复变函数选編

第一册

唐令教编

西南师范学院数学系印

一九八三年三月

目 录

第一讲　椭圆函数

§1. 椭圆函数的定义及性质

1.1　我们知道一个单值函数$f(z)$，若在有限平面内无极点以外的奇点，则称函数$f(z)$为半纯函数。这一讲的目的就是研究半纯函数中的一种特殊函数，称之为椭圆函数，其定义如下

定义：具有双周期的半纯函数称为椭圆函数。

今后椭圆函数的一对基本周期常以2ω与$2\omega'$表示，并且规定$\frac{\omega'}{\omega}=\tau$为虚数，$Im(\frac{\omega'}{\omega})>0$。简单地说，一个半纯函数称为椭圆函数，即是说它是一个周期为2ω，$2\omega'$的双周期函数。

设函数$f(z)$为椭圆函数，$2\omega, 2\omega'$为一对基本周期，则有下面关系

$$f(z+2\omega)=f(z),\quad f(z+2\omega')=f(z) \tag{1}$$

因此可以推出

$$f(z+2m\omega+2n\omega')=f(z) \tag{2}$$

其中m, n表示整数，正负及零都可以。因此一椭圆函数$f(z)$有无数的周期$2m\omega+2n\omega'$，在平面上称为周期点。而这无穷多个周期都是这一对基本周期2ω，$2\omega'$的线性组合（以整数为系数），以0，2ω，$2\omega'$及$2\omega+2\omega'$为顶点的平行四边形称为$f(z)$的基本周期平行四边形。

我们容易証明，一个椭圆函数有无穷多对互异的基本周期，相应于它就有无穷多个互异的基本周期平行四边形。

事实上，设2ω，$2\omega'$是椭圆函数$f(z)$的两个基本周期，又设$2\omega_1$及$2\omega_2$为$f(z)$的一对周期，由于是周期，则有

$$\left.\begin{aligned}2\omega_1 &= m_1' 2\omega + m_2' 2\omega' \\ 2\omega_2 &= m_1'' 2\omega + m_2'' 2\omega'\end{aligned}\right\} \text{即} \left\{\begin{aligned}\omega_1 &= m_1'\omega + m_2'\omega' \\ \omega_2 &= m_1''\omega + m_2''\omega'\end{aligned}\right.$$

其中m_1', m_2', m_1'', m_2''都是整数，当$m_1' m_2'' - m_1'' m_2' = \pm 1$时，由上面的方程组得到

$$\left\{\begin{aligned}\omega &= \pm(m_2''\omega_1 - m_2'\omega_2) \\ \omega' &= \pm(-m_1''\omega_1 + m_1'\omega_2)\end{aligned}\right.$$

由此可知椭圆函数$f(z)$的任一周期$p = 2m\omega + 2n\omega'$都可写为$2\omega_1$、$2\omega_2$的线性组合，系数都是整数，这样一来，$2\omega_1$, $2\omega_2$亦是函数$f(z)$的一对周期。由於适合条件$m_1' m_2'' - m_1'' m_2' = \pm 1$的四整数有无穷多组，因此我们得到下面的一个定理：

定理：一个椭圆函数有无穷多对基本周期，设其中任意一对基本周期为2ω，$2\omega'$，则一切基本周期$2\omega_1$，$2\omega_2$可用

$$2\omega_1 = 2m_1'\omega + 2m_2'\omega'$$

$$2\omega_2 = 2m_1''\omega + 2m_2''\omega'$$

表示，其中m_1'，m_2及m_1''，m_2''都为整数，且满足$m_1' m_2'' - m_1'' m_2' = \pm 1$.

定理：非常数的椭圆函数$f(z)$的一切周期点集，除无穷远点之外，无有限的极限点。

证明：若有一有限点a为极限点，则对于任意给定的$\varepsilon > 0$，总有周期ω_1及ω_2存在，满足$|\omega_1 - a| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|\omega_2 - a| < \frac{\varepsilon}{2}$，故有$|\omega_1 - \omega_2| < \varepsilon$. 而$\omega_1 - \omega_2$亦为$f(z)$的周期，由此可知$f(z)$有绝对值任意小的周期。

现在取一闭区域$\overline{G}$，$f(z)$在$\overline{G}$上是解析的，又取一点$z_0 \in G$，由上述理由，取绝对值无限减小的一列周期：

$$\omega', \omega'', \omega''', \ldots \omega^{(n)} \ldots$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty} \omega^{(n)} = 0$，则有$f(z_0) = f(z_0 + \omega') = f(z_0 + \omega'') = \ldots$.
而z_0，$z_0 + \omega'$，$z_0 + \omega''$ …都在G内部。由唯一性定理，$f(z)$为

常数，与假设$f(z)$为非常数的函数矛盾，由此证明了定理。

1.2 周期平行四边形

我们考虑平面上的四个点 z_0，$z_0+2\omega$，$z_0+2\omega+2\omega'$，$z_0+2\omega'$，其中z_0是任意一个复数。由于 $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ 是虚数，所以这四点表一个平行四边形的顶点，这平行四边形记为 $p_{0,0}$，令 $z_0'=z_0+2m\omega+2n\omega'$（$m,n$为整数）於是下列四点 z_0'，$z_0'+2\omega$，$z_0'+2\omega+2\omega'$ 及 $z_0'+2\omega'$ 又是一个平行四边形 $p_{m,n}$ 的顶点．这个平行四边形 $p_{m,n}$ 可由基本平行四边形 $p_{0,0}$ 经过一个平移来得到．

给m和n一切可能的整数值，我们就得到一组平行四边形 $\{p_{m,n}\}$．它们彼此全等．并且盖住了整个平面（图1.1）

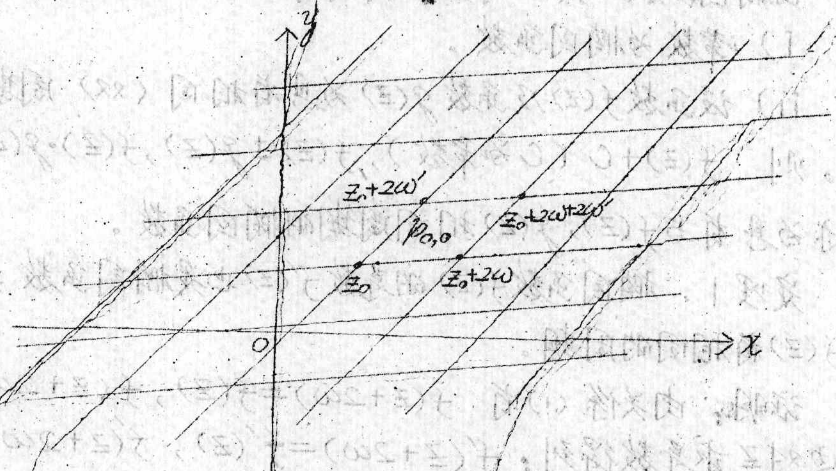

图 1.1

要想这组平行四边形$\{p_{m,n}\}$彼此无公共点，我们规定每个平行四边形$p_{m,n}$只有一部份边界线，即边线$\overline{z_0', z_0'+2\omega}$，$\overline{z_0', z_0'+2\omega'}$，并且端点$z_0'+2\omega$及$z_0'+2\omega'$还要除掉。

至于平行四边形$p_{m,n}$的另外两边，我们当作是与$p_{m,n}$毗邻的平行四边形的边。这样一来，平面上任意一点就属于一个而且仅属于一个平行四边形。若$z\in p_{m,n}$，那末点$z+2\mu\omega+2\lambda\omega'$（$\mu,\lambda$为整数）就称它是和点$z$是同余的或等价的。它在平行四

边形 $p_{m+m, n+n'}$ 中所占的位置与 z 在 $p_{m, n'}$ 中所占的位置完全一样。在这些等价点中有一个点属于基本平行四边形 $p_{0,0}$（这点是 $z-2m'\omega-2n'\omega'$）

因此平面上每一个点只与基本平行四边形上唯一的一个点等价。我们称平行四边形 $p_{m,n}$ 为周期平行四边形；从这些周期平行四边形中选定一个作为基本平行四边形 p，显然完全是任意的。现在可以几何地来解释关係（2）了，（2）表明函数 $f(z)$ 在所有等价点上都取同一个值。因此，在一个平行四边形上来研究椭圆函数就足够知道它在整个平面上的性质了。首先我们来讲椭圆函数的一般性质。

1.3 椭圆函数的基本性质及若干定理

由椭圆函数的定义可直接得到下面一些基本性质：

i）常数为椭圆函数。

ii）设函数 $f(z)$ 及函数 $g(z)$ 为具有相同（双）周期的椭圆函数，则 $f(z)+C$（C 为常数），$f(z)\pm g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 及 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 等亦为具有与 $f(z)$，$g(z)$ 相同周期的椭圆函数。

定理1．椭圆函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 也是椭圆函数，並且 $f'(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的周期。

证明：由关係（1）有 $f(z+2\omega)=f(z)$，$f(z+2\omega')=f(z)$ 两边对 z 求导数得到：$f'(z+2\omega)=f'(z)$，$f'(z+2\omega')=f'(z)$ 因此导函数 $f'(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的周期 2ω 和 $2\omega'$，另一方面，导函数 $f'(z)$ 在有限区域内除极点之外，不能有另外的奇异点，因为若 $f(z)$ 在某点是解析的，那么导数在这点也是解析的，若 $f(z)$ 在某点不解析，则此点就是 $f(z)$ 的极点，那么在这点上 $f'(z)$ 也同样只能是一个极点。因此 $f'(z)$ 是一个半纯函数，并且有周期 2ω 和 $2\omega'$，按定义，$f'(z)$ 是一个椭圆函数，其周期与原函数相同。

推论．椭圆函数的高阶导函数亦为椭圆函数，其周期与原函数的周期亦相同。

注意：若椭圆函数是常数时，推论亦真，但无多大实际意义。

定理2. 在一个周期平行四边形上为整函数的椭圆函数必为常数。

事实上，设$f(z)$为椭圆函数，并在一周期平行四边形上为整函数，则$|f(z)|$在这周期平行四边形上有界，故$f(z)$在任一周期平行四边形上解析且有界，故$f(z)$在平面上除无穷远点之外，处处解析且有界。由刘维尔（Liouvill）定理知道$f(z)$为常数。

由定理2直接就可推出下面三个推论：

推论1. 非常数的椭圆函数，在周期平行四边形上至少有一个极点。

推论2. 若周期相同的两个椭圆函数在周期平行四边形上具有相同的极点，并有相等的主部分，则它们仅相差一个常数。

事实上，设$f_1(z)$和$f_2(z)$是具备上述推论2中条件的两个椭圆函数，那么$f_1(z)-f_2(z)$在一个周期平行四边形上是一个没有极点的椭圆函数，由定理2，$f_1(z)-f_2(z)$恒为一常数C，故$f_1(z)=f_2(z)+C$。

推论3. 若周期相同的两个椭圆函数，在周期平行四边形上具有相同的零点和极点，并且相应点上的级也是相同的，则它们仅差一个常数因子。

事实上，设$f_1(z)$及$f_2(z)$为满足上述条件的两个椭圆函数，由椭圆函数的性质ii），$\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$亦为椭圆函数，其周期与$f_1(z)$相同，又因$f_1(z)$和$f_2(z)$具有相同的零点和极点，并且相应的级也相同，故$\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$在周期平行四边形内为无极点的椭圆函数，由定理2有$\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=C$（常数）故$f_1(z)=Cf_2(z)$。

定理3. 椭圆函数在周期平行四边形上所有的极点的留数之和为零。

如果在周期平行四边形的边上有椭圆函数的极点时，我们总

可以稍微移动一下这个平行四边形，使得在原来的平行四边形的边界上的极点，变成在移动后的平行四边形的内部（为什么能办到呢？）我们用

$$z_0,\ z_0+2\omega,\ z_0+2\omega+2\omega',\ z_0+2\omega'$$

来表示移动后的平行四边形的边界上就再也没有函数 $f(z)$ 的极点。今后在必要时，我们总是假定椭圆函数在周期平行四边形的边界上无极点。

证明：设椭圆函数 $f(z)$ 在一个周期平行四边形内部的极点上的留数的和为 S，则由留数定理有

$$S=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0}^{z_0+2\omega}f(z)dz+\int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'}f(z)dz+\int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'}f(z)dz\right.$$

$$\left.+\int_{z_0+2\omega'}^{z_0}f(z)dz\right] \qquad (3)$$

其中每个积分都是沿着积分中所指出的两点的连线计算的。在第三个积分中作变量替换，令 $z=z'+2\omega'$，当 $z=z_0+2\omega'$ 时 $z'=z_0$，当 $z=z_0+2\omega+2\omega'$ 时 $z'=z_0+2\omega$，并且 $dz=dz'$，再利用周期性得到

$$\int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'}f(z)dz=\int_{z_0+2\omega}^{z_0}f(z'+2\omega')dz'=\int_{z_0+2\omega}^{z_0}f(z')dz',$$

因此 (3) 中第一个积分与第三个积分之和等于

$$\int_{z_0}^{z_0+2\omega}f(z)dz+\int_{z_0+2\omega}^{z_0}f(z)dz=0.$$

同理可以断定第二个积分与第四个积分之和亦为零。只须在第二个积分中引用替换 $z=z'+2\omega$ 就行了。故 $S=0$。

推论，在周期平行四边形上只有一个简单极点的椭圆函数不

可能存在。

若不然，则于周期平行四边形内仅有唯一的简单极点，其主要部分必为

$$\frac{A}{z-a}, \qquad A\neq 0$$

的形式，那么沿周期平行四边形的周界积分，其值不为零，与定理3矛盾。

定理4. 在周期平行四边形上，椭圆函数所取得的每一个值（有限或无穷）的次数都是一样多。

证明：设α为任意给定的一个复数，若$\alpha=\infty$时，$f(z)=\infty$的根就是$f(z)$的极点的个数。若$\alpha\neq\infty$时，由于$f(z)$是椭圆函数，我们来证明在周期平行四边形上，方程$f(z)=\alpha$的根和$f(z)$的极点的数目相等。

设 z_0，$z_0+2\omega$，$z_0+2\omega+2\omega'$，$z_0+2\omega'$ 表示一个周期平行四边形的顶点，并假定$f(z)-\alpha$在其边界上既无零点也无极点，由椭圆函数的性质及定理1，我们知道$\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}$是一个与$f(z)$具有相同周期的椭圆函数，再由定理3，我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz=0 \qquad (4)$$

其中C表示周期平行四边形的边界。另一方面，我们知道此积分表示函数$f(z)-\alpha$在C内零点和极点个数之差，由积分知道其差值为零，从而就证明了在周期平行四边形内方程$f(z)=\alpha$的根与$f(z)$的极点数目相等。

定义：如果椭圆函数$f(z)$在周期平行四边形上对每个值都取S次，我们就称$f(z)$为S级的椭圆函数。

由定理3的推论知道$S\geq 2$，同时定理4还告诉我们，n级椭圆函数在周期平行四边形内，取任值都有n次。

定理5. 椭圆函数在周期平行四边形上所有的零点之和与所

有的极点之和的差等于它的某个周期，即

$$\sum_{K=1}^{S}\alpha_K-\sum_{K=1}^{S}\beta_K=2\mu\omega+2\lambda\omega'$$

其中 S 表示椭圆函数的级数，α_K，β_K 分别表示在周期平行四边形上的零点和极点，μ，λ 都为整数，每个零点和极点是几级就计算几次。

证明　设周期平行四边形的四顶点为

$$z_0,\ z_0+2\omega,\ z_0+2\omega+2\omega',\ z_0+2\omega',$$

并且椭圆函数 $f(z)$ 在这周期平行四边形的边界上无零点和极点，于是函数 $f(z)$ 在周期平行四边形上所有零点之和与所有极点之和的差可由下面积分表示：

$$\sum_{K=1}^{S}\alpha_K-\sum_{K=1}^{S}\beta_K=\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{5}$$

其中 C 为周期平行四边形的边界，现在我们来计算上式右边的积分，先计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0}^{z_0+2\omega} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0+2\omega+2\omega'}^{z_0+2\omega'} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

第二个积分中我们用 $z+2\omega'$ 作替换，再利用周期性，积分就变为

$$-\frac{2\omega'}{2\pi i}\int_{z_0}^{z+2\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-\frac{2\omega'}{2\pi i}\left[\ln f(z_0+2\omega)-\ln f(z_0)\right]$$

上式的右端中因为 $f(z_0+2\omega)=f(z_0)$，所以括弧内的数等于零或 $2\lambda\pi i$，其中 λ 为整数，故这积分的总和等于 $2\omega'\lambda$，另外两个积分之和

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{z_0+2\omega}^{z_0+2\omega+2\omega'} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int_{z_0+2\omega'}^{z} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]$$

依同理论证，其和为$2\mu\omega$，μ为整数。把这两结果代入（5）中。就得到结果

$$\sum_{K=1}^{S}\alpha_K-\sum_{K=1}^{S}\beta_K=2\mu\omega+2\lambda\omega'.$$

把此定理用到函数$f(z)-a$上，其中a为任意一个复数，我们就得到在周期平行四边形上，方程$f(z)=a$的根之和与函数$f(z)$在这个平行四边形上的极点之和，对于$f(z)$的周期$2\mu\omega+2\lambda\omega'$来说是同余的（或等价的）

1.4　二级椭圆函数

我们首先注意两点，1)若函数$f(z)$是周期为2ω和$2\omega'$的椭圆函数，并满足：

$$f(z)=-f(K-z)，其中K是一个常数 \qquad (6)$$

则 $\frac{1}{2}K$，$\frac{1}{2}K+\omega$，$\frac{1}{2}K+\omega'$及$\frac{1}{2}K+\omega+\omega'$是函数$f(z)$的零点或极点。

事实上，在关系（6）中令$z=\frac{1}{2}K$时，就有$f(\frac{1}{2}K)=-f(\frac{1}{2}K)$成立，要此等式成立，$f(\frac{1}{2}K)$必须是零或无穷，那么$\frac{1}{2}K$就是函数$f(z)$的零点或极点了。再令$z=\frac{1}{2}K+\omega$，由（6）及周期性得到

$$\begin{aligned}f(\tfrac{1}{2}K+\omega)&=-f(\tfrac{1}{2}K-\omega)=-f(\tfrac{1}{2}K-\omega+2\omega)\\&=-f(\tfrac{1}{2}K+\omega)\end{aligned}$$

即

$$f(\tfrac{1}{2}K+\omega)=-f(\tfrac{1}{2}K+\omega)$$

此等式又表明了$\frac{1}{2}K+\omega$是$f(z)$的零点或极点。同理可证$\frac{1}{2}K+\omega'$和$\frac{1}{2}K+\omega+\omega'$都是函数$f(z)$的零点或极点。

注意：若$f(z)$为二级椭圆函数，那么上述的四点中必有两点是零点，其余两点是极点。

数值ω，ω'，$\omega+\omega'$和与它们的一切等价数，我们都称为半周期。

特别当$K=0$时，（6）就变为$f(z)=-f(-z)$，即$f(-z)=$

$=-f(z)$，这时我们称$f(z)$为奇椭圆函数，根据上面的证明，对于奇椭圆函数来说，$z=0$是$f(z)$的零点或极点，从而所有的周期都和半周期一样，是$f(z)$的零点或极点。

2）若函数$f(z)$的周期为2ω与$2\omega'$的椭圆函数，且满足关系：

$$f(z)=f(K-z),\quad K\text{为常数}。\tag{7}$$

则 $\frac{1}{2}K$，$\frac{1}{2}K+\omega$，$\frac{1}{2}K+\omega+\omega'$，$\frac{1}{2}K+\omega'$

都是导函数$f'(z)$的零点或极点。

事实上，微分(7)得到$f'(z)=-f'(K-z)$，函数$f'(z)$满足关系式(6)，再由1)得到结论。

特别当$K=0$时，(7)变为$f(z)=f(-z)$，我们称$f(z)$为偶椭圆函数，其导数为$f'(z)=-f'(-z)$，即$f'(z)$就是一个奇椭圆函数了，由1)知道$f'(z)$的周期和半周期都是它的零点或极点。

现在我们把上面讲的1)、2)两点用到二级椭圆函数上去。

设β_1、β_2为二级椭圆函数$f(z)$的两个单极点（或同一周期平行四边形上不同），如果$f(z)=f(z_1)$由定理5有$z+z_1-(\beta_1+\beta_2)=2m\omega+2n\omega'$，即$z+z_1=\beta_1+\beta_2+2m\omega+2n\omega'$，亦即$z_1=\beta_1+\beta_2-z+2m\omega+2n\omega'$代入$f(z)=f(z_1)$中得到

$$f(z)=f(\beta_1+\beta_2-z+2m\omega+2n\omega')=f(\beta_1+\beta_2-z)$$

此式满足(7)式，由2)知道

$$b_1=\frac{\beta_1+\beta_2}{2},\quad b_2=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\omega,$$

$$b_3=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\omega',\quad b_4=\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+\omega+\omega'\tag{8}$$

是导函数$f'(z)$的零点或极点。另一方面，我们已设β_1、β_2是

$f(z)$的单极点，因而β_1，β_2都是导函数$f'(z)$的二级极点（为什么？），而点β_1和β_2显然又不与(8)中的点等价，所以(8)中的四个点都是$f'(z)$的零点。

现在我们造一函数

$$F(z)=\left[f(z)-f(b_1)\right]\left[f(z)-f(b_2)\right]\left[f(z)-f(b_3)\right]\left[f(z)-f(b_4)\right]$$

它是一个八级椭圆函数，并且与$f(z)$有相同的周期，点β_1，β_2是这函数的四级极点，并且(8)中的四个点都是它的二级零点。其原因是在(8)式中的四个点上，函数$F(z)$与其导数都等于零。

由于$f'^2(z)$和$F(z)$不仅具有相同的周期、相同的零点和极点，并且它们的零点和极点的级也相同，由定理2的推论3就有

$$f'^2(z)=CF(z)$$

因此有
$$f'(z)=\sqrt{CF(z)} \tag{9}$$

命$f(z)=W$，则
$$CF(z)=C(W-a_1)(W-a_2)(W-a_3)(W-a_4)=R(W)$$

其中$a_i=f(b_i)$，$i=1,2,3,4$，$R(W)$是W的四次多项式，故有

$$\frac{dW}{dz}=\sqrt{R(W)}$$

由此导出
$$z=\int\frac{dW}{\sqrt{R(W)}} \tag{10}$$

因此一个二级椭圆函数$W=f(z)$可以看做一个第一种类型的椭圆积分(10)的反函数。

现在假定$\beta_1=\beta_2$时，即β_1为椭圆函数$f(z)$的一个二级极点，$f(z)$则满足关系$f(z)=f(2\beta_1-z)$，点β_1是$f'(z)$的一个三级极点，其零点为$\alpha_1=\beta_1+\omega$，$\alpha_2=\beta_1+\omega'$，$\alpha_3=\beta_1+\omega+\omega'$。

作函数 $\Phi(z)=[f(z)-f(\alpha_1)][f(z)-f(\alpha_2)][f(z)-f(\alpha_3)]$，$\Phi(z)$是一个与$f(z)$有相同周期的六级椭圆函数，点$\beta_1$是它的六级极点，点$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的二级零点，其原因是函数$\Phi(z)$与它的导数在点$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$上的值都等于零。

由于$f'^2(z)$和$\Phi(z)$是具有周期相同、零点和极点相同．以及相应零点和极点上的级也相同的两个椭圆函数，由定理2的推论3得到

$$f'^2(z)=C\Phi(z)$$

从而

$$f'(z)=\sqrt{C\Phi(z)}$$

令 $f(z)=W$， $C\Phi(z)=R_1(W)$

就得到

$$z=\int\frac{dW}{\sqrt{R_1(W)}} \tag{12}$$

其中$R_1(W)$是W的一个三次多项式，因此在二级极点的情况，椭圆函数仍可以看成是一个第一种类型的椭圆积分(12)的反函数。

§2. 米他格——列夫勒(Mittag-Leffler)定理

前面已讲了椭圆函数的一般性质，但还不知道椭圆函数的具体表达形式。为了要造出一些具体的椭圆函数，我们首先来介绍米他格——列夫列定理，此定理不仅可以用来造出我们所需要的椭圆函数，还可用它将三角函数展为部分分式，超越整函数表为因式的乘积。

2.1 米他格——列夫勒定理（简记为M—L定理）

在有理函数中，我们知道，若已知有限个极点，以及各极点上展开的主要部分，则由此可以确定一个以已知点为极点，其相应的主要部分亦为已知的有理函数。现在的问题是，若已给出无限个极点，其对应点的展开式的主要部分也都是已知的，那末适合

这些条件的函数是否存在？有理函数中的部分分式方法在此不能普遍适用。

例如，设 $z=n$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一级极点，对每点上展开的主要部分依次为 $\frac{1}{z-n}$，要作出此函数 $f(z)$，按部分分式的方法，就只有规定

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n}+C.$$

而右面的级数是不收敛的，故不能由此规定 $f(z)$，下面提出M—L定理。

M—L定理：已知点列 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，仅以∞为唯一极限点，又以 $\frac{1}{z-a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为有理整式（无常数项）的

$$p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\ p_2\left(\frac{1}{z+a_2}\right),\cdots p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),\cdots$$

都为已知，则以点 a_n $(n=1,2,\cdots)$ 为极点，而依次以 $p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ 为展开式的主要部分的解析函数 $f(z)$ 必存在（无穷远点例外）

证明，为方便计，设 $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant\cdots$，而 $p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ 除 a_n 外到处都解析，故在以 $z=0$ 为中心，以 $|a_n|$ 为半径所作的圆的内部展成幂级数，得到

$$p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=C_{n,0}+C_{n,1}z+C_{n,2}z^2+\cdots, \qquad (13)$$

在 $|z|\leqslant\frac{1}{2}|a_n|$ 圆内级数(13)均匀收敛，因此取充分大的N，命

$$G_n(z)=C_{n,0}+C_{n,1}z+C_{n,2}z^2+\cdots+C_{n,N}z^N,$$

则有 $$\left|p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-G_n(z)\right|<\frac{1}{2^n}\quad\left(|z|\leqslant\frac{1}{2}|a_n|\right) \qquad (14)$$

对于每个 n，我们取定 $G_n(z)$，我们命

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-G(z)\right\} \qquad (15)$$

则函数 $f(z)$ 为本定理所要求的函数之一。

首先证明，$f(z)$ 在任意一有限区域 G（G 内不包含 $a_1, a_2, \cdots$ 的任何一点）内是解析的。当 n 充分大时，则区域 G 必包含在圆 $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ 之内，故对于任意 $z \in G$ 有

$$|z| \leq \frac{1}{2}|a_n| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1}| \leq \cdots。$$

因此从（14）有

$$|p_n - G_n| < \frac{1}{2^n}，\ |p_{n+1} - G_{n+1}| < \frac{1}{2^{n+1}}，\cdots，$$

故无穷级数

$$(p_n - G_n) + (p_{n+1} - G_{n+1}) + \cdots$$

在 G 内均匀收敛，而各项又为 z 的解析函数，故和函数亦为解析函数，再加上有限项

$$(p_1 - G_1) + (p_2 - G_2) + \cdots + (p_{n-1} - G_{n-1})$$

所得到的函数 $f(z)$ 在域 G 内亦为解析的。

其次证明 $f(z)$ 是以 a_k（$k=1,2,\cdots$）为极点，并且在此点展开的主要部分为 $p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$。取 n 充分大，使得圆 $|z| < \frac{1}{2}|a_n|$ 内包含 a_k，命

$$f(z) = p_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + p_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \cdots + p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + R_n(z)。$$

如上述证明，对任意一点 z，当 $|z| < \frac{1}{2}|a_n|$ 时，$R_n(z)$ 为解析的。所以当 $z \to a_k$ 时，上式右边仅有 $p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$ 为无穷大，其它各项皆为有限而且是解析的。由此可知 $f(z)$ 是以 a_k 为极点，其展开式的主要部分为 $p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$。

2.2. M—L 定理的特殊情况。

设给定的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 以无穷大为极限点，且满足

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots，$$