ABRAHAM COHEN, PH.D. 著

微分方程初步

鄭 桐 蓀 譯

世 界 書 局 印 行

中華民國二十一年十月印刷
中華民國二十一年十月出版

微分方程初步（全一冊）

（每冊定價銀二元）
（外埠酌加郵費匯費）

著者 Abraham Cohen
譯者 鄭桐蓀
出版者 世界書局
印刷兼發行者 上海大連灣路 世界書局
發行所 上海四馬路暨各省 世界書局

500

譯者誌言

柯痕此書,出版已二十餘年,而行銷益廣,蓋其說理明顯,實有便於初學之處.譯述之意卽在介紹其適用爲課本.若欲作專門之攻讀,則自有深博之專書足供研究,固非範圍只限於初步之課本,所能任此.所譯版本係修正本,與初版比,除數處小有更動外,其餘絕少差別.

爲欲使譯本可與原書有並充課本之用,故排印頁次悉照原書.爲使讀者閱覽起見,正文之中甚少插入西字,遇需要時則加入角註,而載其西文於頁底.惟所引參考之人名書名,則概不加以翻譯,蓋能讀參考書者,西文程度已充足,固無賴乎再爲翻譯也.原書在小節上,本非絕無可以改善之處,茲因爲保全原書式樣並守忠實譯職起見,譯本排印格式,一律悉遵原書之舊.其有必須解釋之處,則亦用角註以補充其義.有時亦或就角註引述原文以資學者之參讀.

書後添增錄一門,其中所述,或錄引別法以便會通,或別論新題以補未備.作參考用可,作教材用亦可.

初次付印,訛誤難免.倘荷大雅指正,則感甚幸甚.

一九三一年譯者誌於淸華園

原　　序

本書係就著者多年教授之所講編輯而成.所教學生有屬工程系者,有屬物理學系者,亦有屬純理數學或物理數學系者,其類別之所包大致如此.

本書之目的乃在使學者對於多數習見之方程能應用解題之原則與方法.列法雖多,但在已習微積分一年之學生,應即可以領悟而無困難;且應足使其對於許多缺少關係之方法,得有融會貫通之了解.著者之意,蓋頗思將此書成爲種參考手書而同時不失其爲教科書之功用.文中時插按語或註語,蓋不欲使一問題之討論受間斷之影響也.同時此種註案所舉當可與學者以不少之興趣與利益.此外尙有許多歷史方面之註,於學者亦應有益.

如課程所包括,因受時間與目的之限制而範圍稍狹,則12,15.17,22,28,(小字部份),33,38－40,46－48,66－69(例題除外),70,71,73,75,78,80,81,諸節不妨從略,此中多節,本應稍爲完備之課程而設也.取捨標準可視時間與需要而加以酌定.

著者對於許多方程之可用初淺方法解出者,頗時注意於其方程式樣之歸類及其解題方法之減少.爲令學者得鈎要之益計,於每章之末均附一本章提要,全書之末又附一總提要.

幾何及物理方面應用之題,在本文及習題之中引用頗不少.

多數習題雖曾見用於他書,然新製之題亦復不少.且題之選擇皆以能指示微分方程與積分之種種解法爲目的.已演之題於積分之求法指實多.緣積分表雖應備用,學者固亦宜具不必依賴此表之能力也.題之解案形式多屬簡易,然涵義却每具有深趣.校對一端嘗極注重,倘仍見誤,希用者不吝見告爲盼.

用待定係數法以求常係數線性方程之特別積分,據著者所知,採用之備當以此書爲始.

序

偏微分方程之問題太多,故本書僅擇要討論數端.至其範圍所包括,著者頗望於讀此書者之程度所需,足用有餘.

著者原頗思將李氏理論[1]加入一章,實經許多考慮而始棄初衷付之缺如.著者今意頗思將此重要問題專撰一書,以應學界需要.

著者對於麥省工業專門學校胡慈教授,阿哀惡滑大學韋爾特教授及意利諾大學湯孫教授[2],頗感其種種建議之惠,謹於簡端鄭重致謝.

一九〇六年十月馬來倫州,鮑底麻城,約翰霍布金大學柯痕亞伯拉罕[3]識.

---

1 Lie Theory.

2 Professor F. S. Woods of the Massachusetts Institute of Technology, Professor L. G. Weld of the University of Iowa and Professor E. J. Townsend of the University of Illinois.

3 Abraham Cohan, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

目 錄

第一章

微分方程及其解案 Differential Equations and their Solutions

第二章

一級一次之微分方程 Differential Equations of the First Order and First Degree

第三章

應用 Applications

第四章

一級高次之微分方程 Differential Equations of the First Order and Higher Degree than the First.

第五章

異解 Singular Solutions

第六章

全微分方程 Total Differential Equations

第七章

常係數線性微分方程 Linear Differential Equations with Constants Coefficients

第八章

二級線性微分方程 Linear Differential Equations of the Second Order

第九章

解一級以上高級方程之雜法 Miscellaneous Methods for Solving Equations of Higher Order than the First

第十章

聯立方程組 Systems of Simultaneous Equations

第十一章

以級數求積分法 Integration in Series

第 十 二 章

偏微分方程 Partial Differential Equations

第 十 三 章

一級偏微分方程 Partial Differential Equations of the First Order

第 十 四 章

高級偏微分方程 Partial Differential Equations of Higher Order than the First

附 錄 Notes

增　　錄

目　　錄

微分方程

第一章

微分方程及其解案[1]

1. **微分方程. 常微分方程與偏微分[2]方程. 級與次[3].** 凡包含微分或微係數[4]之方程皆曰微分方程.下列其七例也.

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=o,$$

$$(2)\qquad \left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=x^2+y^2,$$

$$(3)\qquad y-x\frac{dy}{dx}+3\frac{dx}{dy}=o,$$

$$(4)\qquad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-k=o,$$

$$(5)\qquad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=o,$$

$$(6)\qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+zx\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=xyz,$$

$$(7)\qquad x^2y^3dx+x^3y^2dy=o.$$

凡方程祇含一自變數者(故亦祇含一尋常微係數),稱曰常微分方程.上列(1),(2),(3),(4),(7)皆屬此類.

如方程中自變數不止一個,因之而式中含有偏微分者,稱曰偏微分方程.上列(5),(6)屬於此類.

---

1 解案 solutions, 亦曰答案,曰解,曰答.

2 偏微分 partial differential equation

3 級與次 Order, Degree.

4 微係數 differential coeffieient, 即 derivative. 後者譯稱紀數,引數,導微函數,導數等等.本書爲避用後者譯名起見,時以微係數代之.如不礙文義,有時竟以微分代之.

方程之級,視其所含微係數之等級而定.例如上列(2),(3),(5),(7)諸式皆屬一級,(1),(4),(6)諸式則屬二級.

方程之次,視其化爲有理式且已化去分數式時所含高級微係數之次數而定.上列(1),(5),(6),(7)諸式皆屬一次,(2),(3),(4)諸式則屬二次.

2. 方程之解案. 凡一種自變數與應變數[1]之關係能適合[2]一微分方程式者,即爲後式之解案.例如 $y=\sin ax$ 爲(1)之解案,$x^2+y^2=\frac{1}{k^2}$ 爲(4)之解案,$z=x+y$ 爲(5)之解案,$x^2y^3=1$ 爲(7)之解案〔學者宜取各解一一自驗之〕.

吾人於此,須注意一微分方程之解案,爲式可多至無限.例如 $y=2\sin ax$, $y=6\cos ax$, $y=A\cos ax+B\sin ax$(A 與 B 爲兩個任意常數)皆易證其爲(1)之解案.按吾人由推求積分經驗,已有求出積分後加一常數之習慣,故謂 $\cos x$ 之積分爲 $\sin x+c$. 今按積分之推求本不過解答微分方程之一特例.由前而言,吾人謂 $\int\cos x\,dx$ 者乃意欲推求一函數(即 $\sin x+c$),其微係數須恰爲 $\cos x$. 由後而言,吾人稱 $\frac{dy}{dx}=\cos x$ 之解爲 $y=\sin x+c$,內中 c 爲一任意常數.*

凡解中常數可隨意予以一值者,謂之任意常數[3].例如 $y=\sin x+c$ 恆爲

*按在積分式中,常數之發現均屬加式[4].但在微分方程解案中,常數與變數之關係錯綜不一,其法無限.

1 應變數 dependent variable, 亦曰因變數,曰倚變數.

2 適合 satisfy, 亦曰滿足.

3 任意常數 arbitray constant, 亦曰隨意常數.

4 加式 additive.

$\frac{dy}{dx}=\cos x$ 之解,不論 c 之所含爲何值也.又如 $y=A\cos ax+B\sin ax$ 恆爲 (1) 之解,不問 A 與 B 之值爲何物也.凡似此之常數謂之任意常數.反之,(1) 中之 a 不得謂之任意常數.緣在 (1) 式之中,a 之值雖可隨意指定,但既定之後值即不能復變,且 a 在解中除此值之外,不能再取他值.

是故就微分方程而論*,解案之中可有一個或多個之任意常數.雖然,此常數之至多數究應爲若干數耶,吾人應先討論之.

3. 由根式[1]求微分方程. 譬由微分求積分係一逆推之問題,故由微分方程以求解案亦屬一逆推問題,今之所求蓋爲一組變數的關係(內中或含一個或含多個任意常數)可適合於所論之微分方程.爲使此問題明確起見,茲將所論之微分方程指定爲上述變數關係所適合之最低級微分方程而又不含任意常數之一類.例如 $y=A\cos x$ (內 A 係一任意常數)可適合於 $\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$, 亦合於 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, 及 $\frac{d^3y}{dx^3}-y\tan x=0$ 等式,但吾人祇以 $\frac{dy}{dx}+y\tan x=0$ 爲 $y=A\cos x$ 之微分方程.

又如 $y=A\cos x+B\sin x$ (A 與 B 爲任意常數)適合於 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 及 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=0$ 等式,但吾人祇取前式加以討論.

由此推論,凡遇含有 n 個任意常數†之關係,吾人應先求其微

* 關於偏微分方程之解案,當於第十二章中詳論之.

† 此 n 個任意常數須各爲主要的,換言之,須是不能以少於 n 數之常數代替者.例如在 $y=x+a+b$ 中,主要常數實祇一個,因 $a+b$ 實僅等於一個常數也.又如 ae^{x+b} 實與 ae^x 同類,其中任意常數實祇一個.

1 根式 primitive, 亦曰原式.