

溫 特 渥 斯

立體幾何學解法

魏 鏡 譯

商 務 印 書 館 發 行

溫 特 握 斯

法 解 學 何 幾 體 立

翻 鏡 譯
江蘇工業學院圖書館
藏 書 章

版 出 部 譯 編 會 學 科
行 發 館 書 印 務 商

中華民國元年六月初版
 中華民國二十四年六月國難後第一版

三六八五上

 版權所
 翻印必
 究*****

(50728)
 學適

解法一冊
 每冊定價大洋陸角
 外埠酌加運費

著者 G. A.

Wentworth

述者 魏

版者

學會編譯

發行者兼
 印刷者

發行所

上海河南路館
 商務印書館
 上海及各埠
 商務印書館

(本書校對者王養吾)

目 次

第六編	空間之線及平面		1
第七編	稜體 圓柱體 圓錐體		27
第八編	球體		77
第九編	圓錐截線		170

溫 特 渥 斯

立 體 幾 何 學

問 題 正 解



第 六 編

空 間 之 線 及 平 面



問題 604. 求空間距兩平行面等遠之點軌.

〔解〕 命 MN 及 PQ 爲任何
兩平行平面.

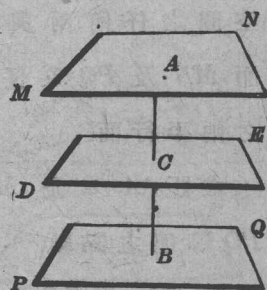
求距此二平面等遠之點軌.

(構圖) 於 MN 平面內之 A 點
作一垂線, 且引長之, 遇 PQ 平
面於 B .

平分 AB 於 C . 通過 C 作一 DE 平面, 爲 AB 之 $\perp$.

則 DE 平面, 卽爲所求之軌矣.

〔證〕 平面 $DE \parallel$ 平面 MN .



故平面 MN , DE 及 PQ 互相平行. 因知 DE 內之任一點. 其距 MN 平面之遠為 AC .

同理. DE 內之任一點. 其距 PQ 平面為 BC .

但 AC 等於 BC . 故在 DE 內之任一點. 其距 MN 及 PQ 等遠.

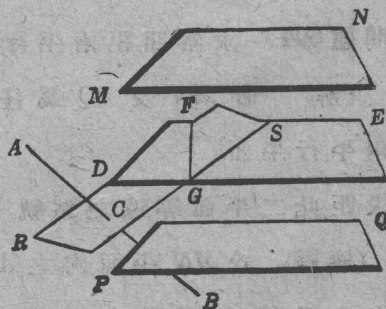
且一點之在 DE 之外者. 其距一平面必較近或較遠於他一平面.

由是知 DE 為所求之軌.

問題 605. 求空間距兩與點及兩與平面等遠之點軌.

[解] 命 A 及 B 為空間之任何兩與點. 而 MN 及 PQ 為任何之兩平行面.

求距 A , B 及 MN , PQ 等遠之點軌.



(構圖) 作 AB 且平分之於 C . 通過 C 作 RS 平面. 為 AB 之 $\perp$.

作 DE 平面, 平行 MN 及 PQ , 且適居於其中間.

命 FG 為 RS 及 DE 之交線則 FG 即為所求之軌矣.

〔證〕 每點之在 RS 平面內者其距 A 及 B 等遠。

§ 517

又每點之在 DE 平面內者其距 MN 及 PQ 等遠。

問題 604

則每點之在 RS 及 DE 之交線 FG 內者必距 A, B 及 MN, PQ 皆等遠矣。

故 FG 爲所求之軌。

〔討論〕 若 $AB \perp MN$ 平面時。則除 AB 之中點。適居乎 MN 及 PQ 之中間。而其軌爲 DE 平面外。別無他軌矣。

在他例內。其軌均爲直線。

問題 606. 求通過一與點而與一平面平行諸線之軌。

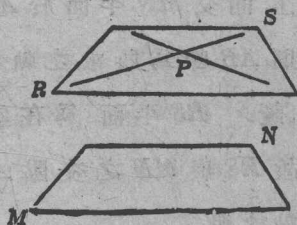
〔解〕 命 MN 爲與平面。而 P 爲與點。

求通過 P 點而平行 MN 之諸線之軌。

〔構圖〕 通過 P 點。作任何二線與 MN 平行。

通過此線作 RS 平面。

則 RS 卽爲所求之軌矣。



〔證〕 平面 $RS \parallel$ 平面 MN .

§ 533

能通過 P 點而與 MN 平行者祇有 RS 平面. § 532

故所求之軌為通過與點而與與平面平行之平面.

問題 607. 一與平面距不在此平面內之二與點等

遠. 求此面內諸點之軌.

〔解〕 命 MN 為與平面而 P 及 Q 為不在 MN 平面內之二與點.

試於 MN 平面內. 求出距 P 及 Q 等遠諸點之軌.

(構圖) 作 PQ 且通過其中點作 RS 平面. 為 PQ 之 $\perp$. 而交 MN 平面於 AB .

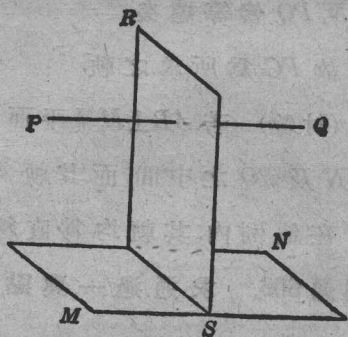
則 AB 即為所求之軌矣.

〔證〕 RS 平面. 為在空間距 P 及 Q 等遠諸點之軌.

故 RS 與 MN 之交點 AB . 為 MN 內之距 P 及 Q 等遠諸點之軌.

(討論) 若 $PQ \perp MN$ 時. 則不能求軌. §§ 527, 504

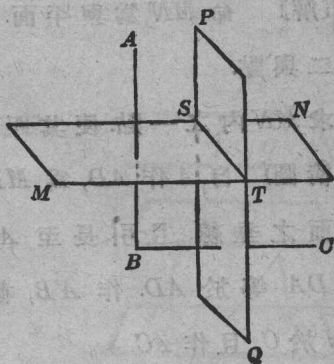
問題 608. 求空間之點. 距三與點之不在一直線內者等遠之軌.



〔解〕 命 A, B 及 C 爲不在一直線內之三與點。

求空間之點之距 A, B 及 C 等遠之軌。

(構圖) 作 AB 及 BC . 於 AB 之中點作一 MN 平面 $\perp AB$. 而於 BC 之中點作一 PQ 平面 $\perp BC$. 且命其交 MN 平面於 ST .



則 ST 卽爲所求之軌矣。

〔證〕 因 ST 在 MN 平面內. 則任一點之在 ST 內者. 其距 A 及 B 等遠. § 517

又 ST 亦在 PQ 平面內. 則任一點之在 ST 內者. 其距 B 及 C 亦等遠.

故 ST 內之任一點. 距 A, B 及 C 皆等遠.

則任一點之不在此線內者. 亦不在 MN 及 PQ 二平面中之一個內. 或兩箇內. 則其距 A, B 及 C 決不能等遠.

故 ST 爲所求之軌.

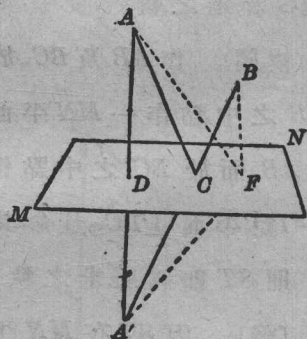
問題 609. 求平面內一點. 其距此平面一邊上兩與點之遠之和爲最小限.

〔解〕 命 MN 爲與平面而 A 及 B 爲同在 MN 一邊之二與點。

求 MN 內之一點，使其距 A 及 B 之遠之和爲最小限。

(構圖) 自 A 作 AD ，爲 MN 平面之垂線，且引長至 A' ，令 DA' 等於 AD 。作 $A'B$ ，截 MN 於 C ，且作 AC 。

則 $AC+BC$ 必小於自 A 及 B 至 MN 內任一他點所作二線之和。



〔證〕 命 F 爲 MN 平面

內之他一點，乃作 FB ， FA 及 FA' 。

今 $FA=FA'$ ，而 $CA=CA'$ 。

§ 517

但 $BF+FA' > BC+CA'$ 。

§ 49

$\therefore BF+FA > BC+CA$ 。

問題 610. AB 線遇三平行面於 A, E, B 三點，且 CD 遇同平面於 C, F, D 三點。若 $AE=6$ 寸， $BE=8$ 寸，而 $CD=12$ 寸。求 CF 及 FD 。

(法) $AE:EB=CF:FD$

§ 535

$\therefore AE+EB:EB=CF+FD:FD$

即 $AB : EB = CD : FD$

$$14 : 8 = 12 : FD$$

故 $FD = \frac{8 \times 12}{14}$

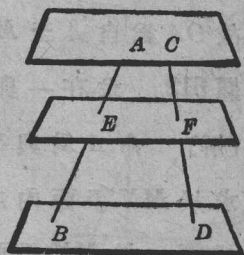
$$= \frac{96}{14} = 6\frac{6}{7}$$

$$CF = CD - FD$$

$$= 12 - 6\frac{6}{7} = 5\frac{1}{7}$$

$$\therefore CF = 5\frac{1}{7} \text{ 寸}$$

$$\text{而 } FD = 6\frac{6}{7} \text{ 寸}$$



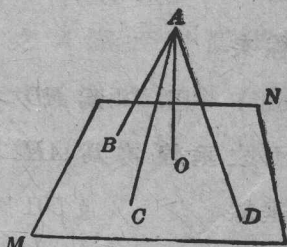
問題 611. 求自一外點至一與平面作一垂線。

〔解〕 命 MN 爲與平面而

A 爲平面外之一與點。

求自 A 至 MN 平面作一垂線。

(構圖) 自 A 作任何三等線至 MN 平面。如 AB, AC 及 AD 是也。



於 MN 內。求出距 B, C, D 等遠之一點 O 。乃作 AO 。

則 AO 即爲所求之垂線矣。

〔證〕 自 A 至 MN 所作之垂線之足。距等長之斜線

AB, AC 及 AD 等遠.

§ 515

今 MN 內其距 B, C, D 三點等遠者祇有 O 點. § 314

故 OA 爲自 A 至 MN 之垂線也.

✓ 問題 612. 求在一與平面之一與點上作一垂線.

[解] 命 A 爲與平面 MN 內之任一點.

求於 MN 平面內之 A 點作一垂線.

(構圖) 於 MN 平面內通過 A 作任一直線 BA .

通過 A 作一 ED 平面 $\perp BA$, 而截 MN 於 FAK .

於 ED 平面內作

$AH \perp FK$.

則 AH 卽爲所求之

垂線矣.

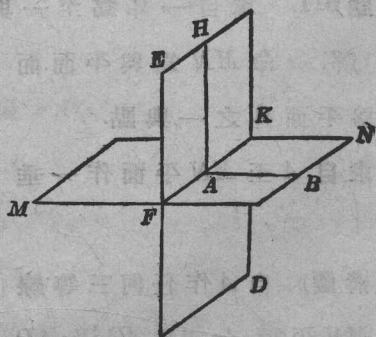
[證] 因 BA 爲 ED 平面之垂線. 亦爲 AH 之垂線. § 501

但 $AH \perp FK$. (構圖)

$\therefore AH \perp BA$ 及 FK 於 MN 平面之交點 A .

故 AH 爲 MN 平面內 A 點之垂線. § 507

問題 613. 自離平面 MN 四寸之 A 點作斜線 AC , 長 5 寸, 至平面. 乃繞自 A 至平面所作垂線 AB 而



旋. C 點所過之處成一平圓. 試求其面積.

(法) AB 爲 MN 平面之垂線. 故亦爲 BC 之垂線.

§ 501

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

§ 372

$$\therefore BC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$$

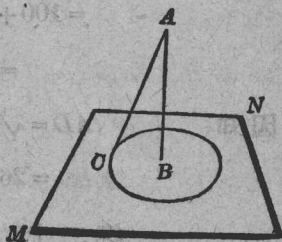
$$= \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= 3$$

$$\text{平圓面積} = \pi R^2$$

$$= 3.1416 \times 3^2$$

$$= 28.2744$$



答 28.2744 方寸.

問題 614. 自離平面 MN 8 寸之 A 點, 至平面作 AB 垂線. 乃以 B 爲圓心, 用 6 寸長之半徑, 於平面上作圓. 於圓周之 C 點作切線 CD , 長 24 寸. 求 AD 之長.

(法) 今

$$AB \perp BC.$$

§ 501

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

§ 371

$$= 8^2 + 6^2$$

$$= 100$$

但

$$AB \perp BC$$

§ 501

而 $BC \perp DC$ § 254

$\therefore AC \perp CD$ § 518

$\therefore \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ § 371

$$= 100 + 24^2$$

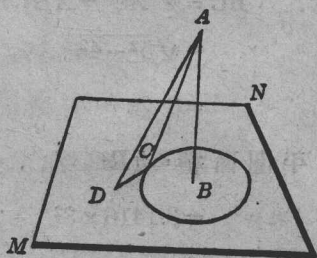
$$= 100 + 576$$

$$= 676$$

因知 $AD = \sqrt{676}$

$$= 26$$

答二十六寸。



問題 615. 一線至平面上

所作射影，等於本長。試言此線與此平面之位置關係如何。

〔解〕 命 CD

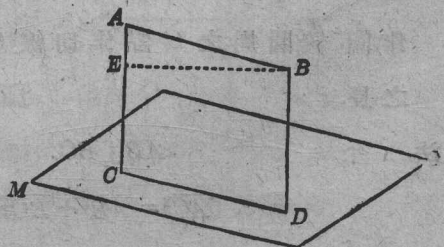
爲 AB 線至 MN

平面上所作之射

影。且 CD 等於

AB 。 $AB \parallel CD$ 。故

亦平行 MN 平面。



不然則 A 或 B 中將有一箇較他箇近於平面矣。

設

$$BD < AC$$

作 $BE \perp AC$. 則 BE 及 DC 當均為 AC 之垂線. 且相平行. § 104

$\therefore BE$ 及 DC 將相等. § 180

但 $BE < BA$ § 91

$\therefore DC < BA$

則與 DC 等於 BA 之題設相反.

$\therefore AB \parallel CD$. 亦平行 MN 平面.

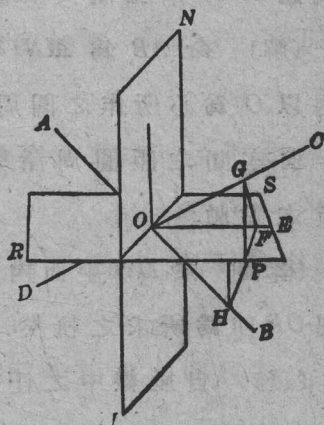
問題 616 求空間與二交線等遠之點軌.

[解] 命 AB 及 CD 為空間相交於 O 之二線.

求距 AB 及 CD 等遠之點軌.

(構圖) 於 AB 及 CD 之平面內, 作 OE 平分 $\angle COB$. 通過 OE 作 RS 平面, 為 AB 及 CD 之平面之 $\perp$.

則 RS 平面, 即為所求之軌矣.



[證] 自 RS 平面內之任一點 P , 作 $PF \perp OE$.

則 PF 亦為 AB 及 CD 之平面之 $\perp$. § 551

作 $FG \perp CD$, 而 $FH \perp AB$. 且作 PH 及 PG .

則 PG 及 PH , 各為 CD 及 AB 之垂線. § 518

因 $PF = PF$ 公邊

而 $FG = FH$ § 162

$\therefore$ 正 $\triangle PFG =$ 正 $\triangle PFH$ § 144

因知 $PG = PH$ § 128

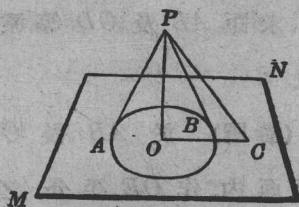
即 P 點距 CD 及 AB 等遠.

依同理可求得他一軌為通過 $\angle AOC$ 之平分線. 而 $\perp CD$ 及 AB 之平面之 MN 平面.

問題 617. 求空間與一圓周諸點等遠之點軌.

〔解〕 命 AB 為 MN 平面內以 O 為心所作之圓周.

求空間之距圓周諸點等遠之點軌.



(構圖) 於 MN 平面內之 O 點. 作一 OP 垂線. 則 OP 即為所求之軌矣.

〔證〕 自垂線中之任一點 P . 至圓周之任二點. 作 PA 及 PB . 且作 PC 至 MN 平面之任一點之不在圓周內者.

今 PA 及 PB 相等 § 514

而 $PA \neq PC$

§ 514

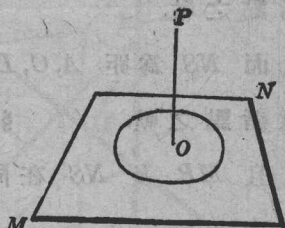
故 PO 爲所求之軌也。

問題 618. 求平面內與面外一點等遠之點軌。

〔解〕 命 P 爲面外點。而 MN

爲平面。

於 MN 平面內。求出距 P 點
等遠諸點之軌。



(構圖) 作 $PO \perp MN$ 平面。以 O 爲心。任意畫一圓周。

則此圓周卽爲所求之軌矣。

〔證〕 自 P 至此圓周之諸線等長。

§ 514

故此圓周爲所求之軌也。

〔討論〕 若自 P 作一垂線其垂線之足不能在 MN 平面內。則此題不能作。

問題 619. 求距四點之不在同平面內者等遠之一點。

〔解〕 命 A, B, C, D 爲不在同平面內之四與點。
求距 A, B, C, D 等遠之一點。

(構圖) 作 AB, AC, BC, AD, CD, BD 。

求出 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 之外切圓周之圓心 M 及 N 。