

全国中小学教师继续教育
核心课培训教材

QGZXXCJJSJ



XJYHXKPXJC

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

中学数学解题 研究

张同君 主编

东北师范大学出版社



中国中小学数学教育研究会
《中学数学教学》编辑部

中学数学解题 研究

王明君 主编

北京航空航天大学出版社

QGZXGGJSJ

XJYHXKPXJC

全国中小学教师继续教育
东北师范大学研究中心组织编写

中学数学解题 研究

张同君 主编

— 东北师范大学出版社

长春

图书在版编目 (CIP) 数据

中学数学解题研究/张同君主编. —长春: 东北师范大学出版社, 2002. 1

ISBN 7 - 5602 - 3006 - 7

I. 中... I. 张... II. 数学课—解题—研究—中学
N. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 094185 号

☐ 出版人: 贾国祥

☐ 责任编辑: 杨述春 ☐ 封面设计: 未 名

☐ 责任校对: 杨 波 ☐ 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号 (130024)

电话: 0431—5687213

传真: 0431—5691969

网址: <http://www.nnup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

东北师范大学印刷厂印刷

2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 13.75 字数: 334 千

印数: 0 001 — 5 000 册

定价: 16.50 元

序

当我们迈进 21 世纪的时候,我们会敏锐地觉察到,科学技术日新月异,知识经济初见端倪,综合国力的竞争日趋激烈。这种竞争说到底就是人才的竞争。人才培养靠教育,而教育的发展归根结底在于高素质师资的培育,主要依赖于教师教育。教师教育面临着严峻的挑战。

当前,我国正处于社会转型时期,从农业社会转向工业社会,从工业社会转向信息社会,即从传统社会转向现代化社会。国家的经济体制、经济增长方式也处于一个转轨时期。在社会转型、经济体制转轨、经济增长方式转型的情况下,历史赋予我们惟一的选择就是实施科教兴国战略。科教兴国,教育为本,发展教育当然师资要先行,这对教师教育提出了严峻的挑战。

《中国教育改革和发展纲要》明确提出了本世纪末大城市市区和经济发达地区要普及高中阶段教育,普及高中教育的关键是教师,所以,高师的培

养能力是供远远小于求。在这种情况下,对教师教育无论是数量的扩大,还是质量的提高,都提出了严峻的挑战。

整个中学教育的根本出发点,就是要实行全面提高学生素质的素质教育。而实施以培养创新和实践能力为核心的素质教育的根本,还是在于教师素质的提高。如果教师素质不提高,一切都无济于事。这对教师教育提出了严峻挑战。

其他的高等教育或专门教育发展需要高质量的生源,而高等教育和其他各种专门教育的生源都要由中等教育提供。这必然对中等教育提出了更新更高的要求,而中等教育质量的提高在于中小学教师素质的提高。从这个角度来讲,也对教师教育提出了严峻的挑战。

尤其应该提出的,我国 2010 年基础教育课程改革目标,构建新的基础教育课程体系,将突出培养学生的创新精神和实践能力,终身学习的愿望和能力,以及对自然和社会的责任感,为造就德、智、体、美等全面发展的社会主义事业建设者和接班人奠定基础。为达此目标,课程体系、结构、内容、形式、评价、管理都要发生重大变化,这对教师提出了新的、更高的要求。当然,对教师教育也提出了严峻的挑战。

当前我国教师现状严重不适应 21 世纪教育改革与发展需要,必须加强中小学教师继续教育工作,全面提高中小学教师素质。实施中小学教师继续教育,关键是教材建设,编写适应中小学教师继续教育的教材乃当务之急,为此,由教育部师范教育司

批准建立的、面向全国中小学教师继续教育东北师大研究中心在进行广泛调查研究和第一期试办中小学骨干教师国家级培训班的基础上,组织了一批了解基础教育的著名教授、专家编写出了一套适合中小学教师在职进修、提高的教材。这套教材囊括了:学科知识更新类,如学科前沿介绍、科学概念的形成过程、知识拓宽与应用、高观点下的基本知识与其他学科的联系与综合等;教师职业所需的有关知识和教育理论类,如邓小平理论,教师职业道德,教育与社会,基础教育的国际比较,教师教育等;教育实践类,如基本技术与方法,现代教育技术,教育科研等。

总之,中小学教师继续教育的课程是多类型、多规格、多层次、多渠道的动态结构,既有文字教材,又有音频、视频教材,还有网上资源。其类型和结构,将构成丰富多彩的教材体系。本套教材充分体现了从教师可持续发展的高度,把现代自然科学和人文社会发展科学的最新成果反映到课程和教材体系中来;用现代教育思想、理论、技术和新的学科知识发展动态指导教师教育实践,充分重视教师教学经验和实践基础,将优秀教师科研成果课程化,发展教师主体意识和创新精神。在教材编写中,努力做到三个层面的整合:第一个层面,根据学科自然发展与中小学教学实践要求,对专业学科知识进行整合;第二个层面,以本专业学科为载体,教育学科知识和专业学科知识的整合;第三个层面,以教学设计为重点,信息技术与教学内容、方法和手段的整合。

我们完全相信，这套教材的出版，会使中小学教师继续教育教材建设得到补充和完善，也将会推动中小学教师继续教育工作的深入开展。

通过这套书，假如能吸引更多的中小学教师投入到中小学教师继续教育中来，我想正是编者和本“研究中心”所乐于见到的，焉知就不会有起骨干作用的颗颗灿烂的基础教育的新星，从继续教育的行列中升起呢？

我们期待着，衷心热切地期待着。

张贵新

写于全国中小学教师继续教育

东北师大研究中心

—2001年5月

目
录

第一章 问题解决 / 1

第一节 问题解决——数学教育与数学学习的革命 / 1

第二节 问题与问题解决 / 4

2.1 什么是问题? / 4

2.2 问题与习题 / 6

2.3 问题解决 / 10

第三节 问题解决的心理分析 / 12

3.1 问题解决的心理机制 / 12

3.2 波利亚的解题四步骤与“怎样解题表” / 15

3.3 舍菲尔德的问题解决流程图 / 21

3.4 阿达玛的数学发明创造的过程 / 26

第四节 影响问题解决的要素 / 29

第五节 数学问题解决中的迁移 / 40

第六节 数学思想方法产生于数学问题解决 / 43

第二章 数学思想方法 / 52

第一节 猜证结合思想 / 56

1.1 基本观点与解题策略 / 56

1.2 证明推理与基本证明方法 / 63

1.3 综合法与分析法 / 68

1.4 比较法 / 76

1.5 穷举法、数学归纳法 / 91

1.6 反证法、举反例 / 101

1.7 数学猜想与基本猜想方法 / 112

1.8 特殊化与一般化 / 117

1.9 类比法 / 131

1.10 归纳法 / 142

习题一 / 157

第二节 分类与分步思想 / 161

2.1 基本观点与解题策略 / 161

2.2 分类讨论与反分类 / 163

2.3 分步解决与反分步 / 180

习题二 / 193

第三节 化归思想 / 196

3.1 基本观点与解题策略 / 196

3.2 等价转化法 / 197

3.3 不等价转化法 / 202

3.4 分合法 / 207

3.5 特殊化法 / 213

3.6 构造法 / 216

3.7 映射法 / 218

3.8 递归模式 / 221

习题三 / 226

第四节 数形结合思想 / 228

4.1 基本观点与解题策略 / 228

4.2 坐标法 / 229

4.3 向量法 / 237

4.4 复数法 / 242

4.5 图解法 / 246

习题四 / 253

第五节 函数与方程思想 / 255

5.1 基本观点与解题策略 / 255

5.2 笛卡儿模式 / 257

5.3 条件组模式 / 270

5.4 判别式法 / 279

5.5 基本函数模型方法 / 288

5.6 构造函数与方程 / 298

5.7 换元法 / 310

5.8 参数法 / 320

习题五 / 332

第三章 数学思想方法与数学竞赛 / 337

第一节 解题原理 / 337

1.1 抽屉原理 / 338

1.2 奇偶性原理 / 344

1.3 同余原理 / 349

1.4 排序原理 / 356

1.5 极端原理 / 360

习题一 / 365

第二节 解题方法 / 369

2.1 构造法 / 369

2.2 染色法 / 375

2.3 赋值法 / 380

2.4 逐步调整法 / 385

习题二 / 390



第四章 应用问题与开放问题 / 398

第一节 应用问题 / 398

1.1 数学模型方法 / 399

1.2 应用问题举例 / 401

习题一 / 414

第二节 开放问题 / 417

2.1 开放问题的特点 / 417

2.2 开放问题的求解举例 / 420

习题二 / 426

第一章

问题解决

问题是数学的心脏:问题解决是数学教育和数学学习的核心. 作为数学教育工作者, 如何理解“问题”、“问题解决”, 如何把握问题解决的心理学过程及其影响问题解决的要素, 这是我们必须关心的重要问题. 许多学者对此进行了大量的研究, 但观点各异. 只有全面理解才不至于以偏赅全, 才能正确地指导学生进行问题解决, 才能对数学教育工作产生积极的指导意义.

第一节 问题解决——当代数学教育与数学学习的革命

20 世纪 60 年代席卷大半个地球的“新数学”运动, 由于过分强调数学的抽象结构, 忽视数学为现实生活服务, 终以失败而告终. 70 年代又提出了“回归基础”, 但这一口号被认为是消极的. 为了提出美国数学教育的目标, 1980 年 4 月, 美国教师协会 (NCTM) 公布了一份指导 80 年代学校数学教育的纲领性文件《关于行动的议程》(An Agenda for Action—Recommendation for mathematics of the 1980). 该文件对 80 年代课程发展提出一些设想, 其中提出三条意见, 第一条就提出“必须把问题解决 (Problem Solving) 作为 80 年代中学数学的核心”, 认为直到下一个十年, 发展解题能力应该是数学教育工作者直接的奋斗目标. 在问题解决

方面的成绩如何,将是衡量个人和国家所具有的有效标准.它要求:数学课程围绕问题解决来组织;数学解题的定义和方法应予扩展,使之包括范围更宽的手段和方法;数学教师应创造更有利于问题解决的课堂气氛;应为所有的年级编制传授解题技巧的适当教材;80年代的教学科研应侧重于调查研究问题解决的本质,找到提高解题者能力的有效途径.同时,问题解决需要使用广泛的数学方法,传统的技能远远不够.因此提出十项基本技能:(1)解决问题能力;(2)把数学应用于日常生活的能力;(3)对结果合理性的觉察力;(4)近似估计能力;(5)合理计算能力;(6)几何结构;(7)度量;(8)阅读、解释和制作图表、框图的能力;(9)用数学作预报;(10)计算机文化.

1982年,英国数学教育的权威性文件《考克罗夫特(Cockcroft)报告》响应了美国提出的这一口号,明确提出:数学教育的核心是培养解决数学问题的能力,强调数学只有应用于各种情形才是有意义的.以后各国纷纷响应,至1984年第五届国际数学教育大会(ICME-5),“问题解决”已成为大会最主要的议题之一.1989年,日本在新修改的《学习指导要领》中,正式将“课题学习”的内容纳入其中,使“问题解决”的思想以法律的形式确定下来,日本的“课题学习”就是以“问题解决”为特征的数学课.现在,世界上几乎所有的国家都将提高学生问题解决的能力作为数学教育的主要目标之一,问题解决已成为国际数学教育研究的一个热点.

我国对“问题解决”的研究虽然起步较晚,但发展十分迅速,并受到数学教育界的普遍重视.近十年来,随着人们对“问题解决”认识的提高及观念的转变,对这一专题的研究正在由议论转为探究,由现象描述转为实质探索.作为这一转变过程的具体体现,各种升学考试中逐步地出现“应用问题”、“开放性问题”的考题,使“问题解决”进入了我国的教学阵地,并受到数学教育

北
同
学

界的普遍重视。

那么，怎样培养学生的创新精神和实践能力呢？

我国与其他一些国家的中学数学教育比较，具有重视基础知识教学，基本技能训练，数学计算、推理和空间想像能力的培养等显著特点，因而我国中学生的数学基本功比较扎实。然而，改革开放也使我国数学教育界看到了我国中学数学教学的不足。其中比较突出的两个问题是：学生应用数学的意识不强，创造能力较弱。学生往往不能把实际问题抽象成数学问题，不能把所学的数学知识应用到实际问题中去，对所学数学知识的实际背景了解不多；学生往往能够机械地模仿一些常见数学问题的解法，而当面临一种新的问题时却缺少办法，对于诸如观察、分析、归纳、类比、抽象、概括、猜想等发现问题、解决问题的科学思维方法了解不够。为了解决这些问题，一些学者认为，最有效途径是在中学数学教育中体现问题解决的思想。

问题解决作为学习数学课程的一个“实践性”环节，能使学习者深入地理解数学概念，全面系统地掌握数学知识，进一步领会、掌握各种定理、公式和法则，提高自己的技能技巧，巩固所学的知识。同时通过解决探索性问题、应用问题、开放性问题、竞赛问题等丰富的数学活动，可使学生会如何根据现实世界中的数学事实、现象、关系等，经过观察、比较、分析、综合、抽象、概括等步骤，提出科学的猜想和假设，即学会如何运用已有的数学理论和方法去解决一些复杂的数学问题，从而提高分析问题、解决问题的能力，学生从实践中会品尝到解决数学问题的喜怒哀乐，领略到数学的真谛，磨练自己的意志。所以，“问题解决”和过去单纯地应用定理、公式解题不同，它要求学生以积极探索的态度，综合运用已有的数学基础知识、基本技能和能力，创造性地解决来自数学课或实际生活和生产实际中的问题，在和困难作斗争中探究数学真理，使自身的创新精神和实践能力得到提高。

为什么重要

意义

21 世纪的劳动者将是善于吸取新思想,能适应各种变化,会解决各种复杂问题的一代人.国家的富强乃至企业的兴衰,无不取决于对科学知识的学习、掌握及其创造性的开拓和应用.创造能力并非与生俱有,必须通过有意识的学习和训练来形成.学校教育必须重视培养学生应用所学的知识进行创造性工作的能力.“问题解决”反映了这种时代的要求,符合社会和科学发展的需要,在英才教育和大众教育中都具有强大的生命力.

■ 第二节 问题与问题解决

2.1 什么是问题

美国的数学家哈尔莫斯 (P. R. Halmos) 认为,问题是数学的心脏.他说:“数学究竟是由什么组成的?公理吗?定理吗?证明吗?概念?定义?公式?方法?诚然,没有这些组成的部分,数学就不存在,这些都是数学的必要组成部分,但是,它们中的任何一个都不是数学的心脏,这个观点是站得住脚的,数学家存在的重要理由就是解题,因此,数学的真正的组成部分是问题和解.”

数学的历史发展印证了“问题是数学的心脏”.1900年,希尔伯特 (D. Hilbert) 在巴黎国际数学家代表大会上发表《数学问题》的著名演讲之后,数学问题明显成为激励数学家推进数学发展的一种原动力.希尔伯特在他的演讲中说:“只有一门科学分支能提出大量的问题时候,它才充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或终止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题.”

对于学校数学来说,问题也是它的核心.波利亚 (G. Polya) 强调指出:“中学数学教学首要的任务就是加强解题训练.”他有一句名言:“掌握数学就意味着善于解题.”

那么,什么是问题呢?

1988年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告指出：“一个（数学）问题是一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境。”

日本哲学家岩奇允倒和物理学家宫原将平说：“问题是基于一定科学知识的完成、积累，为解决某种未知而提出的任务。”

三轮辰郎在《问题解决能力的育成》中认为：问题是指那些对于解答者来说还没有具备直接的解决方法，对于解答者构成认识上挑战的这样一种局面。

我国学者张奠宙在《数学教育学》中认为：所谓有问题，是指一个人面临着某种他所谓认识的东西，而对于这种东西他又不能仅仅应用某种典范的解法去解答。

波利亚在《数学的发现》中指出：“所谓‘问题’，就意味着要去找适当的行动，以达到一个可见而不能立即可即的目标。”波利亚并从教学的角度对问题作了如下的分类：

（1）鼻子底下就有现成的法则。这类问题只要机械地应用某个法则就可能作出来，而所说的法则又是刚刚讲过的或讨论过的。

（2）带有选择性的应用。这类问题可以应用课堂上先前讲过的某一法则或算法获得解决；然而，究竟应当用哪一条法则或算法却不是一目了然，对此需要学生本人作判断。

（3）组合的选择。这类问题需要学生对课堂上讲过的两个或更多的法则或例子进行组合。

（4）接近研究水平。这类问题不仅要对法则或例子进行组合，而且需要更多的创造性，即如必要的改进，对于合情推理的成功应用。

还可以列出一些提法，但是不管有多少种不同的叙述，都离不开这样一个本质：“问题”反映了现有水平与客观需要的矛盾。从系统论的角度看，如果对某人来说，一个系统的全部元素、元素的性质和元素间的关系，都是他所知道的，那么这个系统对于