC=14$

又量得 $B'C'=5$, $AC'=8.7$



則 $\sin 30^\circ=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{16}=0.5$　又 $\cos 30^\circ=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{14}{16}=0.87$

或 $\sin 30^\circ=\dfrac{B'C'}{AB'}=\dfrac{5}{10}=0.5$　或 $\cos 30^\circ=\dfrac{AC'}{AB'}=\dfrac{8.7}{10}=0.87$

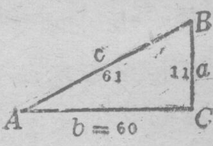
故 A 之函數,不因三邊之長度改變而改變.

用此法,可求函數之大約數值.若求精密,須用高等數學,

例二. 已知直角三角形之二邊,

$a=11,\quad c=61.$

求 B 之六個函數.



解: 由直角三角形定理: $a^2+b^2=c^2$

則 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{61\times61-11\times11}=\sqrt{3721-121}$

$=\sqrt{3600}=60$

答
(1) $\sin B=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{60}{61}$ (4) $\csc B=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{61}{60}$

(2) $\cos B=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{11}{61}$ (5) $\sec B=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{61}{11}$

(3) $\tan B=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{60}{11}$ (6) $\cot B=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{11}{60}$

例三. 設 $\sin A=\dfrac{4}{5}$, $c=30$, 求 a.

解: $\because\ \dfrac{a}{c}=\sin A,\quad \therefore\ a=c\times\sin A=30\times\dfrac{4}{5}=24.$

習題一 [每作一題,必須先畫草圖]

已知直角三角形之三邊如下,求 A 之六個函數:

1. $a=3,\quad b=4,\quad c=5$ **2.** $a=5,\quad b=12,\quad c=13$

2. $a=8,\quad b=15,\quad c=17$ **4.** $a=9,\quad b=40,\quad c=41$

已知直角三角形之二邊如下,求 B 之六個函數:

5. $a=10,\quad c=26$ **6.** $a=16,\quad b=30$

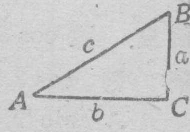
7. $b=80,\quad c=82$ **8.** $a=21,\quad c=29$

9. 設 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $c=20$,求 a. **10.** 設 $\cos A=\dfrac{12}{13}$, $c=39$,求 b.

6. 餘函數　一銳角之餘角之函數,簡稱爲餘函數.

如圖：直角 $\triangle ABC$ 之二銳角 A 與 B

互爲餘角,因 $A+B=90^0$



設 A 爲 B 之餘角,而 $B=90^0-A$,

則角 B 之餘弦,餘切,餘割,等於其餘角 A 之正弦,正切,正割.

又角 B 之正弦,正切,正割,等於其餘角 A 之餘弦,餘切,餘割.

證：由定義得下式：

$$\cos B=\frac{a}{c}=\sin A$$
$$\cot B=\frac{a}{b}=\tan A$$
$$\csc B=\frac{c}{b}=\sec A$$
$$\sin B=\frac{b}{c}=\cos A$$
$$\tan B=\frac{b}{a}=\cot A$$
$$\sec B=\frac{c}{a}=\csc A$$

以 $B=90^0-A$ 代入左式得：

餘函數公式
$$\left\{\begin{array}{ll}\cos(90^0-A)=\sin A & \cdots\cdots\cdots(1)\\ \cot(90^0-A)=\tan A & \cdots\cdots\cdots(2)\\ \csc(90^0-A)=\sec A & \cdots\cdots\cdots(3)\\ \sin(90^0-A)=\cos A & \cdots\cdots\cdots(4)\\ \tan(90^0-A)=\cot A & \cdots\cdots\cdots(5)\\ \sec(90^0-A)=\csc A & \cdots\cdots\cdots(6)\end{array}\right.$$

因 A 爲 90^0-A (卽上圖中之 B) 之餘角,故由 (1) 至 (6) 所得之 $\sin A$, $\tan A$,……等,均稱爲**一銳角 90^0-A 之餘角 A 之餘函數 (Co-function)**. 由是得下述定理

定理：一銳角之函數等於其餘角之餘函數

上式 (1) 至 (6) 常書之如下：以後乃常用者.

$$\sin A=\cos(90^0-A)\cdots\cdots(7)\qquad \cos A=\sin(90^0-A)\cdots\cdots(10)$$
$$\tan A=\cot(90^0-A)\cdots\cdots(8)\qquad \cot A=\tan(90^0-A)\cdots\cdots(11)$$
$$\sec A=\csc(90^0-A)\cdots\cdots(9)\qquad \csc A=\sec(90^0-A)\cdots\cdots(12)$$

故求 45^0 至 90^0 間之函數,常由其餘函數在 0^0 至 45^0 之間而得.

例一. 求 $\sin 60^0$ 之餘角函數.

解：$\sin 60^0=\cos(90^0-60^0)=\cos 30^0$

例二. 試以小於45^0之角之函數,表示 $\csc 73.2^0$

解: $\csc 73.2^0 = \sec(90^0 - 73.2^0) = \sec 16.8^0$

例三. 設 $\cos 3A = \sin 2A$, 求 A 之度數.

解: 因 $\cos 3A = \sin 2A$, 但 $\cos 3A = \sin(90^0 - 3A)$

$\therefore$ $\sin(90^0 - 3A) = \sin 2A$

或 $90^0 - 3A = 2A$, 即 $90^0 = 5A$, $\therefore$ $A = 18^0$

習 題 二

試求下列各函數之餘角函數 [1—4]:

1. $\sin 75^0$ **2.** $\tan 30^0$ **3.** $\cos 60^0$ **4.** $\cot 20^0$

試以小於45^0之角之函數,表示下列各函數 [5—8]:

5. $\csc 72.6^0$ **6.** $\cos 63.2^0$ **7.** $\cot 58.4^0$ **8.** $\sin 83.6^0$

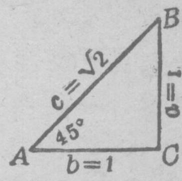
在下列四式中,求 A 之度數 [9—12]:

9. 設 $\cos 8A = \sin A$ **10.** 設 $\sin 3A = \cos 2A$

11. 設 $\tan 7A = \cot 2A$ **12.** 設 $\csc 11A = \sec 7A$

7. 特別角(30^0, 45^0, 60^0)之三角函數值 此三個角之函數值,可用幾何定理求得,稱爲特別角,求法如下:

[一] 求 45^0之三角函數



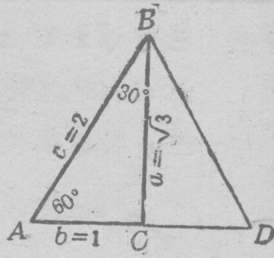
作等腰直角$\triangle ABC$,則$\angle A = \angle B = 45^0$

因 $a = b$, 可假定 $a = 1$, $b = 1$.

則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

故
$$\begin{cases} (1)\ \sin 45^0 = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (4)\ \csc 45^0 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ (2)\ \cos 45^0 = \dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (5)\ \sec 45^0 = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ (3)\ \tan 45^0 = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{1} = 1 & (6)\ \cot 45^0 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

[二] 求 30^0 與 60^0 之三角函數.



作等邊 $\triangle ABD$, 由 B 作 $BC\perp AD$.

則在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^0$,

而 $\angle ABC=30^0$.

以最短邊爲 1, 卽令 $b=1$,

則 $c=AB=AD=2b=2$

而 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

故 $\sin 60^0=\cos 30^0=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^0=\sin 30^0=\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$

$\tan 60^0=\cot 30^0=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

$\cot 60^0=\tan 30^0=\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

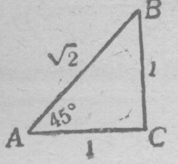
$\sec 60^6=\csc 30^0=\dfrac{c}{b}=\dfrac{2}{1}=2$

$\csc 60^0=\sec 30^0=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 特別角之函數表: 以(一),(二)之結果,總列如下:

函數 / 角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

例一. 已知 $\sqrt{2}=1.4142$，求 $\sin 45^0$ 之數值. 至小數第四位.



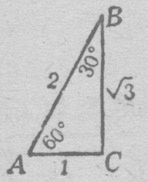
$$\sin 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1.4142}{2}$$

$$=0.7071$$

例二. 已知 $\sqrt{3}=1.7321$，求 $\csc 60^0$ 之數值，至小數第四位.



$$\csc 60^0=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{2\times 1.7321}{3}$$

$$=\frac{3.4642}{3}$$

$$=1.1547$$

例三. 求 $\sin 45^0+\tan 30^0+\csc 60^0$ 之值.

$$\sin 45^0+\tan 30^0+\csc 60^0$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{6}$$

例四. 求 $\cos^2 30^0+\cot^2 30^0-\sec^2 30^0$ 之值.

$$\cos^2 30^0+\cot^2 30^0-\sec^2 30^0$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{1}-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{9+36-16}{12}$$

$$=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$$

(注意) $\cos^2 30^0=\cos 30^0\times\cos 30^0=(\cos 30^0)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

習 題 三 [照例題先作特別角之草圖]

已知 $\sqrt{2}=1.4142$, $\sqrt{3}=1.7321$.

求下列函數值,至小數第四位 [1—12]:

1. $\cos 45^0$ **2.** $\sin 60^0$ **3.** $\tan 60^0$ **4.** $\cot 60^0$

5. $\tan 30^0$ **6.** $\cos 30^0$ **7.** $\csc 45^0$ **8.** $\sec 30^0$

9. $\cos 60^0$ **10.** $\tan 45^0$ **11.** $\sec 45^0$ **12.** $\cot 30^0$

求下式之值 [13—20]:

13. $\sin 60^0+\cos 60^0+\cot 30^0$

14. $\sin 30^0+\cos 30^0+\tan 30^0$

15. $\sin 45^0+\cos 45^0+\tan 45^0$

16. $\cos 45^0+\cot 60^0+\sec 30^0$

17. $\sin^2 60^0+\tan^2 60^0-\csc^2 60^0$

18. $\sin^2 45^0+\tan^2 60^0-\sec^2 30^0$

19. $\cos^2 45^0+\csc^2 45^0-\cot^2 60^0$

20. $\sin^2 30^0+\cos^2 30^0-\tan^2 30^0$

用適當之餘函數,塡充下式之結果 [21—26]:

21. $\sin(90^0-A)=$ **22.** $\cos(90^0-A)=$

23. $\tan(90^0-60^0=)$ **24.** $\cot(90^0-30^0)=$

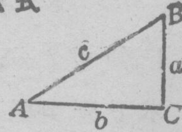
25. $\sec(90^0-20^0)=$ **26.** $\csc(90^0-80^0)=$

27. 設 $\sec 5A=\csc 4A$, 求 A 之度數.

(附註) 初學時,上頁第 8 節表不易記熟,可如例先畫近似 45^0 或 60^0 角之草圖,按邊與角之關係,即可定其函數.

第二章 三角函數之基本公式

9. 基本公式之化出



三角函數初步之公式,由下述方法化出之. 由下列定義:

$$\begin{cases}\sin A=\dfrac{a}{c}\cdots(1)\\ \csc A=\dfrac{c}{a}\cdots(4)\end{cases}\quad\begin{cases}\cos A=\dfrac{b}{c}\cdots(2)\\ \sec A=\dfrac{c}{b}\cdots(5)\end{cases}\quad\begin{cases}\tan A=\dfrac{a}{b}\cdots(3)\\ \cot A=\dfrac{b}{a}\cdots(6)\end{cases}$$

由 (1)×(4) 得 $\sin A\ \csc A=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{c}{a}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

由 (2)×(5) 得 $\cos A\ \sec A=\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{b}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

由 (3)×(6) 得 $\tan A\ \cot A=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

因 $\tan A=\dfrac{a}{b}$

而 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{a}{c}\div\dfrac{b}{c}$

$=\dfrac{a}{c}\times\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{b}$

∴ $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdots(10)$

因 $\cot A=\dfrac{b}{a}$

而 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{b}{c}\div\dfrac{a}{c}$

$=\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{a}$

∴ $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdots(11)$

即: **一角之正切等於其正弦除以餘弦**

一角之餘切等於其餘弦除以正弦

由直角三角形三邊之關係: $a^2+b^2=c^2$ 以 c^2 除兩邊,

得 $\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=1$, 故得 $\sin^2 A+\cos^2 A=1\cdots\cdots\cdots(12)$

即: **一角之正弦方與餘弦方之和等於1.**

由 $a^2+b^2=c^2$, 以 b^2 除兩邊,

得 $\dfrac{a^2}{b^2}+1=\dfrac{c^2}{b^2}$ 故得 $\tan^2 A+1=\sec^2 A\cdots\cdots\cdots(13)$

即: **一角之正割方等於其正切方加1之和.**

由 $a^2+b^2=c^2$ 以 a^2 除兩邊,

得 $1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}$, 故得 $1+\cot^2 A=\csc^2 A\cdots\cdots\cdots(14)$

即: **一角之餘割方等於其餘切方加1之和.**

由(7)至(14)爲八個基本公式,總列於下:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin A\csc A=1\cdots\text{公式一}\\ \cos A\sec A=1\cdots\text{公式二}\\ \tan A\cot A=1\cdots\text{公式三}\\ \text{以上倒數係關}\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\sin^2 A+\cos^2 A=1\cdots\text{公式六}\\ \sec^2 A=1+\tan^2 A\cdots\text{公式七}\\ \csc^2 A=1+\cot^2 A\cdots\text{公式八}\\ \text{以上平方關係}\end{array}\right.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\cdots\text{公式四}\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\text{公式五}$$

由公式一,二,三,以式中之任一函數除兩邊,即得其他公式.

如
$$\left.\begin{array}{l}\sin A=\dfrac{1}{\csc A}\\ \csc A=\dfrac{1}{\sin A}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\cos A=\dfrac{1}{\sec A}\\ \sec A=\dfrac{1}{\cos A}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\tan A=\dfrac{1}{\cot A}\\ \cot A=\dfrac{1}{\tan A}\end{array}\right\}\text{倒數關係}$$

即: **一角之正弦與餘割**(sin 與 csc); **餘弦與正割**(cos 與 sec); **正切與餘切**(tan 與 cot); **互爲倒數**

由公式六,七,八,依代數移項法,即得其他公式. 如

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2 A=1-\cos^2 A\\ \cos^2 A=1-\sin^2 A\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\sec^2 A-\tan^2 A=1\\ \tan^2 A=\sec^2 A-1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\csc^2 A-\cot^2 A=1\\ \cot^2 A=\csc^2 A-1\end{array}\right\}$$

由此得
$$\left.\begin{array}{l}\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}\\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}\\ \cot A=\sqrt{\csc^2 A-1}\end{array}\right\}\text{此處均爲平方關係}$$

由公式 $\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$, $\csc A=\sqrt{1+\cot^2 A}$

均可視作公式,斟酌選用之. 公式一至八必須記熟.

9a 倒數 若兩數之乘積爲 1,則稱兩數互爲倒數.

如 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{1}=1$, 則 $\frac{1}{3}$ 之倒數爲 $\frac{3}{1}$,而 $\frac{3}{1}$(即 3)之倒數爲 $\frac{1}{3}$

若 $a\times b=1$, 則 $a=\frac{1}{b}$ 而 $b=\frac{1}{a}$

此可稱爲: a 等於 b 之倒數,而 b 等於 a 之倒數.

故以某分數之分子分母互相交換者爲原分數之倒數.

而整數之倒數,則以該整數爲分母,而 1 爲分子之分數.