数学大观园

形形色色的计数

康庆德　编著

HE BEI JIAO YU CHU BAN SHE

SHU XUE DA GUAN YUAN

河北教育出版社

数学大观园

形形色色的计数

康庆德　编著

河 北 教 育 出 版 社

(冀)新登字006号

内 容 提 要

本书是一本组合数学的入门读物，内容包括初等排列组合，基本计数法则，二项式与多项式系数，递归关系，母函数，容斥原理，鸽笼原理以及一些重要的组合数和几何计数问题等。全书章节安排由浅入深，语言叙述通俗易懂，例题配备生动有趣，并注意了思路的分析与方法的探索。

本书可供具有中等文化程度、希望了解组合数学初步知识的读者阅读，也可作为初、高中学生的课外读物，并可供中学数学教师及大学数学系低年级学生参考。

数 学 大 观 园
形形色色的计数
康庆德 编著

河北教育出版社出版发行（石家庄市城乡街44号）
河北新华印刷一厂印刷

787×1092毫米 1/32 10.125印张 204,000字 1993年4月第1版
1993年4月第1次印刷 印数：1—5,000 定价：3.10元

ISBN 7-5434-1667-0/O·30

编写说明

数学在自然科学、工程技术以至人类文明各方面的重要作用早已是人所共知的。数学人才更是祖国四化建设各个岗位所不断需求的。尤其在今天，随着信息化时代的到来，数学和数学人才对社会发展的价值将会越来越突出地显现出来。1988和1991年，我国数学界在《廿一世纪中国数学展望》的两次会议上，响亮地提出了“让中国数学在廿一世纪率先赶上世界先进水平”的口号，树立了把我国尽快建设成为数学大国的奋斗目标。面对这一光荣使命，广大数学工作者既需瞄准前沿攻克数学高峰，又需勤恳耕耘搞好普及传带。应当说，从战略的眼光看，加强对青少年一代数学知识的传播，数学素养的培养，向他们介绍数学方法，展示数学进展是尤为重要和刻不容缓的。我们必须下大力气培养一大批真正地认识数学，了解数学，热爱数学并走向数学的廿一世纪人才.《数学大观园》丛书正是基于这一认识而编写出版的。

丛书首先面向的是广大中学生，当然对于其他读者也不无裨益。由于是初次尝试，再加上水平所限，丛书在选题、内容以至编排上难免会有缺点和错误，热切希望数学界同人与广大读者批评指正。

河北省数学会

1991年10月

序　言

计数就是数数，几乎从人类文明史的第一页开始就有了它.而随着人类各种需求的增多，计数的种类、原理和方法也一直在不断地丰富和发展. 今天，在人们的学习、工作和各方面实践中，正确而又迅捷地计数已成为一种经常性的需要.

这里，我们要介绍的是计数的组合学方法. 作为组合数学经典分支的组合计数，有很多深奥的方法和内容，本书只能就与中学内容密切相关的部分深入简出地给予概述.

一般来讲，组合数学研究的是“按照给定的条件安排某些事物”这样的问题. 要研究这种安排是否可以作出(即“存在性”)，这种安排有多少种可能方式(即“计数”)，以及怎样把它们作出来(即“构造”)和找到其中某种意义上最佳的(即“优化”)等等. 组合计数通常所涉及的是前两者，特别是第二方面.

计数理论与方法的最基础部分就是中学教材中所讲的排列组合问题. 由此出发，有各种类型的排列组合：线形的、圆形的；可以重复的、不可重复的；以及映射问题、分配问题等. 计数的手段也形形色色，有初等的枚举法，加法原则、乘法原则、一一对应原则，以及递归关系、母函数、容斥原理、反演方法等. 这些，我们都将通过较多的例题介绍给读者. 组合计数中还有一些重要的数(数列)，它们的研究集中体现了许多方法和手段，同时也对许多组合对象的计算起着

关键作用，我们也将摘取其初等部分奉献给大家。本书还专辟两章概述了鸽笼原理与几何计数方面兴味盎然的一些问题。

在深度安排上，本书既有供初中水平学生披阅的，亦有供高中程度同志学习的，既使对有一定数学素养的读者也有浏览价值。每章末均配有一些习题，除了供练习消化之用，还在内容和方法上对正文给予了补充。

限于水平，在选材、安排及论述上均可能有疏误之处，敬请读者指正。

康庆德

1991年10月

目　录

第一章　初等排列组合

§1 问题的基本提法

“排列”就是排成顺序，“组合”就是搭配分组，这是仅就字面意义来讲的。作为数学中固定的名词概念，它指的是计数问题中最简单的一些类型，应当还有更精确的描述：

从一个给定的n元集（即含有n个元素的集合）X中选出r个元素来作安排：

①若所选的r个元不许重复（即两两不同），且对它们的安排不需排序（即只是作为X的一个r元子集选出），则称这种安排为X的一个r-无重组合（或n元集的r-无重组合）。n元集的r-无重组合种数记为$C(n, r)$。

②若所选的r个元不许重复，但对它们的安排要有顺序（或是排成一条有头有尾的线，或是排成一个头尾衔接的圈，且规定有方向——比如顺时针），则称这种安排为X的一个线形（或圈形）的r-无重排列。n元集的线形（或圈形）r-无重排列的种数记为$P(n, r)$（或P_n^r）。

③若所选的r个元允许重复，且对它们的安排不需排序，则称这种安排为X的一个r-可重组合。可重组合中每个元重复的次数可以是限定的，也可以是不限定的。n元集的不限重数的r-可重组合种数记为$F(n, r)$。

④若所选的r个元允许重复（重数亦可有限定或不限定

之分)，且对它们的安排要有（线形或圈形的）顺序，则称这种安排为 X 的一个（线形或圈形的）r-可重排列. n元集的不限重数的线形（或圈形）r-可重排列的种数记为 $U(n, r)$（或 U_n^r）.

这些排列组合类型的主要差别在于所取元素是否可重复以及是否要排序（排成线形序还是圈形序）.它们都是计数中很重要的基本类型.

例 1.1 对 $n=4$，$r=3$，取 $X=\{a, b, c, d\}$，我们可以用枚举的方法（即逐一列出所有可能的安排）给出计数结果如下（其中无序集用{ }，有序集用( )）：

$C(4, 3)=4$——$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$；

$P(4, 3)=24$——上边每个无序 3 元集可线形有序化为六个（比如$\{a, b, c\}$变为 (a, b, c)，(a, c, b)，(b, a, c)，(b, c, a)，(c, a, b)，(c, b, a)），总共 24 个；

$P_4^3=8$——每个无序 3 元集可圈形有序化为两个，总共 $4\times 2=8$个. 比如，$\{a, b, c\}$变为图 1-1 的两个圈形排列.

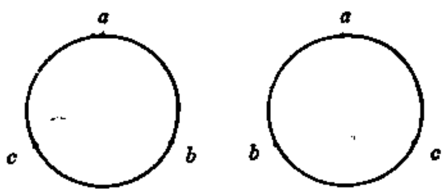

图 1-1

$F(4, 3)=20$——除去$C(4, 3)$ 所列的四个 3 元集外，还有形为$\{x, x, x\}$的四种（x 取a，b，c，d）及形为$\{x, x,$

$y\}$的 12 种 ($x\in X$, $y\in X-\{x\}$)，总共 20 种。

$U(4, 3)=64$——$F(4, 3)$ 所列 20 个无序 3 元集中，形为$\{x, x, x\}$的 4 个线性有序化为(x, x, x)，一个变一个；形为$\{x, x, y\}$的 12 个线性有序化为 (x, x, y)，(x, y, x) 及 (y, x, x)，一个变三个；形为$\{x, y, z\}$的 4 个($x\neq y\neq z\neq x\in X$)线性有序化为 $P(4, 3)$ 所列的 24 个。总共 64 个。

$U_4^3=24$——除去 P_4^3 所列 8 个圈形有序 3 元集外，还有图 1-2 所示的两类形式的圈形有序 3 元集

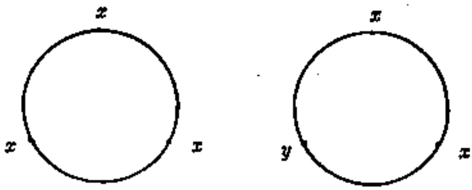

图 1-2

其中 $x\neq y\in X$，因此左边一类有 4 个，右边一类有 12 个，总共 $8+4+12=24$ 个。

§2 无重排列与组合

以下我们将在各章节中陆续介绍各种排列组合类型问题的计数方法。为了叙述方便，先说明一些数学符号和记法：

对于实数 x 和非负整数 n，记

$$[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

$$[x]^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

即由 x 开始依次递减(增) 1 的 m 个实数的连乘积，分别称它们为“x 下阶乘 n”和“x 上阶乘 n”。当 $n=0$ 时约定 $[x]_0=[x]^0=1$，而当 $x=n$ 时，“n 下阶乘 n”简称为“n 阶乘”，并记 $[n]_n=n!$

对于实数 x，以 $\lfloor x\rfloor$ 和 $\lceil x\rceil$ 分别表示“不超过 x 的最大的整数”和“不小于 x 的最小的整数”，分别称为“x 的下整数”和“x 的上整数”。比如，$\lfloor 3.2\rfloor=3$，$\lceil 4.25\rceil=5$，$\left\lfloor -1\frac{1}{3}\right\rfloor=-2$，$\lceil -\sqrt{5}\rceil=-2$。显然，当 x 为整数时 $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil=x$。

对于实数 x，以 $\{x\}$ 表示 x 的非负纯小数部分，亦即有 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$。而以 $\langle x\rangle$ 表示与 x 最接近的整数，亦即当 $\{x\}<\frac{1}{2}$ 时，$\langle x\rangle=\lfloor x\rfloor$；而当 $\{x\}>\frac{1}{2}$ 时，$\langle x\rangle=\lceil x\rceil$（采用记号 $\langle x\rangle$ 时，一般不考虑 $\{x\}=\frac{1}{2}$ 的情况）。例如 $\{2.05\}=0.05$，$\{-\sqrt{2}\}=2-\sqrt{2}$，$\langle 3.8\rangle=4$，$\left\langle-\frac{5}{4}\right\rangle=-1$。

无重组合与无重排列是中学数学中已经讲过的，通常它们就直接简称为组合与排列。

［公式 1］ $C(n,\ r)=\dfrac{[n]_r}{r!}$；

［公式 2］ $P(n,\ r)=[n]_r$；

［公式 3］ $P_n^r=\dfrac{[n]_r}{r}$。

这里的公式 1，2 已是熟知的，公式 3 可由公式 2 得到。因

为一个圈形无重排列从任一处断开后按原方向顺序即可得到一个线形无重排列，而从 r 个不同元处所断开的 r 个线形无重排列都不同，不同的圈形无重排列得到的线形无重排列当然也都不同。因此线性无重排列的总数目恰是圈形无重排列总数目的 r 倍。

例 1.2 国际象棋中车的走法和吃子法与中国象棋的车是一样的。国际象棋盘是 8×8 的格盘，显然在这样的盘中可以最多放上八个车使得彼此不致互相攻击。问这样的八个车有多少种不同的放法（棋盘的方位是固定的）？

解：这八个车必须分别放在不同的行和不同的列。设第 1、2、…8 行的车所在的列号依次为 i_1，i_2，…，i_8，那么 i_1，$i_2,\cdots,i_8$ 将恰好是列号 1 到 8 的一个全排列。反过来，任意给出列号 1 到 8 的一个排列，就可以得到八个车的一种不互相攻击的安排。因此，可能的不同安排种数即是集合 $X=\{1,2,\cdots,8\}$ 的一个 8－无重排列。按照公式 1，它就是 $P(8,8)=[8]_8=8!=40320$。

例 1.3 市区某处有一片 5×6 的网格状道路，小李的家和学校分别位于网格的左下和右上角（如图 1-3 所示，网格线间距离可以不等，但两组线都是互相平行的）。问小李到学校去的可走路径有多少条？

解：显然，为了不走冤枉路，小李出家门后每到一个路口只能选择如箭头所示的向右或向上走的路。比如粗实线所示的就是一条可走的路径。假设向右的各路段距离为 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，而向上各路段距离为 y_1，y_2，y_3，y_4，y_5。那末这条路径可以表示为 $y_1x_1x_2y_2y_3x_3x_4x_5y_4x_6y_5$。不难看出任何一

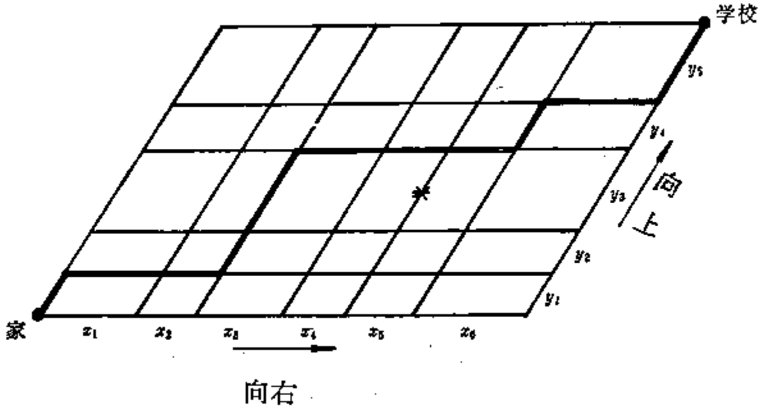

图 1-3

条可走的路径都可以表示为这样一个 11 元序列，包含全部的 $x_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 和 $y_j(1\leqslant j\leqslant 5)$ 各一次（因此所有可走路径的长度都一样），而且 x_i 与 y_j 出现的顺序都是按下标递增的。这样，实际上我们只需要在依序的 11 个位置中先确定出 5 个位置（供依序填入 y_1，y_2，…，y_5），再在剩下的位置中依序填入 x_1，…，x_6就可以得到一条可走路径。而每条可走路径也都可这样得到，于是，问题的实质即是由11个位置中选择 5 个位置这样一件简单的事情了。答案当然是$C(11, 5)=\frac{[11]_5}{5!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=462$ 条可走路径。

例 1.4 有多少个各位数字不同的三位正整数？

解：组成整数的数字是 0，1，2，…，9 这十个，从这个10元集合中选出 3 个有序地排成一线的方法数是 $P(10, 3)$。

但这样作出的有的不是三位正整数（当首位选为数字 0 时），需要把它们去掉。而首位选为 0 的方法数是 $P(9, 2)$（由1，2，…，9 中选出两个排在后两位），所以所求的三位正整数的个数应当是 $P(10, 3)-P(9, 2)=[10]_3-[9]_2=9\cdot8(10-1)=648$。

例 1.5 老师带着 7 位小朋友到游乐场去玩旋转木马，一共只有 5 个木马排在旋转台上，每个上只能坐一个人。问老师有多少种方式安排他们玩第一轮？

解： 这是 7 元集的圈形5－无重排列问题，答案是 $\frac{[7]_5}{5}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5}=504$种。

§3 可重排列与组合

我们首先要研究的是不限重数的可重组合与线形可重排列。至于限重数的各种情形则留待后边的章节中解决。

[公式 4] $F(n, r)=C(n+r-1, r)=\frac{[n]^r}{r!}$；

[公式 5] $U(n, r)=n^r$。

这两个公式的证明我们将在以后给出，这里只举例说明它们的应用。

例 1.6 口袋里有红、黄、兰三种玻璃球，用手从袋中一次抓出五个球来。若假定袋中每色球都至少有五个，问抓出来的球有多少种可能的搭配？

解： 这是最典型的不限重数的可重组合问题。此例中，

$n=3$，$r=5$，答案为 $F(3, 5)=C(7, 5)=\frac{[7]_5}{5!}=21$。可以枚举出全部情况验证这一结果。若用○，×，△分别表示红，黄，兰各色的玻璃球，则一次取出5个球的可能结果是：

5球同色有3种（即○○○○○，及○全换为×或△）

4球同色有6种（即○○○○×，○○○○△，××××○，××××△，△△△△○，△△△△×）

3球同色，另2球同色有6种（即○○○××，○○○△△，×××○○，×××△△，△△△○○，△△△××）

三色球全有的有6种（即○○○×△，×××○△，△△△○×，○○××△，○○△△×，××△△○）。

例1.7 不定方程 $x+y+z=5$ 有多少组非负整数解？

解：若以 x，y，z 分别代表红、黄、兰三色玻璃球，那末 $x+y+z=5$ 的一组非负整数解（比如 $x=3$，$y=1$，$z=1$）就相当于由三色球中抓出5个来的一种抓法（比如三红一黄一兰）。因此这个问题的解答与例1.6是完全一样的。我们也可们写出它的全部21组非负整数解（用 (x, y, z) 表示一组解）：

(5, 0, 0)，(0, 5, 0)，(0, 0, 5)，(4, 1, 0)，(4, 0, 1)，(1, 4, 0)，(0, 4, 1)，(1, 0, 4)，(0, 1, 4)，(3, 2, 0)，(3, 0, 2)，(2, 3, 0)，(0, 3, 2)，(2, 0, 3)，(0, 2, 3)，(3, 1, 1)，(1, 3, 1)，(1, 1, 3)，(2, 2, 1)，(2, 1, 2)，(1, 2, 2)。

例1.8 不定方程 $x+y+z=5$ 有多少组正整数解？

解：设 x，y，z 是 $x+y+z=5$ 的一组正整数解，令 $x=$