◇ 左秀山 主编 ◇

高等数学

应用基础教程

GaoDengShuXue
YinYongJiChu
JiaoCheng

東華大學出版社

高职高专基础课程系列教材

总主编 冯盈之　左秀山

高等数学应用基础教程

主　　编 左秀山
副 主 编 黄龙如　蒋志刚
其他参编者（按姓氏笔划为序）
马维聪　左秀山　张　跃
高霞萍　黄龙如　蒋志刚
蒋　奕

東華大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用基础教程/左秀山主编. —上海：东华大学出版社，2008.9

ISBN 978-7-81111-422-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.左...　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 119363 号

文字编辑　刘红梅

责任编辑　曹晓虹

封面设计　书衣坊

高等数学应用基础教程

左秀山　主编

东华大学出版社出版

(上海市延安西路 1882 号　　邮政编码：200051)

电话：021-62193056　　62373056

新华书店上海发行所发行　江苏省通州市印刷总厂有限公司印刷

开本：787×960　1/16　印张：15.5　字数：348 千字

2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—5 000

ISBN 978-7-81111-422-5/O·003

定价：27.90 元

前　言

高职高专高等数学应用基础课程，是完全面向高职高专学生和高职高专各个专业需求的一门数学技术课程。

本书遵照教育部“高职高专高等数学教学的基本要求”，制定了本教材的编写原则。根据高职高专学生的实际水平，我们在能力培养、思维素质提高、数学技术传授等方面寻找合适的切入点，没有受高等数学过去知识体系的束缚，突出地应用了通俗、有趣的方法向学生进行数学思维素质的熏陶以及数学技术的传授，体现了数学素质教育与数学技术教育的大方向。在知识结构体系上，具有较好的逻辑关系；在理论深度上，突出了概念的背景，强调了概念及其方法的应用，减少了理论定理及其证明过程，对必须用到的基础理论不进行严格的数学论证，而是通过几何图示和专业事例加以说明，侧重了对于学生进行应用数学方法和应用能力的培养；在数学方法上，紧密结合实际问题，大量地采用了案例教学的方法，突出了高等数学的应用价值。

本书所体现的高等数学的文化和高等数学的应用是非常鲜明的，也比较充分地体现了高等数学在实际问题应用中的技术性。本教材不单单是一本高等数学的文化基础教材，更是一本可以直接为专业服务的技术性很强的高等数学应用教材。根据大多数高职学院模块化菜单式数学教学改革的研究成果，本书的内容主要分为两部分：

一、基础篇。内容包括一元函数微积分，包括极限、导数、微分、极值、最值、导数的应用、不定积分、定积分，是大多数高职高专学生应该必备的高等数学知识。

二、应用篇。内容包括：微分方程、级数、线性代数、线性规划和概率统计方法。这是根据高职各个专业的需求情况，确定的不同模块的教学内容。应用篇中所列菜单式的教学内容，各自具有相对独立性，我们可以根据不同专业的需求进行不同地选择。

为了突出数学软件的实用性，在每一章的最后一节，我们增加了数学软件（MATLAB）的应用，这是本书的一个突出的特点。为了方便学生自学，我们在每章后面都配有适量的练习题，并附有参考答案。

本书的特点是弱化了理论性和计算的复杂性，而强化了数学的方法、实际应用案例和数学软件的应用。使学生能够比较容易地学会基本的数学知识和计算

方法，重点掌握高等数学的应用，并且能够运用功能比较全面的数学软件，使学生具有处理更复杂的数学计算应用问题的能力。

本教材适用于高职高专院校的经济、管理、计算机、机电、信息、纺织、服装等专业高等应用数学的教学，也可以作为广大高等数学应用爱好者及其技术人员的参考书籍。

本书由具有多年教学经验的教师编写。其中，第 1、2、3 章由黄龙如和高霞萍编写，第 4、5 章由蒋奕编写，第 6、7 章由张跃编写，第 8、9 章由左秀山编写，第 10 章由蒋志刚编写，第 1 至 9 章的 MATLAB 应用内容由左秀山编写，第 10 章的 MATLAB 应用内容由马维聪编写，全书由左秀山主编和统稿。在编写本书的过程中，我们得到了浙江纺织职业技术学院领导的大力支持，也承蒙东华大学出版社的各位领导的支持和指导。在此，我们表示由衷地感谢！

由于水平有限，错误之处在所难免，敬请各位专家多加指导，我们将不断地修正和改进我们的工作。

作者

2008 年 8 月 28 日

目 录

基础篇

应用篇

第一章　函数、极限与连续

[本章内容及教学目的]

函数是现代数学研究的基本对象，是研究生产或生活现象的重要工具．学习函数的概念离不开学习极限和连续，本章即是对上述概念及有关内容的详细介绍，为了简化繁复的数学计算，突出数学软件的工具作用，本章也将学习一些 MATLAB 软件的基础知识．

通过本章学习要完成下列目标：

1．掌握函数概念及常用函数．

2．理解极限与连续思想，并会计算简单的极限．

3．掌握 MATLAB 基础知识．

4．会利用 MATLAB 软件求解极限问题．

1.1　函　数

函数概念

在各种实践活动中，除了会遇到许多在研究过程中保持不变的常量外，还会遇到在研究过程中是不断变化的变量．例如在一段时间内，车票的价格是保持不变的，可以看成常量；而气温则是每天都在发生变化，可以用变量来表示．常量通常用字母 a、b、c、k 等表示；变量用字母 x、y、z、t 等表示．

在同一变化过程中的几个变量常是相互关联的，某些变量之间可能存在着对应关系．

[引例 1.1]　有一种零件价格是常数 p(元/件)，则销售量 Q(件)与收益 R(元)之间存在着对应关系：

$$R = pQ$$

当销售量 Q 取定某一数值时，收益 R 也对应着一个确定的数值，收益 R 随

销售量 Q 的变化而变化.这种对应关系称之为函数.下面给出函数的确切定义：

[定义 1.1] 设有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在允许取值范围内的每一个值，变量 y 按照某种对应规则，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作：

$$y=f(x)$$

其中 x 为自变量，y 为因变量.x 的取值范围叫函数的定义域，y 的取值范围叫函数的值域.

常用的函数表示法有三种：解析法(也叫公式法)、表格法和图示法.

解析法就是用解析表达式(或公式)表示函数关系，例如 $y=x^2+x$，$y=\sin x$，$y=\log_a x$ 等.高等数学中讨论的函数大多数用解析法表示.

表格法是用列表的方法来表示函数关系，例如我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等.在研究社会经济现象时，常常采用表格法.

图示法是用平面直角坐标系 xOy 上的曲线(如直线、圆等)来表示函数关系.该曲线通常称为函数的图形(也称为图像).

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用.

函数具有单调性、奇偶性、周期性、有界性等一些简单性质，它们是研究函数的基础.

初等函数

一、反函数

[定义 1.2] 设已知函数为 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.习惯上常用 x 作为自变量，用 y 作为因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x，将 x 换为 y，从而得 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.如图 1-1 所示.

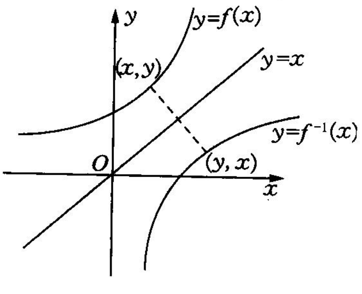

图 1-1

需要注意的是：

(1) 由函数 $y=f(x)$(也称为直接函数)如能解出反函数 $x=\varphi(y)$，它们是同一个函数，其函数图形是同一条曲线.但是若将反函数中的 x 与 y 互换后得到 $y=\varphi(x)$，则 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的函数图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

(2)若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．且能解出唯一的反函数 $y=\varphi(x)$，则此时反函数的定义域为 Z，值域为 D.

二、基本初等函数

下面六类函数称为基本初等函数(也称为简单函数)：

(1)常数函数：$y=C$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图形是一条平行于 x 轴的直线.

(2)幂函数：$y=x^{\mu}$(μ 为实常数)

它的定义域随 μ 值而定，但不管 μ 的值是多少，它在$(0,+\infty)$内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时，它的图形如图 1-2 所示，都通过原点(0,0)和点(1,1)，在$(0,+\infty)$内严格单调增加且无界.

当 $\mu<0$ 时，它的图形如图 1-3 所示，都通过点(1,1)，在$(0,+\infty)$内严格单调减少且无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

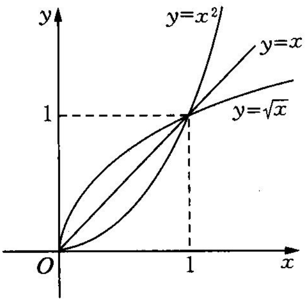

图 1-2

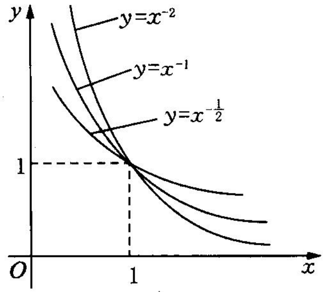

图 1-3

(3)指数函数：$y=a^{x}$($a>0$，且 $a\neq1$)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，不论 x 为何值，总有 $a^{x}>0$，且 $a^{0}=1$，所以它的图形(如图 1-4 所示)总是在 x 轴的上方，且通过点(0,1).

以无理数 e＝2.7182818…为底的指数函数 $y=e^{x}$是微积分中常用的指数函数.

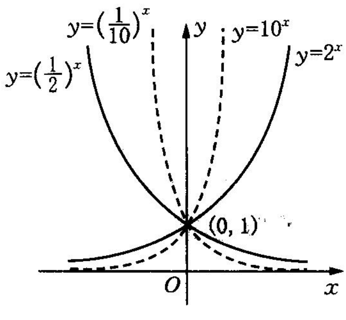

图 1-4

(4)对数函数：$y=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq1$)

它的定义域为$(0,+\infty)$，不论 a 为何值，对数曲线(如图 1-5 所示)都过点(1,0).

以 10 为底的对数函数叫做常用对数，简记为 $y=\lg x$.

以无理数 e 为底的对数函数叫做自然对数，简记为 $y=\ln x$，它是微积分中常

用的对数函数.

(5)三角函数

常用的三角函数有以下四个:

正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$.

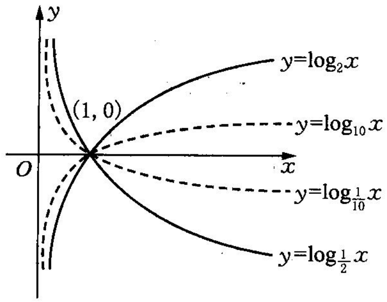

图 1-5

在微积分中,三角函数的自变量 x 一般以"弧度"为单位.例如 $x=1$ 就表示 1 弧度(1 弧度约为 $57°17'44.8''$).

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,且是周期为 2π 的周期函数.

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,是偶函数,且是周期为 2π 的周期函数.

因为$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是有界函数.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq(2k+1)\pi/2$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数,是奇函数,且是周期为 π 的周期函数.

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数,是奇函数,且是周期为 π 的周期函数.

(6)反三角函数

常用的反三角函数有以下四个:

反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$,反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

三、复合函数

[定义 1.3] 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,如果$\varphi(x)$的值域包含在 $y=f(u)$的定义域内,则 y 是 x 的函数,记作:

$$y=f[\varphi(x)]$$

我们称 $y=f[\varphi(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合函数.其中 x 称为自变量,u 为中间变量,y 为因变量(即函数).

必须注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.例如:

$$y=\arccos u \text{ 与 } u=x^4+3$$

就不能复合成一个复合函数.这是因为在$(-\infty,+\infty)$内的任何 x 值所对应的 $u=x^4+3\geqslant 3$,都不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

另外,复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有更多的中间变量,如

$u、v、w、t$ 等，即可以通过多次复合得到一个函数.

对于复合函数，我们不但要知道复合的过程，也要掌握复合函数的分解. 这在微积分的学习中是非常重要的.

[例题 1.1] 分解下列复合函数

(1) $y=e^{\ln x}$；　　(2) $y=\cos\ln(1-2x)$；

(3) $y=a^{\cos\sqrt{x^2+2}}$；　　(4) $y=\ln\sqrt[3]{\cos x^2}$.

[解] (1) 函数 $y=e^{\ln x}$ 可分解为 $y=e^u$，$u=\ln x$；

(2) 函数 $y=\cos\ln(1-2x)$ 可分解为 $y=\cos u$，$u=\ln v$，$v=1-2x$；

(3) 函数 $y=a^{\cos\sqrt{x^2+2}}$ 可分解为 $y=a^u, u=\cos v, v=\sqrt{w}, w=x^2+2$；

(4) 函数 $y=\ln\sqrt[3]{\cos x^2}$ 可分解为：

$$y=u,\ u=\sqrt[3]{v}, v=\cos w, w=x^2.$$

四、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算得到的能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如 $y=2x+\cos x$，$y=\sqrt{x^2+\ln x}$，$y=e^{\sin x}+\dfrac{2x-1}{\tan x}$ 等都是初等函数.

显函数、分段函数、隐函数

一、显函数

函数关系用解析式 $y=f(x)$ 表示的称为显函数. 如 $y=x^2$，$y=2\sin x$ 等.

二、分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，函数不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示，这类函数称为分段函数. 例如：

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0,\end{cases}\quad y=\begin{cases}x+1, x<-1,\\ 1, -1\leqslant x<0,\\ x, x\geqslant 0,\end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数.

关于分段函数要注意几点：

(1)分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2)由于函数式子是用几个公式分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

(3)对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去.

(4)分段函数的定义域是各段定义域的并集.

三、隐函数

函数 y 与自变量 x 的对应规则用一个方程 $f(x, y)=0$ 表示的函数，称为隐函数.

例如 $x^2+y^2=1$ 就是一个隐函数，因为在这个方程中，函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$ 表示出来.

1.2 极限与连续

极限概念与运算

极限思想是数学发展的重要成就，它是整个微积分的基础，有着广泛的应用. 下面先通过案例分析来体会极限思想在解决实际问题中的重要作用.

[引例 1.2] 中国古代数学家庄周(约公元前 369～公元前 286 年)在《庄子・天下篇》中引述惠施的话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."这句话的意思是指一尺的木棒，第一天取它的一半，即 $\frac{1}{2}$ 尺；第二天再取剩下的一半，即 $\frac{1}{4}$ 尺；第三天再取第二天剩下的一半，即 $\frac{1}{8}$ 尺…我们可以一天天地取下去，而木棒是永远也取不完的. 我们将每天剩余的木棒长度写出来就是：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

n 可以无穷无尽地取值，但当 n 很大时，$\frac{1}{2^n}$ 会很小；当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0，我们称当 $n\to+\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}$ 的极限为 0. 记为：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

"∞"称为无穷大量，表示绝对值无限增大的量. 在 x 轴正向上的无穷大量称为正无穷大量，记为"$+\infty$"；在 x 轴负向上的无穷大量称为负无穷大量，记为"$-\infty$". $n\to+\infty$ 表示变量 n 取自然数，在 x 轴正向上无限增大的变化趋势.

[引例 1.3] 圆周长的计算.

以前学习过正多边形周长的计算. 现在通过圆内接正多边形的周长来计算圆周长.

如图 1-6，观察圆内接正多边形的周长与圆周长的关系. 内接正四边形的周长记为 L_4，内接正六边形的周长记为 L_6，…，内接正 n 边形的周长记为L_n…，随着圆内接正多边形边数的无限增加，多边形的周长无限接近圆的周长. 当多边形的边数无限增加，即 $n\to+\infty$时，多边形周长的变化趋势（极限）就是圆的周长.

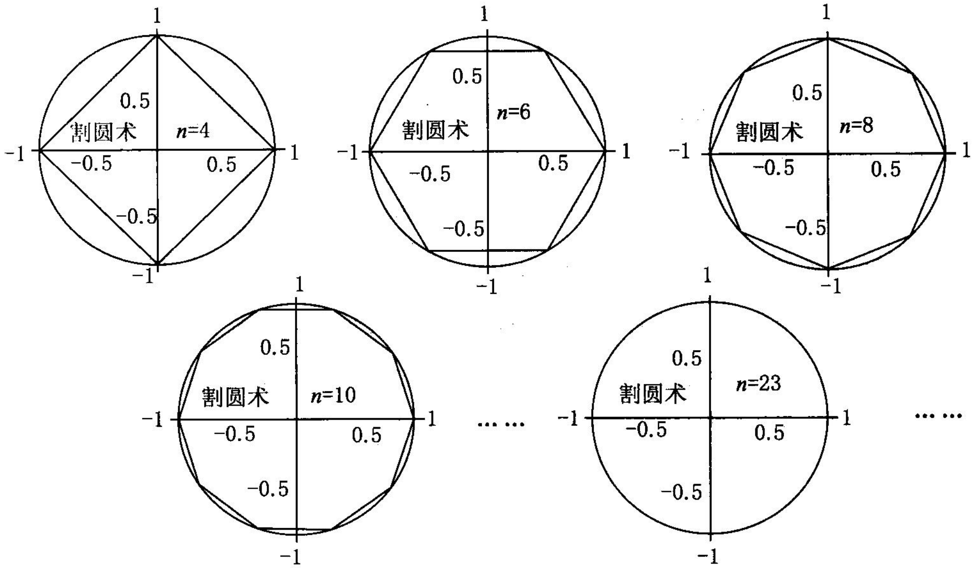

图 1-6

圆内接正多边形对圆周进行了分割，分点间用直线连接，并用直线段的长度去替代这段弧的长度，用多边形周长去逼近圆的周长. 这正是我国古代数学家刘徽的割圆术的思想.

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"——刘徽.

［引例 1.4］　连续复利函数问题.

设 P 为本金，i 为年利率，如果一年计息一次，那么年末本利和为：

$$P+Pi=P(1+i)$$

如果一年计算利息两次（每半年计算一次利息），每次利率为$\frac{i}{2}$，半年本利和为：

$$P+P\,\frac{i}{2}=P\left(1+\frac{i}{2}\right)$$

年末本利和为：

$$P(1+\frac{i}{2})+P(1+\frac{i}{2})\frac{i}{2}=P(1+\frac{i}{2})\ (1+\frac{i}{2})\ =P(1+\frac{i}{2})^2$$

类似地，一年计算三次利息时，年末本利和为 $P(1+\frac{i}{3})^3$，…，如果一年计息 m 次，则年末本利和为：

$$P(1+\frac{i}{m})^m$$

如果按连续复利方式(随时计算利息，一年计算无穷多次利息)计算利息，那么年末本利和该是多少呢？

[解] 已知一年计算 m 次利息，年末本利和为 $P(1+\frac{i}{m})^m$.

在连续复利方式下，一年计算无穷多次利息，其本利和就是当 $m\to\infty$ 时，$P(1+\frac{i}{m})^m$ 的变化趋势(极限)，这个极限结果也就是连续复利函数.

在本例中，通过已知结论(每年计息一次，两次，…，m 次)，利用极限(让计息次数趋于无穷大)得到了未知的连续复利函数.

[引例 1.5] 若汽车运行的路程 s 与时间 t 的关系为：

$$s=s(t)=t^2$$

试求汽车在 $t=1$ 时的瞬时速度.

[解] 对于匀速直线运动：

$$速度=\frac{路程}{时间}$$

我们知道，汽车的运行是变速的，下面我们来考察如何利用匀速运动去刻画变速运动.

考虑时间段 $[1,1+\Delta t]$，汽车在该时间段内运行的路程为：

$$\Delta s=s(1+\Delta t)-s(1)=2\Delta t+(\Delta t)^2$$

当 Δt 充分小时，汽车在该时间段内的运行可近似地视为匀速运动，其平均速度为：

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=2+\Delta t$$

当 Δt 无限接近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 无限地接近于瞬时速度 $v(1)$，所以 $v(1)=2$.

本例中，通过平均速度在时间间隔趋于零时的极限得到了瞬时速度，也是

利用极限解决实际问题的例子.

［引例 1.6］　曲边梯形的面积.

如图 1-7，研究平面直角坐标系下，由闭区间$[a,b]$上的连续曲线$y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的计算问题.

［解］　根据公式：

$$\text{矩形面积}=\text{底}\times\text{高}$$

解决了直边图形面积的计算问题.

对于曲边梯形不能直接应用上述公式. 但由于曲边上每点的高 $f(x)$在$[a,b]$上是连续变化的，在很小一段区间上它的变化很小. 基于这一认识，用平行于 y 轴的直线将曲边梯形分割成若干小曲边梯形. 对于每个小曲边梯形，由于底边很窄，其顶部曲线近似于直线，可近似地看作一个小矩形，其底边都在 x 轴上，而高为底边上任一点的函数值. 这些小矩形面积的和可作为曲边梯形面积的一个近似值. 显然，分割越细，近似程度越高. 依此，将曲边梯形无限细分，所有小矩形面积之和的极限就是曲边梯形面积的精确值(图 1-7).

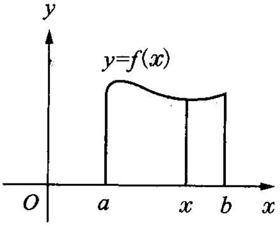

图 1-7

这也是利用极限思想解决问题的一个典型例子，这个问题的具体解答将在定积分的学习时给出.

极限的重要作用在于，对于用以前知识不能直接解决的许多问题，可以用已知知识构造数列或函数去逼近它，从而使问题得到解决.

一般地，按一定顺序排列的一串数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为数列，记为$\{a_n\}$，a_n 称为通项.

数列极限的一般定义如下：

［定义 1.4］　给定数列$\{a_n\}$，如果当 n 无限增大时，a_n 无限趋近某个固定的常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列$\{a_n\}$的极限是 A，记作：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$$

这时，也称数列$\{a_n\}$收敛. 相反，如果当 n 无限增大时，a_n 不能趋于任何固定的常数，则称数列$\{a_n\}$发散.

一般地，在研究数列极限时，把记号 $n\to+\infty$简记为 $n\to\infty$.

一、函数的极限

在函数 $y=f(x)$中，自变量 x 的变化趋势有六种：

①x 沿 x 轴正向无限增大，记为 $x\to+\infty$；