升學必備

全國各大學
入學數學試題詳解

編演者　王喬南

校訂者　高佩玉

北平科學社印行

社址　北平後門外前海北河沿十八號

著者 王喬南識

民國二十二年二月二十日

例　言

一、本書集國內十一大學二十餘學院及其附屬高中之算學試題計二百五十九題,分別詳解,圖形俱備,為預備會考或升學之中學生,及指導升學之中學算學教員之必備參考用書.

二.民國二十一年中央,師大,青島各校俱未招生,而金陵大學因係測驗性質不願披露試題.故此十一校已佔全國大學之三分之二,稱為全國,當無不可.

三.各校次序係按各校試題收到之先後而定者.

四.凡題之難解者均註明出處,詳示應看某書某頁.以備讀者明瞭解法之原理.

五.凡題之重見者均不重作,以省篇幅.

六.用器畫與算學關係綦切.尤以投影畫為然.投考工科不可不習.故亦列入.

七.各校數學試題多中西文並列,或祇用英文,本書為普遍讀者及印刷一律起見,僅錄其中文題目;其純為英文者則先譯而後解之.

八.是書之成吾友李宇涵君之助力頗多.付梓有日,書此誌謝.

九.為減少錯誤計,故將抄本影印.但著者業務繁重,餘暇甚少,書內錯誤或當不免.深望海內博學之士詳加教正,無任感謝!

附表說明

一、為明瞭各大學入學考試關於算學各科質量之分配起見，列比較表於後，讀者欲考何校應先知其考試標準何輕何重，何去何從，今年雖不必同於去年，然亦不至有大出入也。

二、表中一格有列二數者，上數表示題數，下面括弧內之數示正題內包括之小題之個數，如 5(4)，謂五題內之一尚包有四道小題。

三、凡正題在十題以上者均分兩次所考者，惟燕京除外，因燕京為選作法，其計分標準與他校異，可參閱該校說明。

四、各大學有在京，滬，津，平各處分別招生者，此表所列示其一處試題之數量。

五、此表分類有不盡妥者，如清華理學院有一解析問題幾完全以大代數演算，實則解析題也。

民國二十一年度

國內各大學考試算學題數比較表

（附用器畫）

校名 / 題數 / 學科	清華		北平大學		交通大學			河北工院			河北女師院	北洋		北京		中法		河南		廈門大學			燕京
	文理初試	理學院	醫工農初試	工學院	科學院	管理學院	唐山工院	高工科	高職科	大學本科	國家，史藝	高中	本科	文學院	理學院	文學院	理學院	文科	理科	高中	文科	理科	文理選修
算術											1												
小代數	3		5			3		4	4		1	3 (2)		2	4	3		3	3	6 (2)			5 (8)
幾何	3		3			2		4	4		1	3	1	4	4	3	2	3	3	6	3	2	6 (4)
三角	2		2		2	3		4				2	2	2	2		1					2	2 (4)
大代數		1 (2)		5	5 (4)		7 (4)			4 (2)			1	2	4		2				3 (2)	2	
解析		3 (8)		5	5 (10)		7			4 (2)			4		3				5			2	2 (5)
微積分										4 (5)							1 (2)						
用器畫				5						4													

二十一年度全國大學入學考試算學題詳解

目　次

國立清華大學

初試：代數，幾何，平面三角

各系一年級

1. 解下列方程式：　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

解．此方程之右邊為整數，故其實根必為整數，(若其根為分數則左邊為四個假分數之積等於整數矣，不合理，)且左邊之因子必為連續之四個整數．

因　$120=2.3.4.5=(-5)(-4)(-3)(-2)$.

與左邊之因子比較之，知其

$$x+1=2,\ x+2=3,\ x+3=4,\ x+4=5;$$

或 $$x+1=-5,\ x+2=-4,\ x+3=-3,\ x+4=-2.$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } -6.$$

復展開原方程式，

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+24=120$$

$$x^4+10x^3+35x^2+50x-96=0.$$

既知 x 之二根 1 及 -6，故可以 $(x-1)(x+6)$ 除之，

得 $$x^2+5x+16=0.$$

$$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{2}$$

故 x 之四根為 $1,-6,\frac{1}{2}(-5+\sqrt{-39}),\frac{1}{2}(-5-\sqrt{-39})$.

2. 已知直角三角形三邊之和為36尺,面積為54方尺.求此三角形各邊之長.

解. 設x, y為此直角三角形之二腰,則其斜邊$=\sqrt{x^2+y^2}$,

面積$=\frac{1}{2}xy$.

故得次之方程. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=36 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \frac{1}{2}xy=54 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解(1), $\sqrt{x^2+y^2}=36-x-y$,

自乘, $x^2+y^2=1296-72x-72y+2xy+x^2+y^2$.

簡之且代入(2)式之值,

$72x+72y-2\times2\times54=1296$,

簡之,得 $x+y=21$

$y=21-x$ (3),

代入(2)得 $x(21-x)=2\times54$

$x^2-21x+108=0$

$(x-9)(x-12)=0$.

因 $x-9=0$, $\therefore x=9$,

$x-12=0$, $\therefore x=12$.

代入(3). 得 $y=12$ 或 9.

故此直角三角形之二腰為9尺及12尺,其斜邊$=36-9-12=15$尺.

3. 試證明

(i) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$

證　令 $m = a^x,\quad n = a^y$

則 $x = \log_a m,\ y = \log_a n.$

因　$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$

$\therefore \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n.$

(ii) $\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_a m.$

證　令　$m = a^x,$

則　$\log_a m = x,$

因　$\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}},$

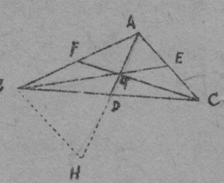
$\therefore\ \log_a \sqrt[n]{m} = \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \log_a m.$

4, 三角形三中線之和小於三邊之和而大於其和之半，證明之。

設$\triangle ABC$之中線為 $AD, BE, CF,$

求證(i) $AD+BE+CF < AB+BC+CA,$

(ii) $AD+BE+CF > \frac{1}{2}(AB+BC+CA).$



證(i) 此三中線必交於一公點G.

延長 AD 至 H，令 $DH = AD$，連 BH，

則　$BH = AC$.

令　$AH < AB + BH$

∴　$2AD < AB + AC$

同理　$2BE < AB + BC$

$2CF < BC + AC$，

加之，$2(AD+BE+CF) < 2(AB+BC+AC)$

故　$AD+BE+CF < AB+BC+AC$.

(ii) ∵ $AG+GE > AE$，$(\frac{1}{2}AC)$

$BG+GF > BF$，$(\frac{1}{2}AB)$

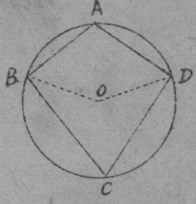
$CG+GD > CD$，$(\frac{1}{2}BC)$

加之，$(AG+GD)+(BG+GE)+(CG+GF) > AE+BF+CD$

即　$AD+BE+CF > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

Q.E.D.

5. 圓內切四邊形兩對角之和，等於他兩對角之和.



證明之.

設 $ABCD$ 為圓內切四邊形.

求證 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

證. $\angle A = \frac{1}{2}$ 優 $\angle BOD$（圓周角等於其夾弧之圓心角之半）

$\angle C = \frac{1}{2}$ 若 $\angle BOD$,

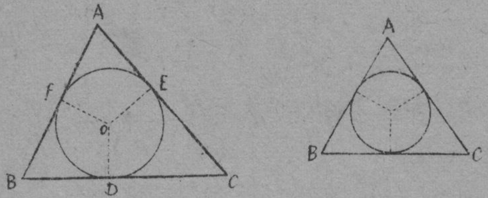
∴ $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 4\, rt \angle s = 2\, rt \angle s$.

同理 $\angle B + \angle D = 2\, rt \angle s$.

∴ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. Q.E.D.

6. 求作已知圓之外切三角形,與已知三角形相似.

設○為已知圓 ABC 為已知△,求作⊙.O之外切△,令與



△ABC相似.

作法. 於⊙O內,作半徑OE, OF, OD,令$\angle EOF$為A之補角;$\angle FOD$為B之補角.

在D, E, F各點作該圓之切線,得△A'B'C'即所求之三角形. Q.E.F.

證. 於四邊形A'OFE內,$\angle s$ F, E均為直角,故A'為$\angle FOE$之補角.

∴ $\angle A' = \angle A$.

同理 $\angle B' = \angle B$, (因而 $\angle C' = \angle C$)

$\therefore$ $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 相似. Q.E.D.

7. 解下列三角方程式: $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

解. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x$

自乘, $(\sqrt{1-\sin^2 x})^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x)^2$

$1 - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} \sin x + \sin^2 x$

$2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - \frac{1}{2} = 0$

$4 \sin^2 x - 2\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$

$\therefore \sin x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+16}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 \pm \sqrt{3})$

$\because \{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\}^2 = 2(1+2\sqrt{3}+3) = 4(2+\sqrt{3})$

今 $4(2+\sqrt{3}) < 16$

故 $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) < 1$, 故二根皆合理,

而 $x = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{4}(1 \pm \sqrt{3})$.

8. 試證明: $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{82}} + \cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{\pi}{4}$.

證. 令 $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{82}} = \alpha$,

則 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{82}}$,

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{82}} = \frac{9}{\sqrt{82}}$.

又令 $\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\beta$.

則 $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{41}}$,

$$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{25}{41}}=\frac{4}{\sqrt{41}},$$

今 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{\sqrt{82}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}+\frac{9}{\sqrt{82}}\cdot\frac{4}{\sqrt{41}}$$ ※

$$=\frac{5}{41\sqrt{2}}+\frac{36}{41\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

即 $\sin\frac{1}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{\pi}{4}$.

覆試　高中代數解析幾何.

各系一年級及化學系二年級同用.

證 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ 及 $a_3x+b_3y+c_3=0$ 三直線所成三角形之面積等於

$\frac{\Delta^2}{2C_1C_2C_3}$, 內 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$, $C_1=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$, 餘類推.

解. 設令 L_1, L_2, L_3 為原題三直線,

L_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$

L_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$

L_3：$a_3x+b_3y+c_3=0$

又設三線之交點各為$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$.

則 $\triangle P_1P_2P_3$之面積$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)\cdots(1)$

令P_1之坐標為L_1,L_2兩方程之解答，即

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{C_1}; \\[2ex] y_1=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{C_1}. \end{cases}$$

同法
$$x_2=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{C_2},\quad y_2=\frac{a_3c_2-a_2c_3}{C_2};$$

$$x_3=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{C_3},\quad y_3=\frac{a_1c_3-a_3c_1}{C_3}.$$

以此諸值代入(1)，故得

$$\begin{aligned}\text{面積}=\frac{1}{2}\Big\{&\frac{b_1c_2-b_2c_1}{C_1}\cdot\frac{a_3c_2-a_2c_3}{C_2}-\frac{b_2c_3-b_3c_2}{C_2}\cdot\frac{a_2c_1-a_1c_2}{C_1}\\ &+\frac{b_2c_3-b_3c_2}{C_2}\cdot\frac{a_1c_3-a_3c_1}{C_3}-\frac{b_3c_1-b_1c_3}{C_3}\cdot\frac{a_3c_2-a_2c_3}{C_2}\\ &+\frac{b_3c_1-b_1c_3}{C_3}\cdot\frac{a_2c_1-a_1c_2}{C_1}-\frac{b_1c_2-b_2c_1}{C_1}\cdot\frac{a_1c_3-a_3c_1}{C_3}\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\frac{1}{2}\Big\{&\frac{c_2c_3(a_1b_2-a_2b_1)+c_1c_2(a_2b_3-a_3b_2)+c_2^2(a_3b_1-a_1b_3)}{C_1C_2}\\ &+\frac{c_2c_3(a_3b_1-a_1b_3)+c_1c_3(a_2b_3-a_3b_2)+c_3^2(a_1b_2-a_1b_2)}{C_2C_3}\end{aligned}$$

$$+\frac{c_1c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_1c_3(a_1b_2-a_2b_1)+c_1^2(a_2b_3-a_3b_2)}{c_3c_1}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2c_1c_2c_3}\Big\{c_2c_3(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_1-a_1b_3)+c_1c_2(a_2b_3-a_3b_2)(a_3b_1-a_1b_3)+c_2^2(a_3b_1-a_1b_3)^2$$

$$+c_2c_3(a_3b_1-a_1b_3)(a_1b_2-a_2b_1)+c_1c_3(a_2b_3-a_3b_2)(a_1b_2-a_2b_1)+c_3^2(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$+c_1c_2(a_3b_1-a_1b_3)(a_2b_3-a_3b_2)+c_1c_3(a_1b_2-a_2b_1)(a_2b_3-a_3b_2)+c_1^2(a_2b_3-a_3b_2)^2\Big\}$$

$$=\frac{1}{2c_1c_2c_3}\Big\{\Sigma c_1^2(a_2b_3-a_3b_2)^2+2c_1c_2(a_2b_3-a_3b_2)(a_3b_1-a_1b_3)+2c_2c_3(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_1-a_1b_3)$$

$$+2c_3c_1(a_1b_2-a_2b_1)(a_2b_3-a_3b_2)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2c_1c_2c_3}\Big\{\Sigma a_1^2b_2^2c_3^2+\Sigma a_3^2b_2^2c_1^2+2\Sigma a_1a_2b_2b_3c_3c_1+2\Sigma a_1a_2b_3b_1c_2c_3$$

$$-2\Sigma a_1a_2b_1b_2c_3^2-2\Sigma a_1a_2b_3^2c_1c_2-2\Sigma a_1^2b_2b_3c_2c_3\Big\}$$

$$=\frac{1}{2c_1c_2c_3}(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)^2$$

$$=\frac{1}{2c_1c_2c_3}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}^2=\frac{\Delta^2}{2c_1c_2c_3}.$$

2、 已知$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$雙曲線上一點$P(x_1,y_1)$及其心$O$,(a)求與$OP$共軛之通徑(daimeter),(b)求共軛通徑與共軛雙曲線之交點,(c)證一雙共軛通徑必在同象限內;(d)證在共軛通徑各端所作切線構成之平行四邊形之面積等於常數.

解(a) 設m為OP之斜度及m'為其共軛通徑之斜度,

則 $$mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

令 $m=\frac{y_1}{x_1}$，$\therefore m'=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

(b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之共軛雙曲線為

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

其共軛通徑之方程為 $y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$.

以此二方程作聯立解之得其二交點為

$$\left(\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right) 及 \left(-\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1\right).$$

(c) 因一雙共軛通徑之斜度關係式為

$$m\,m'=\frac{b^2}{a^2}.$$

其積為正，m, m' 必為同號，故一雙共軛通徑在同一象限.

又通徑 OP 之端點為 (x_1, y_1) 及 $(-x_1, -y_1)$ 在第一及第三象限(或第二及第四象限).

故一雙共軛通徑在同象限內.

證(d) 設雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 通徑 POP' 之端點為

(x_1, y_1)，$(-x_1, -y_1)$；

目由(b)已知其共軛通徑之端點為 $\left(\frac{ay_1}{b}, \frac{bx_1}{a}\right)$ 及 $\left(-\frac{ay_1}{b}, -\frac{bx_1}{a}\right)$.