

ABRAHAM COHEN, PH.D. 著

微分方程初步

鄭 桐 蓀 譯

世界書局印行

中華民國二十一年十月出版



微分方程初步 (全二冊)

(每冊定價銀二元)

(外埠酌加郵費匯費)

著者 Abraham Cohen

譯者 鄭桐蓀

出版者 世界書局

印刷兼發行者 上海大連灣世界書局

發行所 上海四馬路世界書局

500

譯者誌言

柯痕此書，出版已二十餘年，而行銷益廣，蓋其說理明顯，實有便於初學之處。譯述之意即在介紹其適用為課本。若欲作專門之攻讀，則自有深博之專書足供研究，固非範圍只限於初步之課本，所能任此。所譯版本係修正本，與初版比，除數處小有更動外，其餘絕少差別。

為欲使譯本可與原書有並充課本之用，故排印頁次悉照原書。為使讀者閱覽起見，正文之中甚少插入西字，遇需要時則加入角註，而載其西文於頁底。惟所引參考之人名書名，則概不加以翻譯，蓋能讀參考書者，西文程度已充足，固無賴乎再為翻譯也。原書在小節上，本非絕無可以改善之處，茲因為保全原書式樣並守忠實譯職起見，譯本排印格式，一律悉遵原書之舊。其有必須解釋之處，則亦用角註以補充其義。有時亦或就角註引述原文以資學者之參讀。

書後添增錄一門，其中所述，或錄引別法以便會通，或別論新題以補未備。作參考用可，作教材用亦可。

初次付印，訛誤難免。倘荷大雅指正，則感甚幸甚。

一九三一年譯者誌於清華園

原 序

本書係就著者多年教授之所講編輯而成。所教學生有屬工程系者，有屬物理學系者，亦有屬純理數學或物理數學系者，其類別之所包大致如此。

本書之目的乃在使學者對於多數習見之方程能應用解題之原則與方法。列法雖多，但在已習微積分一年之學生，應即可以領悟而無困難；且應足使其對於許多缺少關係之方法，得有融會貫通之了解。著者之意，蓋頗思將此書成爲種參考手書而同時不失其爲教科書之功用。文中時插按語或註語，蓋不欲使一問題之討論受間斷之影響也。同時此種註案所舉當可與學者以不少之興趣與利益。此外尙有許多歷史方面之註，於學者亦應有益。

如課程所包括，因受時間與目的之限制而範圍稍狹，則12, 15, 17, 22, 28, (小字部份), 33, 38-40, 46-48, 66-69 (例題除外), 70, 71, 73, 75, 78, 80, 81, 諸節不妨從略，此中多節，本應稍爲完備之課程而設也。取捨標準可視時間與需要而加以酌定。

著者對於許多方程之可用初淺方法解出者，頗時注意於其方程式樣之歸類及其解題方法之減少。爲令學者得鈞要之益計，於每章之末均附一本章提要，全書之末又附一總提要。

幾何及物理方面應用之題，在本文及習題之中引用頗不少。多數習題雖曾見用於他書，然新製之題亦復不少。且題之選擇皆以能指示微分方程與積分之種種解法為目的。已演之題於積分之求法指實多。緣積分表雖應備用，學者固亦宜具不必依賴此表之能力也。題之解案形式多屬簡易，然涵義却每具有深趣。校對一端嘗極注重，倘仍見誤，希用者不吝見告為盼。

用待定係數法以求常係數線性方程之特別積分，據著者所知，採用之備當以此書為始。

序

偏微分方程之問題太多,故本書僅擇要討論數端,至其範圍所包括,著者頗望於讀此書者之程度所需,足用有餘。

著者原頗思將李氏理論¹加入一章,實經許多考慮而始棄初衷付之缺如,著者今意頗思將此重要問題專撰一書,以應學界需要。

著者對於麥省工業專門學校胡慈教授,阿哀惡滑大學韋爾特教授及意利諾大學湯孫教授²,頗感其種種建議之惠,謹於簡端鄭重致謝。

一九〇六年十月馬來倫州,鮑底麻城,約翰霍布金大學柯痕亞伯拉罕³識。

1 Lie Theory.

2 Professor F. S. Woods of the Massachusetts Institute of Technology, Professor L. G. Weld of the University of Iowa and Professor E. J. Townsend of the University of Illinois.

3 Abraham Cohan, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

目 錄

第 一 章

微分方程及其解案 Differential Equations and their Solutions

節次	頁次
1. 微分方程. 常微分方程與偏微分方程. 級與次. Differential Equation. Ordinary and Partial. Order, Degree.....	1
2. 方程之解案 Solution of an Equation.....	2
3. 由根式求微分方程 Derivation of a Differential Equation from its Primitive	3
4. 通解, 特解 General, Particular Solution	5

第 二 章

一級一次之微分方程 Differential Equations of the First Order and First Degree

5. 正合微分方程. 積分因子. Exact Differential Equation. Integrating Factor.....	7
6. 解題通則 General Plan of Solution.....	9
7. 方程爲正合之條件 Condition that Equation be Exact	9
8. 正合微分方程 Exact Differential Equations	11
9. 分離變數及可離變數 Variables Separated or Separable.....	13
10. 齊次方程 Homogeneous Equations	14

11. 方程中 M 及 N 爲線性式而非齊次者 Equations in which M and N are Linear but not Homogeneous	16
12. 方程式爲 $y f_1(xy) dx + x f_2(xy) dy = 0$. Equations of the form $y f_1(xy) dx + x f_2(xy) dy = 0$	17
13. 一級線式方程 Linear Equations of the Order	18
14. 方程之可化爲線性式者 Equations Reducible to Linear Equations.....	20
15. 方程式之爲 $x^r y^s (my dx + nxdy) + x^p y^q (\mu y dx + vxdy) = 0$ Equations of the Form $x^r y^s (my dx + nxdy) + x^p y^q (\mu y dx + vxdy) = 0$	22
16. 積分因子之可由視察而得者 Integrating Factors by Inspection.	23
17. 積分因子之可由他法求得者 Other Forms for which Integrating Factors can be Found.	24
18. 變數之變換 Transformation of Variables.....	26
19. 本章提要 Summary	28

第 三 章

應用 Applications

20. 曲線羣之微分方程 Differential Equation of a family of Curves.	31
21. 幾何問題包含微分方程者 Geometrical Problems involving the Solution of Differential Equations.....	34
22. 正交曲線 Orthogonal Trajectories	38
23. 物理問題之引起微分方程者 Physical Problems Giving Rise to Differential Equations.	43

第 四 章

一級高次之微分方程 Differential Equations of the First Order and Higher Degree than the First.

24. 方程之可解爲 p 之等式者 Equations solvable for p	49
--	----

25. 方程之可解爲 y 之等式者 Equations Solvable for y	52
26. 方程之可解爲 x 之等式者 Equations Solvable for x	55
27. 克雷勞方程 Clairaut's Equation	56
28. 本章提要 Summary	58

第五章

異解 Singular Solutions

29. 包線 Envelopes	61
30. 異解 Singular Solutions	63
31. 判別式 Discriminant	64
32. 由微分方程直接求得之異解 Singular Solutions Obtained directly from the Differential Equations	66
33. 額外軌跡 Extraneous Loci	69
34. 本章提要 Summary	75

第六章

全微分方程 Total Differential Equations

35. 全微分方程 Total Differential Equations	76
36. 解法 Method of Solution	80
37. 齊次方程 Homogeneous Equations	81
38. 含有三變數以上之方程 Equations involving more than Three Variables	83
39. 不能滿足積分可求條件性之方程 Equations which do not satisfy the Conditions for Integrability	84
40. 幾何的解釋 Geometrical Interpretation	86
41. 本章提要 Summary	87

第七章

常係數線性微分方程 Linear Differential Equations with Constants

Coefficients

42. 線性微分方程通式 General Linear Differential Equations	86
43. 常係數線性微分方程式. 補充函數 Linear Differential Equations with Constant Coefficients. Complementary Function	91
44. 輔助方程之根有重複者 Roots of Auxiliary Equation Repeated	93
45. 輔助方程之根爲複數者 Roots of Auxiliary Equation Complex	94
46. $(D-\alpha)$ 符號之性質 Properties of the Symbolic Operator $(D-\alpha)$	96
47. 特別積分 Particular Integral	97
48. 求特別積分之又一法 Another Method of finding the Particular Integral	101
49. 參數變動法 Variation of Parameters.....	103
50. 待定係數法 Method of Undetermined Coefficients	107
51. 歌西線性方程式 Cauchy's Linear Equation	113
52. 本章提要 Summary	1 5

第 八 章

二級線性微分方程 Linear Differential Equations of the Second Order

53. 依變數變換法 Change of Dependent Variable	123
54. 自變數變換法 Change of Independent Variable	127
55. 本章提要 Summary	129

第 九 章

解一級以上高級方程之雜法 Miscellaneous Methods for Solving

Equations of Higher Order than the First

56. 解題通則 General Plan of Solution	131
57. 缺依變數之方程 Dependent Variable Absent	131

58. 缺自變數之方程 Independent Variable Absent	134
59. 線性方程而其特別積分有爲已知者 Linear Equations with Particular Integral Known	135
60. 正合方程. 積分因子, Exact Equation. Integrating Factor	137
61. 變數變換法 Transformation of Variables	143
62. 本章提要 Summary	144

第 十 章

聯立方程組 Systems of Simultaneous Equations

63. 解題通則 General Method of Solution	149
64. 常係數線性方程組 Systems of Linear Equations with Constant Coefficients	150
65. 一級方程組 Systems of Equations of the First Order	154
66. 幾何的解釋 Geometrical Interpretation	157
67. 全微分方程組 Systems of Total Differential Equations	159
68. 高級微分方程常可化爲一級方程組 Differential Equations of High Order than the First Reducible to Systems of Equations of the First Order	160
69. 本章提要 Summary	161

第 十 一 章

以級數求積分法 Integration in Series

70. 存在定理 The Existence Theorem	164
71. 異解 Singular Solutions	163
72. 以級數求一級方程之積分 Integration, in Series, of an Equation of the First Order	169
73. 里卡提方程 Riccati's Equation	173

74. 以級數求高級方程之積分法 Integration, in Series, of Equations of Higher Order than the First.....177
75. 高思方程. 超比級數 Gauss's Equation. Hypergeometric Series192

第 十 二 章

偏微分方程 Partial Differential Equations

76. 根式之含任意常數者 Primitives involving Arbitrary Constants196
77. 根式之含任意函數者 Primitives involving Arbitrary Functions199
78. 偏微分方程之解案 Solution of a Partial Differential Equation202

第 十 三 章

一級偏微分方程 Partial Differential Equations of the First Order

79. 一級線性偏微分方程. 拉格蘭諾法, Linear Partial Differential Equations of the First Order. Method of Lagrange205
80. 常微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 之積分因子, Integrating Factors of the Ordinary Differential Equation $Mdx+Ndy=0$209
81. 一級非線性偏微分方程. 全解. 通解. 異解 Non-linear Partial Differential Equations of First Order. Complete, General, Singular Solutions.....211
82. 拉格蘭諾及嘉畢法 Method of Lagrange and Charpit215
83. 特別解法 Special Methods.....221
84. 本章提要 Summary.....227

第 十 四 章

高級偏微分方程 Partial Differential Equations of Higher Order than the First

85. 第二微分爲線性的二級偏微分方程者. 蒙奇法 Partial Differential Equations of the Second Order, Linear in the Second Derivatives. Monge's

Method.....	230
86. 特別解法 Special Method.....	236
87. 線性偏微分方程通式 General Linear Partial Differential Equations.....	238
✓ 88. 常係數齊級一次方程 Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients.....	239
✓ 89. 輔助方程之根有重覆者 Roots of Auxiliary Equation Repeated.....	240
✓ 90. 輔助方程之根爲複數者 Roots of Auxiliary Equation Complex.....	242
91. 特別積分 Particular Integral.....	243
✓ 92. 常係數非齊級線性方程 Non-homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients.....	246
✓ 93. 方程之可化爲常係數線性方程者 Equations Reducible to Linear Equations with Constant Coefficients.....	249
94. 本章提要 Summary.....	251

附 錄 Notes

I. 包含兩個相同變數之兩函數可有關係存在之條件 Condition that a Relation exist between Two Functions of Two Variables.....	253
II. 本書提要 General Summary.....	254
答案 Answers to Examples.....	257
索引 Index.....	263

增 錄

目 錄

- I. 求特別積分另法i
- II. 弗洛白尼司法11
- III. 含三個(或三個以上)自變數之偏微分方程之解法18
- IV. 解 $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ 之蒙奇法23
- V. 福里哀之半段級數29

微分方程

第一章

微分方程及其解案¹

1. 微分方程，常微分方程與偏微分²方程，級與次³。凡包含微分或微係數⁴之方程皆曰微分方程。下列其七例也。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0,$$

$$(2) \quad \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2 = x^2 + y^2,$$

$$(3) \quad y - x \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dx}{dy} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - k = 0,$$

$$(5) \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

$$(6) \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + zx \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = xyz,$$

$$(7) \quad x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy = 0.$$

凡方程祇含一自變數者(故亦祇含一尋常微係數)，稱曰常微分方程。上列(1),(2),(3),(4),(7)皆屬此類。

如方程中自變數不止一個，因之而式中含有偏微分者，稱曰偏微分方程。上列(5),(6)屬於此類。

1 解案 solutions, 亦曰答案, 曰解, 曰答。

2 偏微分 partial differential equation

3 級與次 Order, Degree.

4 微係數 differential coefficient, 即 derivative. 後者譯稱紀數, 引數, 導微函數, 導數等等。本書爲避用後者譯名起見, 時以微係數代之。如不礙文義, 有時竟以微分代之。

方程之級視其所含微係數之等級而定。例如上列(2),(3),(5),(7)諸式皆屬一級,(1),(4),(6)諸式則屬二級。

方程之次,視其化為有理式且已化去分數式時所含高級微係數之次數而定。上列(1),(5),(6),(7)諸式皆屬一次,(2),(3),(4)諸式則屬二次。

2. 方程之解案。凡一種自變數與應變數¹之關係能適合²一微分方程式者,即為後式之解案。例如 $y = \sin ax$ 為(1)之解案, $x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2}$ 為(4)之解案, $z = x + y$ 為(5)之解案, $x^2 y^3 = 1$ 為(7)之解案 [學者宜取各解一一自驗之]。

吾人於此,須注意一微分方程之解案,為式可多至無限。例如 $y = 2\sin ax, y = 6\cos ax, y = A\cos ax + B\sin ax$ (A 與 B 為兩個任意常數)皆易證其為(1)之解案。按吾人由推求積分經驗,已有求出積分後加一常數之習慣,故謂 $\cos x$ 之積分為 $\sin x + c$ 。今按積分之推求本不過解答微分方程之一特例。由前而言,吾人謂 $\int \cos x dx$ 者乃意欲推求一函數(即 $\sin x + c$),其微係數須恰為 $\cos x$ 。由後而言,吾人稱 $\frac{dy}{dx} = \cos x$ 之解為 $y = \sin x + c$, 內中 c 為一任意常數。^{*}

凡解中常數可隨意予以一值者,謂之任意常數³。例如 $y = \sin x + c$ 恆為

^{*}按在積分式中,常數之發現均屬加式⁴。但在微分方程解案中,常數與變數之關係錯綜不一,其法無限。

1 應變數 dependent variable, 亦曰因變數,曰倚變數。

2 適合 satisfy, 亦曰滿足。

3 任意常數 arbitrary constant, 亦曰隨意常數。

4 加式 additive。

$\frac{dy}{dx} = \cos x$ 之解, 不論 c 之所含爲何值也。又如 $y = A \cos ax + B \sin ax$ 恆爲 (1) 之解, 不問 A 與 B 之值爲何物也。凡似此之常數謂之任意常數。反之, (1) 中之 a 不得謂之任意常數。緣在 (1) 式之中, a 之值雖可隨意指定, 但既定之後值即不能復變, 且 a 在解中除此值之外, 不能再取他值。

是故就微分方程而論*, 解案之中可有一個或多個之任意常數。雖然, 此常數之至多數究應爲若干數耶, 吾人應先討論之。

3. 由根式¹求微分方程。 譬由微分求積分係一逆推之問題, 故由微分方程以求解案亦屬一逆推問題, 今之所求蓋爲一組變數的關係 (內中或含一個或含多個任意常數) 可適合於所論之微分方程。爲使此問題明確起見, 茲將所論之微分方程指定爲上述變數關係所適合之最低級微分方程而又不含任意常數之一類, 例如 $y = A \cos x$ (內 A 係一任意常數) 可適合於

$\frac{dy}{dx} + y \tan x = 0$, 亦合於 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, 及 $\frac{d^3y}{dx^3} - y \tan x = 0$ 等式, 但吾人

祇以 $\frac{dy}{dx} + y \tan x = 0$ 爲 $y = A \cos x$ 之微分方程。

又如 $y = A \cos x + B \sin x$ (A 與 B 爲任意常數) 適合於 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ 及 $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = 0$ 等式, 但吾人祇取前式加以討論。

由此推論, 凡遇含有 n 個任意常數†之關係, 吾人應先求其微

* 關於偏微分方程之解案, 當於第十二章中詳論之。

† 此 n 個任意常數須各爲主要的, 換言之, 須是不能以少於 n 數之常數代替者。例如在 $y = x + a + b$ 中, 主要常數實祇一個, 因 $a + b$ 實僅等於一個常數也。又如 ae^{a+b} 實與 ae^x 同類, 其中任意常數實祇一個。

1 根式 primitive, 亦曰原式。