修正課程標準適用

高中甲組代數學

第四冊

編者　余介石

上海中華書局印行

民國三十六年三月十二版

有著作權
不准翻印

修正課程標準適用
高中甲組代數學（全四冊）
◎第四冊定價國幣六角五分
（郵運匯費另加）

編者　余介石
發行人　中華書局股份有限公司代表　顧樹森
印刷者　上海澳門路四六九號　中華書局永寧印刷廠
發行處　各埠中華書局

（一一一五四）

修正課程標準適用

高中甲組代數學第四冊

目次

頁

第十五章

方程式論,複數

210. 本章目的……………………1
211. 代數解法與數值解法……………………2
212. 實係數方程式的複根……………………3
習題八十一……………………4
213. 根的上下限……………………5
214. 高級導微函數……………………6
215. 戴氏公式……………………7
216. 重根的判定……………………8
217. 多項式連續性……………………9
218. 導微函數的幾何意義……………………9
219. 多項式圖解……………………10

頁數

習題八十二……………………11
220. 襲號,改號……………………12
221. 笛氏根數律……………………13
習題八十三……………………14
222. 無理根定法……………………15
223. 和湼氏求無理根法……………………17
習題八十四……………………20
224. 函數圖解的凸凹……………………21
225. 圖解上切線與X軸交點……………………22
226. 牛頓氏的數值解法……………………22
習題八十五……………………24
227. 三次方程式的代數解法……………………24

228. 三次方程式根的討論……………………25
229. 四次方程式代數解法……………………27
習題八十六……………28
230. 複數的極式……………28
231. 極式複數積與乘方……………………30
232. 極式複數的商………31
233. 極式複數的開方……32
234. 不可約情形的三角解法……………………33
習題八十七……………34
235. 根與係數的關係……35
236. 方程式的變易………37
習題八十八……………39
237. 根的同次冪總和……40
238. 根的對稱函數基本定理……………………43
239. 對消去法的應用……44
習題八十九……………45
第十五章摘要…………46

第十六章

行列式

240. 逆式,對換影響………49
241. n級行列式……………51
習題九十……………………52
242. 行列式特性…………53
243. 行列式的變易………54
244. 子式,餘因式…………55
習題九十一………………56
245. 行列式展開法………57
246. 行列式的因式分解…………………………59
247. n元聯立一次方程式解法……………………60
248. 齊次方程式的討論…………………………61
習題九十二………………61
249. 行列式乘法……………63
250. 薛薇斯德消去法……65
251. 二元聯立方程式一般解法……………………67
習題九十三………………67

第十六章摘要…………68

第十七章

無窮連級數、無窮積、無窮連分式

252. 本章的目標…………70
253. e 的斂性…………70
254. 極限存在原則…………71
255. 比較審斂法…………72
習題九十四…………73
256. 散級數…………74
257. p 級數…………75
258. 斂性的必要條件…………76
習題九十五…………78
259. 比項審斂法…………79
260. 交錯連級數…………81
習題九十六…………83
261. 正負項連級數…………84
262. 絕對斂性與條件斂性…………86
263. 比項審斂法的推廣…………86
習題九十七…………88
264. 羃級數…………89
265. 重要羃級數的斂性節…………90
266. 連級數與算律…………92
習題九十八…………93
267. 循環連級數…………93
268. 關係度求法…………94
269. 循環連級數與分式…………95
270. 循環連級數公項求法…………96
習題九十九…………97
271. 無窮連乘積…………97
272. 無窮積斂性的判定…………98
273. 為零的無窮積…………99
習題一百…………100
274. 連分式…………100
275. 有限連分式與有理數…………101
276. 收斂式…………101
277. 收斂式的化約…………102

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertong

習題一百零一……103
278. 收斂式的斂性……104
279. 循環連分式…………104
280. 無限連分式與無理數…………105
習題一百零二……106
第十七章摘要……107
中西名詞對照表

修正課程標準適用

高中甲組代數學

第四冊

第十五章

方程式論 複數

210. 本章目的　本章目的在研究有理整方程式根的性質和求法.關於這問題,有許多要理,已在前面講過,讀者應當複習一遍.

(一)有理整方程式的標準情形(§37,第一冊*p.*66).

(二)綜合除法和有理根求法(§§22、39,第一冊*p.p.*34－36,70－72).

(三)整方程式次數和根數(§40,第一冊*p.p.*73－74).

【註】代數學基本定理的證法,初學不易了解,所以在本書中不加證明.

(四)第七章中論二次方程式特性和方程式變易的理§§69－80,第二冊*p.p.*1－20).

本章所論,限於有理整方程式,以後卽簡稱爲方程式.方程式因係數的性質而分兩種:

(一)**文字方程式**,即係數都是文字的.如各係數完全未定,且彼此間無關係,更稱爲**普遍方程式**,如 §37 的範式,即爲 n 次普遍方程式.

(二)**數字方程式**,即係數爲已知數值者.例如論有理根求法時,卽屬此種.這些數字係數,原可爲無理數,或虛數、複數,但爲解法簡易計,本章所論者,限於實有理值的係數.

211. <u>代數解法與數値解法</u>　所謂方程式解法,也分兩種:

(一)解文字方程式,即求用文字係數,作有限次的加、減、乘、除和開方五種手續,來表出這方程式的根,如 §69 中根的公式便是.這種解法叫代數解法,只有理論上價值,不特實際運算布式太繁,且四次以上的普遍方程式就不能有這種解法.本章將略論三次、四次普遍方程式的代數解法,至於五次和高次者何以不能如此去解,須用羣論的理,方能說明,在高中程度尙講不到.

(二)**數値解法**,卽求數字方程式的根的數値.如爲無理根,只能求近似値,叫做**近似解法**.但可使準到需要的程度.本章所論,限於實根,其法實

乃 §39 的推廣, §124(二)中例五,即其一特例.

212. <u>實係數方程式的複根</u> **定理: 實係數方程式 $f(x)=0$ 如有一複根 $p+iq$, 則其共軛複數 $p-iq$, 也必爲這方程式的根.**

證 作 $\phi(x)=[x-(p+iq)][x-(p-iq)]$

$$=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2).$$

以 $\phi(x)$ 除 $f(x)$, 假設商式是 $Q(x)$, 餘式是 $R(x)$, 則因 $\phi(x)$ 爲二次,故 $R(x)=rx+r'$, (r 和 r' 都是實數.)

$$\therefore \quad f(x)\equiv\phi(x)\cdot Q(x)+rx+r'.$$

令 $x=p+iq$, 則 $f(x)=0$, 且 $\phi(x)=0$, 故

$$r(p+iq)+r'=rp+r'+irq=0,$$

$$\therefore \quad rp+r'=0, \quad rq=0.$$

但 $q\neq 0$, 故必 $r=r'=0$.

可見 $f(x)\equiv\phi(x)\cdot Q(x)$, 即 $f(x)=0$ 以 $p-iq$ 爲根.

【例】已知 $f(x)=2x^3+5x^2+46x-87=0$ 的一根爲 $-2+5i$, 試解這方程式.

【解】按上述定理,知 $-2-5i$ 也爲 $f(x)=0$ 的一根.

$$\therefore \quad f(x)\equiv[x-(-2+5i)][x-(-2-5i)](x-a).$$

比較絕對項,得

$$-\frac{87}{2}=-(-2+5i)(-2-5i)a=-(2^2+5^2)a=-29a,$$

$\therefore \quad a=3/2.$

故 $f(x)=0$ 的三根為 $-2-5i$, $-2+5i$, $3/2$.

推論一: 實係數多項式 $f(x)$ 可分解為一次和二次實係數因式的乘積.

因為對於 $f(x)=0$ 的實根 c,則有 $x-c$ 一種因式;對於複根 $p+iq$,則有 $x^2-2px+(p^2+q^2)$ 一種因式.

推論二: 實係數方程式 $f(x)=0$ 次數如為奇數,則至少有一實根.

習題八十一

1. 已知 $3x^4-10x^3+4x^2-x-6=0$ 一根為 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求他根.

2. 證明: 一有理係數方程式 $f(x)=0$ 如以一二次根式 $p+\sqrt{q}$ 為根,則必以 $p-\sqrt{q}$ 為根(看§128).

3. 已知 $x^4-36x^2+72x-36=0$ 一根為 $3-\sqrt{3}$,求其餘各根.

4. 證明: 一實係數方程式 $f(x)=0$ 如以 $p+iq$ 為一 k 級重根,則 $p-iq$ 也是他的 k 級重根.

5. 求作一最低次的有理係數方程式,使以 $-5+2i$ 和 $-1+\sqrt{5}$ 為根.

6. 求作最低次的有理係數方程式,使以下列諸數爲根: (一)$\sqrt{3}+\sqrt{2}i$; (二)$\sqrt{5+\sqrt{6}}$;

(三)$4\sqrt{3}, 5-2i$; (四)$\sqrt{2}+\sqrt{3}+i$.

【提示】可令 $x=$各根,逐漸化去各根號.

213. 根的上下限 根據代數學基本定理,就可推證一 n 次方程式有 n 個根,而僅有 n 個根.所以就實根說,必有比一切實根都大的數,以及比他們都小的數.前者叫根的上限,後者叫根的下限.下述定理,示明求上下限的一法.

定理: 已知 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,設 $\alpha_0=|a_0|,\cdots,\alpha_p=|a_p|,\cdots$,而 g 爲諸 α_p 中最大的數,則當 x 的絕對值大於 $(\alpha_0+g)/\alpha_0$ 時,$f(x)$ 中首項的絕對值,大於其餘各項和的絕對值.

證 命 $X=|x|$,因

$$|a_1x^{n-1}|+\cdots+|a_n|>|a_1x^{n-1}+\cdots+a_n|,$$

所以如欲 $|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n|$,

只須 $\alpha_0X^n>\alpha_1X^{n-1}+\alpha_2X^{n-2}+\cdots+\alpha_n$,

或 $\alpha_0>\frac{\alpha_1}{X}+\frac{\alpha_2}{X^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{X^n}$.

又 $\frac{\alpha_1}{X}+\frac{\alpha_2}{X^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{X^n}<g\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}+\cdots+\frac{1}{X^n}\right)$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertong

$$<\frac{g}{X}\left(1-\frac{1}{X^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{X}\right)<\frac{g}{X}\Big/\left(1-\frac{1}{X}\right).$$

令末式小於 α_0, 設 $X>1$, 解這不等式,則得 $X>(\alpha_0+g)/\alpha_0>1$, 故 $X>1$的限制,可不必提.

就諸式逆推,卽得證明題理.

【註一】據這定理,便可知$x>(\alpha_0+g)/\alpha_0$或$x<-(\alpha_0+g)/\alpha_0$時,$f(x)$總與最高項的值同號,可見$f(x)=0$的實根,只能在$\pm(\alpha_0+g)/\alpha_0$的中間.這二數就是一種上下限.

【註二】$f(x)=0$ 的一切正根當然都大於零,所以零就是正根的下限.這一層在解數字方程式時很有用.因爲解數字方程式時,用從零起的連續正數順次代入$f(x)$來查出各正根的位置,就是根據零是正根的下限這個理由.參看§222和§223.

214. <u>高級導微函數</u>　§80 的註內說過:一多項式$f(x)$有一導微函數$f'(x)$,仍爲一多項式.再求$f'(x)$的導微函數,則對$f(x)$稱爲**二級導微函數**,常以$f''(x)$記出.如此推求k次,便叫$f(x)$的k級導微函數,以$f^{(k)}(x)$表示.

【例】設 $f(x)=3x^4+4x^2-x+4$,

則 $f'(x)=12x^3+8x-1,\quad f''(x)=36x^2+8,$

$f'''(x)=72x,\quad f^{(4)}(x)=72=72x^0,$

而 $k>4$ 時,$f^{(k)}(x)=0$.

【註】由此可見各級導微函數,次數逐漸減 1, 所以 $k<n$ 時,n 次多項式的 k 級導微函數爲 $n-k$ 次;而 n 級者爲常數;級大於 n 時,必爲零.

215. 戴氏公式　在 §80 中各法則,曾討論過重根求法,現在再用算式來示明那幾條道理.

戴氏公式: 如 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,

則 $$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}.$$

證 $f(x+h)=a_0(x+h)^n+\cdots+a^n$

$$=a_0x^n+na_0x^{n-1}h+n(n-1)a_0x^{n-2}\frac{h^2}{2!}+\cdots+na_0\frac{h^n}{n!}$$

$$+a_1x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}h+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}\frac{h^2}{2!}+\cdots$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_n.$$

將各項依直行相加,注意每直行各項,恰是前一行內項的導微函數,而第一直行爲 $f(x)$, 故得定理.

【例】$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2=a_3x+a_4$,

則 $f(x+h)=a_0(x+h)^4+a_1(x+h)^3+a_2(x+h)^2+a_3(x+h)+a_4$.

(天)

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
=a_0x^4 & +4a_0x^3 & h+12a_0x^2 & \dfrac{h^2}{2!}+24a_0x & \dfrac{h^3}{3!}+24a_0\dfrac{h^4}{4!} \\
\quad a_1x^3 & \quad 3a_1x^2 & \qquad 6a_1x & \qquad 6a_1 & \\
\quad a_2x^2 & \quad 2a_2x & \qquad 2a_2 & & \\
\quad a_3x & \quad a_3 & & & \\
\quad a_4 & & & &
\end{array}
$$

$$=f(x)\ +f'(x)\frac{h}{1}+\ f''(x)\frac{h^2}{2!}\quad +f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}.$$

在上式中,命 $x=\alpha$, $h=X-\alpha$, 則 $x+h=X$, 則得化 $f(X)$ 爲 $X-\alpha$ 的函數如下:

$$f(X)=f(\alpha)+f'(\alpha)\frac{X-\alpha}{1!}+f''(\alpha)\frac{(X-\alpha)^2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$+f^{(n)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^n}{n!}.$$

216. <u>重根的判定</u> 就上節末一公式,可知如 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots\cdots=f^{(r-1)}(\alpha)=0$, 而 $f^{(r)}(\alpha)\neq 0$,

則 $f(X)=f^{(r)}(\alpha)\dfrac{(X-\alpha)^r}{r!}+f^{(r+1)}(\alpha)\dfrac{(X-\alpha)^{r+1}}{(r+1)!}+\cdots\cdots\cdots$,

故 $f(X)$ 可用 $(X-\alpha)^r$ 整除.又就同一公式,立見如 $f(X)$ 有因式 $(X-\alpha)^r$, 則上述條件必合,故得

定理: $f(X)=0$ 以 $X=\alpha$ 爲 r 級重根的充要條件爲 $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(r-1)}(\alpha)=0$, 而 $f^{(r)}(\alpha)\neq 0$.

【例】求 $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$ 的重根.

【解】$f'(x)=5x^4-4x^3-6x^2+4x+1$,

$f''(x)=20x^3-12x^2-12x+4$,

$$f'''(x)=60x^2-24x-12, \qquad \cdots\cdots.$$

$f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, $f'''(1)\neq 0$, 故 $x=1$ 是三級重根.

$f(-1)=f'(-1)=0$, $f''(-1)\neq 0$, 故 $x=-1$ 是二級重根.

217. <u>多項式連續性</u>　書§215末式爲

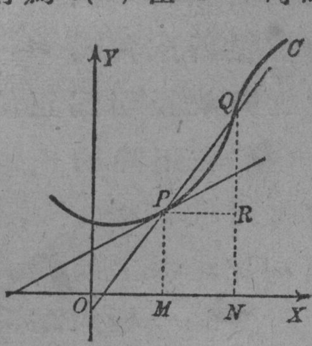
$$f(X)-f(\alpha)=(X-\alpha)\left[f'(\alpha)+f''(\alpha)\frac{X-\alpha}{2!}+\cdots\right],$$

則見當 X 趨近於 α 時, $f(X)$ 也趨近於 $f(\alpha)$. 凡有這種特性的函數,稱爲在 $X=\alpha$ 一點爲連續.本書講過的分式函數、無理函數、指數函數、對數函數以及三角學所講的正、反三角函數等,除去特別點外,都是連續函數.

218. <u>導微函數的幾何意義</u>　就普通情形說來,設 $f(X)$ 爲任一函數,如果極限值

$$\lim_{X\to\infty}\frac{f(X)-f(\alpha)}{X-\alpha}$$

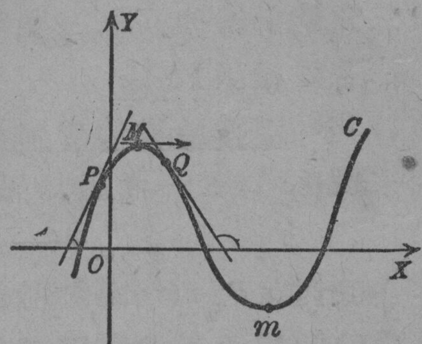
存在,我們就以 $f'(\alpha)$ 記之,稱爲 $f(X)$ 在 $X=\alpha$ 時的導微函數.讀者可把這個定義和從前所說的定義比較一下.



由上述的廣義定義,可見導微函數的幾何意義.設 $y=f(X)$ 的曲線是 C,

其上一點P的橫標爲α,則縱標爲$f(\alpha)$;又設一隣近點Q的坐標爲$[X,f(X)]$,則據幾何定理,知分式$\frac{f(X)-f(\alpha)}{X-\alpha}$爲自$OX$軸繞至割線$PQ$所成角的正切.如$X$趨於$\alpha$,則$Q$沿曲線$C$趨於$P$.割線的極限位置,叫做曲線$C$在$P$點的切線,故導微函數即**自$OX$軸繞至切線所成角的正切.**

219. 多項式圖解　現在可以利用導微函數性質來定多項式$f(X)$圖解的重要情形.



(一)曲線的升降:　在上升的一段曲線上,取橫標爲α的一點P(如右圖),則自OX軸繞至曲線在P點的切線所成角爲一銳角,故正切爲正值,即$f'(\alpha)>o$.又如橫標爲β的Q點在下降的一段曲線上,則上述角爲一鈍角,因而$f'(\beta)<o$.

(二)曲線上的極大極小點:　如曲線先升後降,則經過一極大點M,這時$f'(X)$由正值變爲負

値,而在 M 點時,切線平行於 OX 軸,故爲零.如先降後升,則必過一極小點 m,在這點上也有 $f'(X)=0$,但變化時由負值變爲正値.

已知曲線的升、降情形和極大、極小點,則圖形易於定出.

習題八十二

1. 設 $f(x)=x^4+x^2+1$,求展爲(一)戴氏公式,(二)$x+1$ 的函數.

2. 求 $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0$, $3x^5-2x^4+6x^3-4x^2+3x-2=0$ 等方程式的重根.

3. 求定 a、b,使 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三級重根.

4. 證明 $x^n-a^n=0$ 不能有任何重根.

5. 證明 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=0$ 不能有重根.

6. 證明 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有三級重根.

7. 求 $x^3+px+q=0$ 有重根的條件.

8. 如 $x^n-px^2+r=0$ 有重根,試證

$$\left[\frac{nr}{p(n-2)}\right]^{n-2}=\left(\frac{2p}{n}\right)^2.$$

9. 求下列各多項式的圖解:

(1) $2x^2-x+1$, (2) $(x+1)(x-2)(2x-1)$,

(3) $x^3-12x+4$, (4) $(x+1)^2(x-2)$,

(5) $x(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$, (6) x^4-2x^3+2x-1.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertong