CAMBRIDGE

丘成桐主编

数学翻译丛书

完备开曲面上全曲率的几何

The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces

Katsuhiro Shiohama · Takashi Shioya · Minoru Tanaka 著

许洪伟 叶 斐 译

高等教育出版社
Higher Education Press

丘成桐主编
数学翻译丛书

完备开曲面上全曲率的几何

The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces

■ Katsuhiro Shiohama · Takashi Shioya · Minoru Tanaka 著
■ 许洪伟 叶 斐 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01–2007–5689 号

图书在版编目(CIP)数据

完备开曲面上全曲率的几何/(日)盐滨胜博,(日)盐谷隆,(日)田中实著;许洪伟,叶斐译.—北京:高等教育出版社,2009.11
(数学翻译丛书/丘成桐主编)
ISBN 978-7-04-027489-9

Ⅰ.完… Ⅱ.①盐…②盐…③田…④许…⑤叶…
Ⅲ.常曲率空间 Ⅳ.O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 162227 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2009年11月第1版
印　　张	16	**印　　次**	2009年11月第1次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	42.00元

物料号　27489-00

译者序

本书系统介绍了如何运用现代微分几何中的一些思想来处理和拓展积分几何中的经典结果, 是一本极富特色的微分几何著作。作者以测地线及相关理论为基本工具深入系统地介绍了完备非紧致曲面的全曲率几何, 其中许多漂亮的几何定理是第一次见诸书本。这里很多结果可以推广到更一般的几何空间中。

作者盐滨胜博教授、盐谷隆教授和田中实教授都是长期从事黎曼流形的曲率和拓扑研究的日本著名微分几何学家, 书中的很多重要内容是他们多年辛勤研究的结晶。1994—1995 年, 译者之一的许洪伟教授在日本九州大学数学系从事访问研究工作, 有机会结识本书的三位作者, 并了解到当时这本书的写作进展和书中部分有趣的结果。时隔多年, 我们有幸将其翻译成中文, 希望国内广大读者能从中受益。

承蒙浙江大学数学科学研究中心赵恩涛、顾娟如等同志对本书翻译稿作了仔细校对, 我们在此表示衷心感谢。

译　者

2009 年 4 月

前言

黎曼流形的曲率和拓扑是微分几何研究的核心内容。对这一领域的许多重要贡献可以追溯到 1935—1936 年 Cohn-Vossen 在 [19] 和 [20] 中的开创性工作。事实上，他对完备非紧致黎曼流形全曲率的研究包含了极为丰富的思想。他的想法启示着我们去研究黎曼流形的曲率和拓扑。

著名的 Gauss-Bonnet 定理指出紧致 2 维黎曼流形的全曲率是拓扑不变量。Cohn-Vossen 首先证明了有限单连通完备非紧致 2 维黎曼流形 M 的全曲率有上界 $2\pi\chi(M)$，其中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数。这一结果的许多精彩推论，其中之一是他证明了存在一条直线具有非负 Gauss 曲率的完备开 2 维黎曼流形的分裂定理。他也对这类流形建立了结构定理。他研究了这些 2 维流形上完备测地线的整体性态，并推动了极点的研究。对于存在全曲率的完备开曲面的 Bonnesen 型等周问题，其解析解情形首先由 Fiala [26] 做了研究，而 C^2 的情形则由 Hartman [34] 做了研究。这里 Cohn-Vossen 定理扮演了重要角色。无限连通完备开曲面的全曲率首先由 Huber 从复分析的观点进行了研究。Busemann 考虑了一个 G-曲面 X 上全曲率的概念，并指出用 X 的 Busemann 全超出数取代全曲率时，Cohn-Vossen 的结果应归结为 Busemann G-曲面。

将 Cohn-Vossen 的结果推广到高维情形用了三十多年的时间。它们是 Toponogov 分裂定理 [103]，具有正截曲率的完备非紧黎曼流形的结构定理 [30]，以及具有非负截曲率的完备非紧黎曼流形的结构定理 [17]。而 [69] 则讨论了具有非负截曲率的高维完备非紧黎曼流形的全曲率。

本书的目的在于研究完备非紧 2 维黎曼流形的全曲率的几何性质。对于这样的流形 M，其全曲率 $c(M)$ 不是拓扑不变量，而是依赖于黎曼度量的选取。因

此，我们可以考虑 $c(M)$ 所描述的 M 的某些几何性质。这些现象可以从 M 的射线质量的渐近性态看出，也可以从度量球及其边界上的等周不等式看出。并且，具有 Tits 度量的理想边界的大小可以由 $c(M)$ 和 M 的拓扑确定。黎曼平面的完备测地线的整体性态可以由 $c(M)$ 来控制。许多结果希望可以推广到带有 Busemann 全余量的完备非紧 Alexandrov 曲面上。

本书作为一本自编的讲义，加入了许多例子、插图和练习。对一年级的研究生很有帮助，读者可以快速地掌握研究黎曼几何所必需的工具。

本书的第一章介绍黎曼几何的预备知识。我们首先应用局部标架，介绍了 Levi-Civita 联络和曲率张量，然后应用向量场的概念对此进行简化。我们要感谢两本书，它们对本书的编写非常有用：第一章 §4 ~ §7 的讨论基于 Gromoll、Klingenberg 和 Meyer 的书 [29]；关于 Sasaki 度量的讨论基于 Sakai 的书 [73]。

第二章介绍 Cohn-Vossen 和 Huber 关于完备开曲面全曲率的经典结果。Cohn-Vossen 在 [19] 和 [20] 中的所有想法在这里都做了解释。我们讨论曲面上的紧致单纯复形的 Gauss-Bonnet 定理的方法，用相同的方法将 Gauss-Bonnet 定理推广到这类曲面上。

第三章指出具有全曲率的完备非紧致 2 维黎曼流形 M 的理想边界 $M(\infty)$ 可以通过 Ballmann、Gromov 和 Schroeder 在 [7] 中的方法得到，其中的讨论用到了 Hadamard 流形。我们通过附加一个具有 Tits 度量的理想边界来建立 M 的紧化 $M \cup M(\infty)$ 的 Gauss-Bonnet 定理。本章还对一些所围区域的全曲率比较小的特殊三角形给出了三角比较定理。进而，我们证明了具有有限全曲率的流形 M 的数乘极限是由 $M(\infty)$ 生成的具有公共顶点的平坦锥的集合，并讨论了 Busemann 函数的性态。

第四章讨论了带有 (或不带有) 全曲率的完备开曲面上圆的割迹的结构，介绍了测地平行圆上的经典 Hartman 定理，并详细讨论了度量圆上的拓扑结构。

第五章讨论了度量圆和光滑 Jordan 圆周围球体上的等周不等式，推广了经典的 Fiala-Hartman 定理，并考虑了无限连通的情形。

第六章讨论了由 M 上一点出发的射线的质量，并通过等周不等式讨论了射线质量的积分公式。

第七章给出了 von Mangoldt 的经典结果。同胚于平面的旋转曲面上极点的集合可以具体地描述出来：它或者由唯一的平凡极点组成，或者构成一个球心在顶点的闭球体。我们给出了一个旋转曲面具有多个极点的充分必要条件。规范旋转曲面 (如双叶双曲面) 的割迹也可以具体地确定下来。

第八章讨论了具有全曲率的黎曼平面 M 上完备测地线的整体性态。在一个紧致集 (靠近理想边界) 之外的完备测地线自交的个数可通过 M 的全曲率进行显式估计。这涉及曲线的 Whitney 正则同伦和旋转数。

作者要感谢 Takao Yamaguchi, Kunio Sugahara, Qing Ming Cheng, Kazuyuki Enomoto 和 Yoshiko Kubo, 他们阅读了初稿并提出了修改意见。同时感谢 Manabu Ohura 承担了初稿录入工作。

郑 重 声 明

策划编辑　王丽萍
责任编辑　李华英
封面设计　王凌波
责任绘图　吴文信
版式设计　马敬茹
责任校对　金　辉
责任印制　张泽业

目录

第一章　黎曼几何

本章介绍黎曼几何的基础工具. 在此我们假设读者已经掌握了流形的基本知识. 除非特别说明, 本章只讨论光滑流形. 局部标架的使用将为初学者带来方便. 张量运算用来介绍测地线、平行性、共变微分和黎曼曲率张量. 在 §1.1 至 §1.3 中, 除非特别说明, 将使用 Einstein 约定. 尽管如此, 这并不能方便进一步的讨论, 例如二阶变分公式或 Jacobi 场. 为了避免混淆, 我们将使用向量场和联络形式来讨论关于 Jaboci 场和共轭点的问题.

§1　黎 曼 度 量

假设 M 是 n 维连通光滑流形, (U,x) 是点 $p\in M$ 附近的局部标架. 点 $q\in U$ 满足 $x(q)=(x^1(q),\cdots,x^n(q))\in x(U)\subset\mathbb{R}^n$. M 在 p 点的切空间记作 T_pM 或 M_p, $TM:=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM$ 表示 M 的切丛. 记 $\pi:TM\to M$ 表示投影映射. 设 $\mathcal{X}(M)$ 和 $\mathcal{X}(U)$ 分别表示 M 和 U 上的光滑向量场空间, $C^\infty(M)$ 表示 M 上的光滑函数空间. 一个正定光滑对称双线性形式 $g:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ 定义了 M 上的一个黎曼度量. 度量 g 在 (U,x) 作如下的局部表示. 设 $X_i\in\mathcal{X}(U)$ 表示与第 i 条坐标曲线相切的第 i 个基向量场, 即 $X_i:=\mathrm{d}(x^{-1})(\partial/\partial x^i)$, 其中 $\partial/\partial x^i$ 是 $x(U)\subset\mathbb{R}^n$ 中平行于 $\mathbb{R}^n$ 的第 i 条坐标轴的典型向量场. 对每个 $q\in U$,T_qM 由 $X_1(q),\cdots,X_n(q)$ 张成. 若 $X,Y:U\to TU$ 是局部向量场, 表示为 $X=\sum\limits_i\phi^iX_i, Y=\sum\limits_j\psi^jX_j$, 并且 $g_{ij}:=g(X_i,X_j)$, 则

$$g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\phi^i\psi^j g_{ij}, \tag{1.1.1}$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}$, g_{ij} 是 U 上的光滑函数. 因而向量 $v\in T_pM$ 的长度 (或范数) $\|v\|$ 定义为 $\|v\|:=g_p(v,v)^{1/2}=(\sum g_{ij}(p)v^iv^j)^{1/2}$, 其中 $v:=\sum v^iX_i(p)$. 在 T_pM 中两个向量 u 和 v 的夹角 $\angle(u,v)$ 定义为

$$\cos\angle(u,v):=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}. \tag{1.1.2}$$

这里夹角 $\angle(u,v)$ 取值于 $[0,\pi]$, $\langle u,v\rangle=g_p(u,v)$.

T_pM 中由 $X_1(p),\cdots,X_n(p)$ 张成的平行 n 维体的体积由 $|X_1(p)\wedge\cdots\wedge X_n(p)|=(\det g_{ij}(p))^{1/2}$ 给出. 因此 M 的体积元 $\mathrm{d}M$ 表示为

$$\mathrm{d}M=(\det g_{ij})^{1/2}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n. \tag{1.1.3}$$

具有黎曼度量 g 的流形 M 称为黎曼流形, 记为 (M,g), 或简记为 M.

光滑曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 通常指存在一个开区间 $I\supset[\alpha,\beta]$, 使得 c 定义在 I 上, 并且在 I 上所有的点都是正则的. 分段光滑曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 是由有限多条光滑曲线构成的连续映射, 即存在有限多个点 $t_0=\alpha<t_1<\cdots<t_k=\beta$, 使得 $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 对每个 $i=0,1,\cdots,k-1$ 都是光滑曲线. 沿曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 的分段光滑的向量场 X 定义为分段光滑映射 $X:[\alpha,\beta]\longrightarrow T_cM$, 使得 $\pi\circ X(t)=c(t)$ 对所有的 $t\in[\alpha,\beta]$ 成立, 其中 $T_cM:=\bigcup_{t\in[\alpha,\beta]}T_{c(t)}M$. 曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 在局部坐标邻域中表示为 $x\circ c(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t)),t\in[\alpha,\beta]$. 它的速度向量场定义为

$$\dot c(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}X_i\circ c(t).$$

曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 的长度 $L(c)$ 定义为

$$L(c)=\int_\alpha^\beta\|\dot c\|\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(c(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t. \tag{1.1.4}$$

若对 $t\in[\alpha,\beta]$, $s(t)$ 是 c 的子弧 $c|_{[\alpha,t]}$ 的长度, 则 $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t=\|\dot c(t)\|>0$. 因此 $s(t)$ 具有反函数 $t=t(s)$. 于是 c 可由它的弧长 $s\in[0,L]$ 进行参数表示, 其中 $L=L(c)$ 是 c 的总长度. 由关系式 $\mathrm{d}s(t)=\|\dot c\|\,\mathrm{d}t$ 可以得到二阶微分形式

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

称之为 M 的线素.

§2 测 地 线

本节开始使用 Einstein 约定. 建立了 M 中曲线的长度之后, 我们来讨论一类具有特殊性质的曲线: 在端点相同的所有曲线中具有局部最小长度的曲线. 这可以视为局部最小性质. 这样的曲线即为测地线, 可以通过求解一个非线性二阶常微分方程, 即下面的 (1.2.1) 式得到, 其系数仅依赖于 g_{ij} 及其偏微分. 因此测地线可以定义为 (1.2.1) 式的解. 具有固定起始点 p 的所有解的集合与 T_pM 中一个关于原点的星形区域相对应. 因此在这里介绍这一点处的指数映射和单射半径.

定义 1.2.1 一条单位速度曲线 (即弧长参数曲线) $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 称为具有局部极小性质, 当且仅当对每个 $s\in[\alpha,\beta]$, 存在一个满足 $[s-\delta,s+\delta]\subset I$ 的正数 δ 和 $c([s-\delta,s+\delta])$ 的邻域 $\mathcal{N}$, 使得在 $\mathcal{N}$ 中连接 $c(s-\delta)$ 和 $c(s+\delta)$ 的所有曲线中, $c([s-\delta,s+\delta])$ 的长度最短.

定义 *Christoffel* 符号

$$\Gamma^i_{jk}:=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{lk}+\partial_k g_{jl}-\partial_l g_{jk}),$$

其中 $\partial_j g_{lk}:=\partial g_{lk}/\partial x^j$, (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵, 即

$$g^{il}g_{lk}=\delta^i_k.$$

这里 δ^i_j 是 *Kronecker* δ, 即

$$\delta^i_k=\begin{cases}1, & i=k;\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

据此我们证明

定理 1.2.1 若单位速度曲线 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow M$ 具有局部极小性质, 则 c 在坐标邻域 U 的局部表示

$$x\circ c(s)=(x^1(s),\cdots,x^n(s))$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0. \tag{1.2.1}$$

证明 由于只在局部进行讨论, 因此可以只讨论 $c([\alpha,\beta])$ 完全包含于坐标邻域 U 的情形. 记 $x\circ c(s)=(x^1(s),\cdots,x^n(s))$. 沿 $c:[\alpha,\beta]\longrightarrow U$ 的变分定义为 (分段光滑) 映射 $V:(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[\alpha,\beta]\longrightarrow U$, 使得对任意的 $s\in[\alpha,\beta]$, 有

$$V(0,s)=c(s),$$

并且 $V_\varepsilon := V(\varepsilon, s)$ 对每个 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 都是一条曲线 $V_\varepsilon : [\alpha, \beta] \longrightarrow U$. 若对每个 $(\varepsilon, s) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [\alpha, \beta]$ 有 $x \circ V(\varepsilon, s) = (x^1(\varepsilon, s), \cdots, x^n(\varepsilon, s))$, 则对应于 V 的变分向量场 $Y : [\alpha, \beta] \longrightarrow T_c M$ 可以表示为

$$Y(s) = \mathrm{d}V_{(0,s)}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \varepsilon}(0, s) X_i \circ c(s).$$

每条变分曲线 V_ε 的长度 $L(\varepsilon)$ 定义为

$$L(\varepsilon) := L(V_\varepsilon) = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{ij}\frac{\partial x^i(\varepsilon, s)}{\partial s}\frac{\partial x^j(\varepsilon, s)}{\partial s}}\mathrm{d}s.$$

因此, 取弧长参数 $0 \leqslant s \leqslant L =: L(c)$, 有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_0^L \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\sqrt{g_{ij}\frac{\partial x^i(\varepsilon, s)}{\partial s}\frac{\partial x^j(\varepsilon, s)}{\partial s}}\right|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left.\left((\partial_k g_{ij})\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s} + 2g_{ij}\frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial \varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\right|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于积分中的第二项可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(g_{kj}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon},$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L(0)}{\mathrm{d}\varepsilon} &= g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \varepsilon}\frac{\partial x^j}{\partial s}(0, s)\Big|_0^L \\ &\quad - \int_0^L \left.\left(\partial_l g_{kj}\frac{\partial x^l}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s} + g_{kj}\frac{\partial^2 x^j}{\partial s^2} - \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}\right|_{(0,s)}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $2[ij;k] := \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$, 则有 $\Gamma_{ij}^k g_{kl} = [ij;l]$, 并且以上积分可以重新表示为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}(\partial_l g_{kj} + \partial_j g_{kl} - \partial_k g_{lj})\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} + g_{kj}\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}s^2}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon} \\ &= g_{kj}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma_{lm}^j\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \varepsilon}.\end{aligned}$$

因此可以得到

$$L'(0) = g(\dot{c}, Y)\mid_0^L - \int_0^L g_{kj}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma_{lm}^j\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}s}\right)Y^k\mathrm{d}s. \tag{1.2.2}$$

由 c 的局部极小化性质, 对所有 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, 每个满足 $V(\varepsilon, 0) = c(0)$ 和 $V(\varepsilon, L) = c(L)$ 的变分 V, 有 $L'(0) = 0$. 因此由 $Y(0) = Y(L) = 0$ 可得 $g(\dot{c}, Y)\mid_0^L = 0$. 由变分向量场 Y 的任意性可知结论成立. 证毕.

现在来讨论微分方程 (1.2.1). 变换参数 $s=at$, 其中 $a>0$ 为常数, 则 (1.2.1) 变化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0.$$

测地线总可以用弧长的适当比例进行参数表示. 方程 (1.2.1) 等价于下面的一阶微分方程组

$$v^i(s)=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s},\quad \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}s}+\Gamma^i_{jk}v^jv^k=0. \tag{1.2.3}$$

由于 Γ^i_{jk} 是光滑函数, 以上微分方程组满足 Lipschitz 条件, 因此对于给定的初始条件, 方程具有唯一的解. 令 $p\in U$, $\xi\in T_pM$ 分别可以表示为 $x(p)=(p^1,\cdots,p^n)$, $\xi=\xi^iX_i(p)$. 则对于给定的初始条件 $x^i(0)=p^i$, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s(0)=\xi^i$, $i=1,\cdots,n$, 方程 (1.2.1) 具有唯一局部解. 若对于 $s\in[0,s_0),\gamma(s):=\gamma(p,\xi;s)$ 是满足 $\gamma(0):=\gamma(p,\xi;0)=p$ 和 $\dot\gamma(0)=\xi$ 的 (1.2.1) 的最大解, 则 $\gamma(p,\xi;t)=\gamma(p,a\xi;t/a)=\gamma(p,t\xi;1)$. 若令

$$\widetilde{M}_p:=\left\{u\in T_pM;\gamma(p,u;1)\ \text{有意义}\right\},$$

则 $\widetilde{M}_p$ 是 T_pM 中的区域, 并且是关于 T_pM 原点的星形区域.

定义 1.2.2 点 $p\in M$ 处的指数映射定义为在 $\widetilde{M}_p$ 上满足

$$\exp_p u:=\gamma(p,u;1)$$

的映射.

显然 $\exp_p$ 是光滑映射.

定理 1.2.2 存在原点附近的开集 $U_p\subset\widetilde{M}_p$, 使得 $\exp_p|_{U_p}\colon U_p\longrightarrow M$ 是一个嵌入. 特别地, 存在开集 $V_p\subset U_p$, 使得 $\exp_p V_p$ 中的任意两点可以由测地线连接.

证明 由定义可得 p 点的指数映射为

$$\mathrm{d}(\exp_p)|_o=E_n,$$

其中 E_n 是 $n\times n$ 的单位矩阵, $u=(u^1,\cdots,u^n)$. 因此在 T_pM 的原点附近可以找到满足条件的小邻域 U_p. 令 $\widetilde{TM}:=\bigcup\limits_{p\in M}\widetilde{M}_p$, $\phi:=(\pi,\exp):\widetilde{TM}\longrightarrow M\times M$. 以上的讨论说明在每个零截面 $o\in\widetilde{TM}$,

$$\mathrm{d}\phi\big|_o=\begin{pmatrix}E_n & E_n\\ 0 & E_n\end{pmatrix}.$$

因此可以找到零截面处的开集 $W\subset\widetilde{TM}$, 使得 $\phi|_W$ 是一个嵌入. 因此存在点 p 处的开集 $V_p\subset U_p$, 使得 $V_p\times V_p\subset\phi(W)$. 证毕.

引理 1.2.1 (Gauss 引理) 若 $u \in \widetilde{M}_p$, 且 $A \in T_uT_pM$ 正交于 u, 则

$$\langle \mathrm{d}(\exp_p)_u A, \mathrm{d}(\exp_p)_u u \rangle = 0.$$

证明 若 $\mathrm{d}(\exp_p)_u A = 0$ 则结论显然成立. 假设 $\mathrm{d}(\exp_p)_u A \neq 0$. 沿满足 $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = u / \parallel u \parallel$, 并且 $l = \parallel u \parallel$ 的测地线 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$, 选取测地变分 $V : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times [0, l] \longrightarrow M$, 使得

$$V(\varepsilon, t) := \exp_p t(u / \parallel u \parallel + \varepsilon A).$$

则对每个 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $V_\varepsilon : [0, l] \longrightarrow M$ 是长度为 $l\sqrt{1 + \varepsilon^2 \parallel A \parallel^2}$ 的测地线. 若 $Y(t) := \mathrm{d}V_{(0,t)}(\partial / \partial \varepsilon)$ 是关于 V 的变分向量场, 则 $Y(0) = 0$, $Y(l) = \mathrm{d}(\exp_p)_u A$, 由 (1.2.2) 式知

$$L'(0) = \langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \mid_0^l = 0.$$

证毕.

点 p 附近的测地极坐标系由嵌入映射 $\exp_p |_{U_p} : U_p \longrightarrow M$ 给出. 令 $B(0, r) := \{u \in \mathbb{R}^n ; \parallel u \parallel < r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := \{u \in \mathbb{R}^n ; \parallel u \parallel = 1\}$. 可以将它们自然的对应到 T_pM 中. 若 $(\theta^1, \cdots, \theta^{n-1})$ 是点 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 附近的局部坐标系, 则 $\exp_p |_{U_p}$ 可以局部表示为 $(\exp_p |_{U_p})^{-1}(q) = (r(q), \theta^1(q), \cdots, \theta^{n-1}(q)) \in U_p$. 记 $u^1 := r$, $u^2 := \theta^1, \cdots, u^n := \theta^{n-1}$, 由 Gauss 引理知度量 g 可以表示为

$$g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j = \mathrm{d}r^2 + h_{ab} \mathrm{d}\theta^a \mathrm{d}\theta^b, \tag{1.2.4}$$

其中 (h_{ab}) 是 $(n-1) \times (n-1)$ 阶正定矩阵.

定义 1.2.3 $\exp_p$ 在 p 点处的单射半径定义为

$$i(p) := \sup\{r > 0 ; \exp_p |_{B(0,r)} \text{ 是嵌入}\}.$$

引理 1.2.2 若 $r < i(p)$, 则 $\exp_p B(0, r)$ 中的每个点 q 可由唯一的测地线与点 p 相连接, 并且它是连接点 p 和点 q 的所有曲线中长度最短的. 特别地, 每条测地线都具有局部极小性质.

证明 由定理 1.2.2 可知, 在 $\exp_p B(0, i(p))$ 中存在唯一的连接点 p 和点 q 且长度为 $r(q)$ 的测地线. 令 $c : [0, 1] \longrightarrow \exp_p B(0, i(p))$ 是满足 $c(0) = p$, $c(1) = q$ 的一条 (逐段光滑) 曲线. 存在 c 的一个提升 $\psi : [0, 1] \longrightarrow B(0, i(p)) \subset T_pM$, 使得对所有 $t \in [0, 1]$, 有 $c(t) = \exp_p \circ \psi(t)$. 则这个提升可以表示为 $\psi(t) = (r(t), \theta^1(t), \cdots, \theta^{n-1}(t))$, 于是

$$\dot{c}(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{\psi(t)} \dot{\psi}(t) = \mathrm{d}(\exp_p)_{\psi(t)} \{\dot{r}\psi(t) / \parallel \psi \parallel + rA(t)\},$$