立體解析幾何學

立體解析幾何學

目錄

第一章 緒論

頁數

第二章 平面,直線

第三章 球面,極面

第四章 面之產生

第五章　二級曲面之種類

第六章　漸近準線,中心,切面,通徑面

第七章　主面,通方程式之簡約

第八章　極點與極面

第九章　有心二級曲面

第十章　無心二級曲面

〔附〕　中西名詞對照表

立體解析幾何學

第一章　緒論

第一節　射影定理

1. 界說　設有一直線 XX' 與一平面 P (fig. 1). 自空間 A 點作 P 平面之平行面與 XX' 直線相交於 A', 此交點 A' 謂之 A 點之射影, 與 P 平行之 AA' 直線謂之射徑.

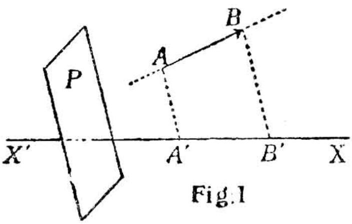

Fig. 1

如平面 P 與 XX' 直線相交爲一直角時, AA' 射徑即爲 XX' 之垂線, A' 點則稱爲 A 之垂直射影.

AB 線分之射影爲其外端 A, B 之射影連接而成之線分, 如 $A'B'$ 是. 通常書之爲

$$(AB)_{X'X} = A'B'.$$

依符號定則, AB 線分之射影等於 BA 線分之射影; 但前者爲正, 而後者則爲負.

2. 定理　平行二線分之比等於其射影比. 此射影爲某一平面之各平行面同交一直線而成.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如 fig. 2, 設 AB 與 CD 爲平行線分,自 A, B, C, D 連作 α, β, γ, δ 各平面與 P 平行,並交 $X'X$ 直線於 A', B', C', D'. 又自 A, C 二點各作 $X'X$ 之平行線 AE 及 CF, 一遇 β 於 E, 一遇 δ 於 F; 則 $A'B'=AE$, $C'D'=CF$, 因爲兩平行面間之平行線也;又直線 BE 及 DF, 一爲 β 面與 ABE 面之割線,一爲 δ 面與 CDF 面之割線,故互相平行,是以 ABE, CDF 爲相似兩三角形,而有比例

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CF}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$ 合理.

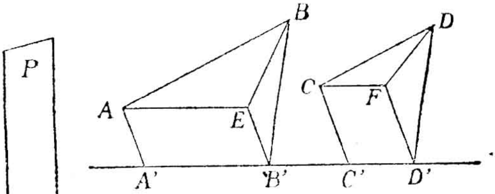

Fig. 2

3. 定理 一線分之垂直射影等於線分乘交角之餘弦,此交角爲線分之正方向與其射影於正方向相偕而成.

自 A, B 作 $X'X$ 直線之垂面 Q, R 與之相交於 A', B'. 又自 A 作平行於 $X'X$ 之直線 AC, 交 R 面於 C, 如是 $A'B'=AC$(fig. 3).

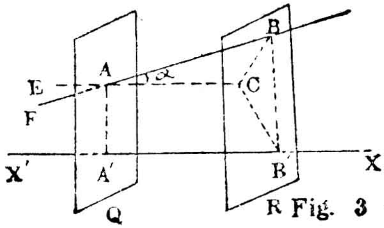

Fig. 3

因 ACB 三角形於 C 爲直角,則

$$(AB)_{X'X}=A'B'=AC=AB\cos\alpha.$$

α 代 CAB 銳角.

注意 上示之範式,勿論 AB 線分之位置如何,而結果則

一,觀下:

(i)　$AB>0$,　$A'B'>0$. α 爲 AB 與 $A'B'$ 之正方向連成之角,如前則是.

(ii)　$AB>0$,　$A'B'<0$. 二正方向之交角爲

$$\angle EAB=\pi-\alpha,$$

而
$$\cos EAB=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$$

如是
$$A'B'=AB\cos EAB.$$

(iii)　$AB<0$,　$A'B'<0$. 二正方向之交角爲

$$\angle EAF=\alpha;\quad 所以\quad A'B'=AB\cos EAF.$$

(iv)　$AB<0$,　$A'B'>0$. 二正方向之交角又爲

$$\angle CAF=\pi-\alpha,\quad 仍得\quad A'B'=AB\cos CAF.$$

4. 定理　閉口多邊形之各邊在任一直線上之射影和等於零.

設 $ABCDEA$ 爲一折線(fig. 4),假定由一動點循文字之次序而運動所引成之.

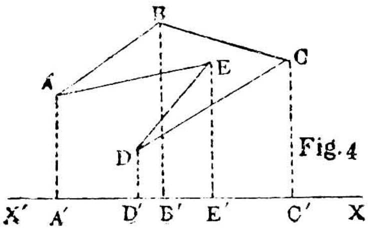

Fig. 4

如前,作各頂點在 $X'X$ 直線上之射影 A', B', C', D', E'. 緣

$$A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'=A'C'+C'D'+D'E'+E'A'$$
$$=A'D'+D'E'+E'A'$$
$$=A'E'+E'A'.\qquad 合理.$$

令 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 爲 $X'X$ 直線之正方向與 $AB, BC,\cdots\cdots$ 各邊之正

方向相偕而成之角,準前定理(§3),得關係式

$$AB\cos\alpha + BC\cos\beta + CD\cos\gamma + DE\cos\delta + EA\cos\epsilon = 0.$$

5. 總邊 設 $ABCDE$ 爲開口多邊形(fig. 4),連接起點 A 與止點 E 之直線 AE,謂之總邊,AB, BC, CD, DE 謂之分邊.

6. 定理 開口多邊形之總邊在任何直線上之射影,等於各分邊在同直線上之射影和.

準前定理(§4),而有等式

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' = 0,$$

或

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' = -E'A' = A'E'.$$

合理.

第二節 位標

7. 界說 演算空間之形體,最便利者爲取不在一平面內相交之三直線 OX, OY, OZ 爲標準,此等直線謂之位標軸.

本位標制,創於法國學者 Descartes 氏,爲定位置之通用者,謂之笛卡兒位標,分別命名如下:

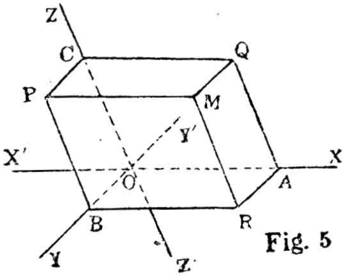

Fig. 5

位標軸 $X'X$, 稱 $X'X$ 軸,或省稱 x 軸,亦稱橫軸;

位標軸 $Y'Y$, 稱 $Y'Y$ 軸,或省稱 y 軸,亦稱縱軸;

位標軸 $Z'Z$, 稱 $Z'Z$ 軸,或省稱 z 軸,亦稱豎軸.

位標軸兩兩相交成直角時,謂之正交位標軸.不成直角時

謂之斜交位標軸.

兩兩取盡諸軸,可組織三平面如 YOZ, ZOX, XOY, 謂之位標面.第一面又稱 YZ 面,第二稱 ZX 面,第三稱 XY 面,三軸之交點 O 謂之起點,或原點.

符號定則,定 OX, OY, OZ 爲正方向,反之爲負方向.

設 M 爲空間之任何點,自 M 連作三平面與位標面互相平行,卽成一平行六面體 $MRACPBO$.如知 OA, OB, OC 三旁稜,此點卽可確定,因其爲 YOZ, ZOX, XOY 之平行面 QAR, PBR, PCQ 之交點故也. OA, OB, OC 三線分謂之 M 點之笛卡兒位標,亦稱常位標(以後省稱位標),以 x, y, z 三字母分別誌之:首一字稱 M 點之橫線,次一字稱縱線,再次稱豎線,其正負符號依定則處理之.

Octant	$OXYZ$	$OX'YZ$	$OX'Y'Z$	$OXY'Z$	$OXYZ'$	$OX'YZ'$	$OX'Y'Z'$	$OXY'Z'$
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

凡位標面皆爲無限延長之平面,其互相連成之體角有八:凡在 $O\text{-}XYZ$ 體角以內之點均爲正位標;在 $O\text{-}X'YZ$ 體角以內之點,縱線與豎線爲正,橫線爲負;餘觀上表自明.

注意 I. 求 M 點之位標可自此點各作 OX, OY, OZ 位標軸之平行線,至他兩軸所作之面而止;如

$$x=PM, \quad y=QM, \quad z=RM.$$

PM, QM, RM 之符號,觀定則可也.

II. M 點之位標等於 OM 帶徑在位標軸上之射影.每一射影爲他二軸之平行面與本軸相截而成.

廣言之,設 x', y', z' 與 x'', y'', z'' 爲 M', M'' 二點之位標. $M'M''$ 線分之射影等於 M', M'' 之射影較,範式爲

$$(M'M'')_{OX}=x'-x'',\quad (M'M'')_{OY}=y'-y'',\quad (M'M'')_{OZ}=z'-z''.$$

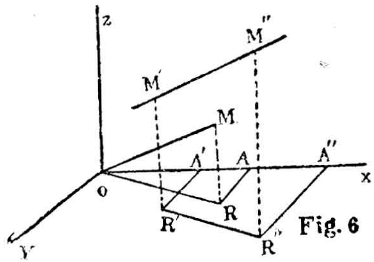

Fig. 6

III. 作 M 點位標之簡法: 先自 M 作 OZ 軸之平行線 MR 交 XOY 位標面於 R; 次自 R 作 OY 軸之平行線 RA 交 OX 軸於 A. 折線 $OARM$ 內含

$$x=OA,\quad y=AR,\quad z=RM,$$

謂之 M 點之周界;以 OM 帶徑爲總邊.如以 $OBPM$ 或 $OCQM$ 爲 M 點之周界亦可(fig. 5).

IV. 起點 O 之位標爲 $(0, 0, 0)$;又在 XOY 位標面內之點, $z=0$; 在 YOZ 位標面內之點, $x=0$; 在 ZOX 位標面內之點, $y=0$.

又在 OX 位標軸上之點, $y=0$, $z=0$; 在 OY 位標軸上之點, $x=0$, $z=0$; 在 OZ 位標軸上之點, $x=0$, $y=0$.

例題

1. 繪以次各點之位置圖:

(a) $(8, 0, 3)$; $(-2, -1, 5)$; $(-4, -2, 0)$.

(b) $(0, 0, -6)$; $(0, 8, 0)$; $(-4, -6, -8)$.

2. 求以次各點之軌跡:

(a) x 之位標爲 3; (b) y 之位標爲 2;

(c) z 之位標爲 -4.

3. (i) 證明 (x, y, z), $(-x, y, z)$ 兩點對於 YZ 面爲對稱點; (ii) 又 (x, y, z), $(x, -y, z)$ 兩點對於 ZX 面爲對稱點; (x, y, z), $(x, y, -z)$ 兩點對於 XY 面爲對稱點.

4. 一點之軌跡如何,設其位標合於 (i) $x=0$ 及 $y=0$; (ii) $x=a$ 及 $y=0$; (iii) $x=a$ 及 $y=b$; (iv) $z=c$ 及 $y=b$.

5. 設 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, 平面 $MRAQ$, $MQCP$, $MRBP$ 之方程式爲何? MR 直線上一點之位標合於何方程式?

6. M 之位標爲 (a, b, c). 求 A, B, C, P, Q, R 之位標.

第三節 關於正交軸之基本範式

8. **定理** 一線分之方,等於其射影之方和.

證明本理,取通過起點之直線即可以解之;因平行相等之線分同在一軸上之射影相等故也.

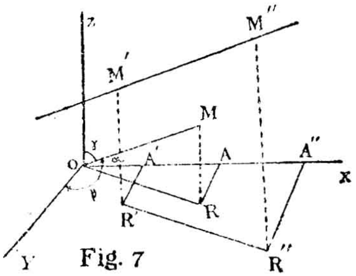

Fig. 7

試作 M 點之位標之周界 $OARM$; 因 OM 線分在 OX, OY, OZ 之射影爲 OA, AR, RM; 故從 ROM, AOR 兩直三角形速得

$$\overline{OM}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RM}^2,$$

$$\overline{OR}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AR}^2.$$

如是 $$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AR}^2 + \overline{RM}^2.$$ 合理.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

9. 兩點之距離 1°: 設起點O與M點爲所定之二點 (fig. 7).

OM 線分在位標軸上之射影,等於M點之位標,已於前述.令x, y, z爲M點之位標.如是

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

2°: 設M'與M''爲任何兩點(fig. 7),相當之位標爲

$$x' = OA', \quad y' = A'R', \quad z' = R'M'.$$

$$x'' = OA'', \quad y'' = A''R'', \quad z'' = R''M''.$$

$M'M''$線分在OX軸上之射影即

$$A'A'' = OA'' - OA' = x'' - x';$$

同理,在OY與OZ上之射影即 $y'' - y'$ 與 $z'' - z'$.

所以 $$\overline{M'M''}^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2,$$

即 $$d = \pm\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

10. 直線之方向餘弦 設有一直線$M'M''$(fig. 7).自起點O作OM直線與之平行,如知其任意點M之位標a, b, c,不獨此直線可定,即$M'M''$直線之位置亦可隨之而定.故a, b, c等數謂之直線之方向參數.若OM之長度爲一單位時,則謂之絕對方向參數.

在正交位標軸,絕對方向參數之值等於位標軸之正方向偕OM直線之正方向連成之角之餘弦.

令 $OM = \rho$. 準§2理,而有

$$a = \rho\cos\alpha, \quad b = \rho\cos\beta, \quad c = \rho\cos\gamma.$$

若 $\rho = 1$, 則

$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma.$$

是以云云.

前式之α, β, γ代XOM, YOM, ZOM各角,謂之直線之方向

角, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 謂之直線之方向餘弦.

準 §8 理, $$\overline{OM}^2=\rho^2=\overline{OA}^2+\overline{AR}^2+\overline{RM}^2,$$

卽 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

於此知一直線與正交位標軸之交角之餘弦之方和恆等於 1.

設 (x', y', z'), (x'', y'', z'') 爲 M', M'' 兩點之位標,相距等於 d,準 §7,II 理, $M'M''$ 線分在位標軸 OX, OY, OZ 上之射影爲

$$x''-x'=d\cos\alpha,\quad y''-y'=d\cos\beta,\quad z''-z'=d\cos\gamma.$$

而 $$d=\frac{x''-x'}{\cos\alpha}=\frac{y''-y'}{\cos\beta}=\frac{z''-z'}{\cos\gamma}.$$

前列範式爲定 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 所常用,讀者宜熟記之.

11. 二直線之交角 令 V 爲 OM 直線之正方向與 OM' 直線之正方向相交而成之角, α, β, γ 及 α', β', γ' 又爲 OM 及 OM' 之方向角.

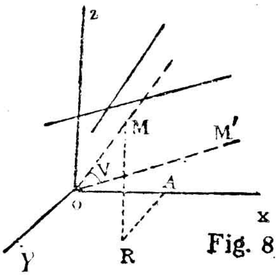

Fig. 8

試作 M 點之位標之周界 $OARM$; 其總邊爲 OM. 從 §6 理,將 OM 及 $OARM$ 投射於 OM',而有

$$(OM)_{OM'}=(OA)_{OM'}+(AR)_{OM'}+(RM)_{OM'}.$$

展之, $$OM\cos V=OA\cos\alpha'+AR\cos\beta'+RM\cos\gamma'.$$

但 M 點之位標,又等於 OM 線分在位標軸上之射影;

故 $$OA=OM\cos\alpha,\quad AR=OM\cos\beta,\quad RM=OM\cos\gamma;$$

代入前式,而有

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

兩直線之交角餘弦,等於各直線偕位標軸而作之交角之餘弦兩兩之乘積和.

注意 前言OM在OM'之射影等於OA, AR, RM在同直線(OM')之射影和;但OA, AR, RM線分卽OM線分在各位標軸之射影.遂得一定則曰:

凡一直線之線分垂直投射於第二直線之上,可先將此線分投射於各位標軸,次將所得之射影復投射於第二直線之上;新射影之和卽所求之射影.

12. 二垂直線之條件 如OM與OM'互交成直角時(fig. 8),則 $\cos V=0$; 其方向餘弦之關係式遂爲

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0.$$

13. 補題 下列範式,本編演算常用之,故特爲揭出.

1°: Lagrange氏之恆等式.

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')$$
$$=(ab'-a'b)+(bc'-b'c)+(ca'-c'a).$$

2°: 兩齊次方程式有三未知數之解法.

設爲 $$ax+by+cz=0,\quad a'x+b'y+c'z=0.$$

書作 $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{z}{ab'-a'b},$$

或 $$x:y:z=\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

3°: 等比. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$

根號應從+或從−,胥視原設之比例而定.

14. $\sin V$之函數. 因 $\sin^2V=1-\cos^2V$, 卽

$$\sin^2V=1-(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'),$$

$$\sin^2 V = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma')$$
$$-(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

從 Lagrange 氏之恆等式,可書之爲

$$\sin^2 V = (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2$$
$$+(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2.$$

15.　一直線同爲他兩直線之垂線　設 ON 直線同時爲 OM 及 OM' 二直線之垂線(fig. 9). 又設 α, β, γ 爲 OM 直線之方向角, α', β', γ' 爲 OM' 直線之方向角,以及 λ, μ, ν 爲 ON 直線之方向角.從 §12 理,應有

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \tag{1}$$

$$\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu = 0, \tag{2}$$

及
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1. \tag{3}$$

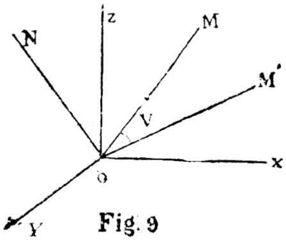

Fig. 9

依 §13, 2° 理,將(1),(2)兩齊次方程式解之,而有

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha}$$
$$= \frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta}.$$

又依等比之理及等式(3)而消之,連得

$$\frac{1}{\sin V} = \frac{(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu)^{\frac{1}{2}}}{\pm\sqrt{(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2 + \cdots\cdots}};$$

$$\cos\lambda=\pm\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma}{\sin V},$$

$$\cos\mu=\pm\frac{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha}{\sin V},$$

$$\cos\nu=\pm\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta}{\sin V}.$$

雙符號$\pm$,由ON之方向而定.

特則　如OM與OM'互成垂線時,則有範式為

$$\cos\lambda=\pm(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma),$$

$$\cos\mu=\pm(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha),$$

$$\cos\nu=\pm(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta).$$

例題

1.　求兩點之距離及距離之方向餘弦:

(i)　$(4,3,-2)$, $(-2,1,-5)$.　答: $7,\ -\frac{6}{7},\ -\frac{2}{7},\ \frac{3}{7}$.

(ii)　$(4,7,-2)$　$(3,5,-4)$.　答: $3,\ \frac{-1}{3},\ \frac{-2}{3},\ \frac{-2}{3}$,

(iii)　$(3,-8,6)$, $(6,-4,6)$.　答: $5,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0$.

2.　證$(1,2,3)$點與位標軸之距離為$\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$.

3.　知三角形之頂點如次,求其邊:

[i]　$(0,0,3)$, $(4,0,0)$, $(8,0,0)$;

[ii]　$(3,2,0)$, $(-2,5,7)$, $(1,-3,-5)$.

4.　證$(4,3,-4)$, $(-2,9,-4)$, $(-2,3,2)$三點連成一等邊三角形.

5.　自起點至$m_1(x_1,y_1,z_1)$點作OM_1直線,又有一直線之方向角為α, β, γ,求OM_1投射於此直線上之影.

答:　$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=0$.

6. 證 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2;$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma-2.$$

7. 一線分在正交三平面上之射影之方和,二倍此線分之方.

8. 設 V 為二直線之交角,此二直線與正交位標軸所成之角為 (α,β,γ) 及 (α',β',γ'),試證以下範式:

$$4\sin^2\frac{V}{2}=(\cos\alpha-\cos\alpha')^2+(\cos\beta-\cos\beta')^2+(\cos\gamma-\cos\gamma')^2;$$

$$\cos^2\frac{V}{2}=(\cos\alpha+\cos\alpha')^2+(\cos\beta+\cos\beta')^2+(\cos\gamma+\cos\gamma')^2.$$

9. 設 (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) 為 P,Q 二點之位標.證明 PQ 投射於他一直線上之影為

$$l_1(x_2-x_1)+m_1(y_2-y_1)+n_1(z_2-z_1).$$

l_1, m_1, n_1 為他一直線之方向餘弦.

10. 一直線投射於位標軸上之影為 2, 3, 6.求直線之長度幾何.

11. 一直線與位標軸所作之角俱等,求直線之方向餘弦.

答: $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (45°)

12. 設 P 與 Q 之位標為 $(2,3,-6)$, $(3,-4,5)$,求 OP, OQ 及 PQ 之方向餘弦.

答: $\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{3}{7}$, $-\dfrac{6}{7}$; $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$, $\dfrac{-4}{5\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{-2}{7}$, $\dfrac{-3}{7}$, $\dfrac{6}{7}$.

13. 設 $(2,3,-6)$, $(3,-4,5)$ 為 P 與 Q 之位標.求 OP 與 OQ 之交角. 答: $\cos V=\dfrac{1}{35}(-18\sqrt{2})$.

14. 設 P,Q,R 三點之位標為 $(2,3,5)$, $(3,5,-2)$, $(-1,3,2)$.求 PQR 三角形之角. 答: $90°$, $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com