



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
国家级精品课程主干教材

材料力学(Ⅱ) (第二版)

苟文选 主编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
国家级精品课程主干教材

材料力学(Ⅱ)

(第二版)

苟文选 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

作为材料力学课程模块化教材的拓展模块,本书包括能量法、超静定系统、疲劳强度、扭转及弯曲问题的进一步研究,超过弹性极限后材料的变形与强度,材料力学行为的进一步认识,实验应力分析概况等内容。各章后均配有适量的思考题及习题,书后附有参考答案。本书配有电子课件,可赠送给任课老师。

本书可作为高等工科院校力学、机械及土建类专业的教材,也可作为上述各类专业函授、电大和网络教育的教材及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(Ⅱ)/苟文选主编. —2版. —北京:科学出版社,2010
(普通高等教育“十一五”国家级规划教材·国家级精品课程主干教材)
ISBN 978-7-03-026391-9

I. 材… II. 苟… III. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 007311 号

责任编辑:匡 敏 于宏丽 / 责任校对:包志虹
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

装 订 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2010 年 1 月第 二 版 印张:13 3/4

2010 年 1 月第三次印刷 字数:326 000

印数:5 501—9 500

定价:24.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

作者简介



苟文选, 1953 年生于陕西礼泉, 在经历了六年多中学教书生涯后, 1978 年考入西北工业大学基础课部材料力学师资班学习, 毕业后留校在材料力学教研室任教, 并攻读固体力学专业研究生。现为西北工业大学教授、博士生导师。

曾任中国力学学会实验力学专业委员会第六、七届专业委员会委员, 西北工业大学工程力学系副主任, 西北工业大学国家工科力学基础课程教学基地建设领导小组副组长。现任西北工业大学图书馆馆长、教育部第三届高等学校图书馆工作指导委员会委员。被首批遴选为西北工业大学跨世纪教学带头人、双百优秀人才、西北工业大学翱翔名师。

长期从事材料力学、工程力学、实验力学等专业的教学和研究工作, 编著出版了《材料力学》(I、II)、《材料力学教与学》、《材料力学概要及试题讲练》、《材料力学典型题解析及自测试题》、《材料力学导教、导学、导考》(上、下) 及《光弹性实验原理和方法》、《现代光测力学》、《西北工业大学图书馆馆史》等多部教材和专著, 主持完成了原国家教委“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践”西北工业大学子项目和“陕西省高等教育面向 21 世纪教改项目——工程力学类课程体系与教学内容改革与实践”项目。发表教学论文二十余篇, 1998 年被评为全国优秀力学教师, 获国家级优秀教学成果一等奖, 陕西省优秀教学成果特等奖、二等奖等。

曾参加和主持多项国家自然科学基金、航空科学基金项目, 发表科研论文四十余篇, 其中多篇被三大索引收录, 获航空基金项目优秀成果二等奖、陕西省教委科技进步三等奖等多项奖励。

第二版前言

根据教育部教高函字(2008)3号文件,本书被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

《材料力学》(I、II)自2005年由科学出版社出版以来,经过多次重印,在广大师生教与学的使用过程中,得到了广泛的好评。但是也发现了一些编排上不尽合理、文字叙述不太准确的地方。本次再版,在内容上主要作了以下的调整:

(1) 为了满足中学时教学的需要,同时保证教材内容的完整性,将“动载荷”一章由《材料力学》(II)中调整到《材料力学》(I)中,使基础模块内容更加完整。

(2) 将《材料力学》(I)“弯曲应力”一章中组合梁的内容调整到《材料力学》(II)中“扭转及弯曲问题的进一步研究”一章中,这样更利于组织教学。

(3) 在《材料力学》(I)“弯曲变形”一章中增加了“梁弯曲变形后挠曲线大致形状确定”的内容,并就接触问题以例题形式进行了阐述;考虑到中、少学时对拓展模块《材料力学》(II)一般不讲授,对变形比较法解超静定问题的内容有所加强。

(4) 删减了验证性例题,增加了有工程背景的例题及习题,以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

(5) 为了尊重知识产权,对主要理论出处及著者做了脚注,并在书后列有参考文献。

(6) 将书中的文字错误进行了更正,习题答案又一次进行了校对。

《材料力学》(I)(第二版)中第5~7章由高雅丽负责改写,第8~10章由王安强负责改写,第11章和《材料力学》(II)(第二版)中第3章由王锋会负责改写,《材料力学》(II)(第二版)中第6章由矫桂琼负责改写,其余各章由苟文选负责改写。苟文选负责全书的统稿工作并担任主编,王安强负责部分统稿和全书插图工作并任副主编。

本书经胶印试用、大学出版社多次印刷、科学出版社再版,前后已近二十年,其间虽经多次修订,但限于编者水平,疏漏之处仍在所难免,望读者批评指正,使本书内容日臻完善,质量进一步提高。

编 者

2009年冬于西北工业大学兰台

第一版前言

根据教育部“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践”项目及《国家工科基础课程—力学教学基地》建设的要求,我们组织编写了模块化《材料力学》教材(I)、(II),经过几年的教学实践,数易其稿,现在呈现给广大读者。

教材是课程教学内容和课程体系改革的核心。多年来,老师们在材料力学教材建设方面付出了辛勤的劳动。1991 年张剑英教授等编写了《材料力学》教材。几经试用后,在广泛征求师生意见的基础上,于 1994 年由郑斯滔教授主持,对 1991 年版《材料力学》教材作了重大修改并再版,同时编写了《材料力学解题指导》。这些教材与《材料力学四选一题集》、《材料力学实验》组成了一套完整的多学时材料力学课程教材体系。1997 年,根据国家教委“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与体系改革与实践”立项研究的要求,为适应新形势,组织了模块化教材的编写和教学实践,并取得经验。这套教材就是在此基础上编写而成的。

新的模块化《材料力学》教材包括《材料力学》(I)基础模块、《材料力学》(II)拓展模块和拟议中的《材料力学》(III)研究模块。《材料力学》(III)主要阐述材料力学中的新材料、新理论、新方法,因要贴近学科前沿,适合采用讲座形式介绍,故只能以讲义形式使用。

高等学校的教材,应担当起科学素质培育的责任。教材不仅要帮助学生学会生存、学会学习和学会创造,而且要寓“思”于教材,寓“观”于教材。努力培养基础扎实、知识面宽、能力强、素质高的具有创新精神的高级人才。在编写这套教材中,我们注重对学生分析问题和解决工程实际问题能力的培养;注意实验技能的训练,为此专列了“实验应力分析概况”一章;在实验方法及叙述中,尽可能与国标达到统一,使得设计及试验规范统一;突破《材料力学》基本假设的限制,除引用一些非线性例题以拓展知识面外,还撰写了“超过弹性极限后材料的变形与强度”,并对非连续体及各向异性体的力学性质作了简要的阐述。

推进教学方法和教学手段的改革,是把教师的主导作用和学生的主体作用有机地结合起来,这是教学过程中处理教与学的基本原则。这一原则要求我们必须积极探索启发式教学、探索充分调动学生积极性和主动性的教学方法。用哲学的视角对科学技术知识中一些重要且基本的科学技术规律、概念、方法等作出某种哲理性的点拨,并在思考题、习题中加以体现,启发和促进学生在学科学技术知识的同时学会运用科学的思维方法。本书力图在启发学生的主动思维,揭示本课程学习规律上有所创新和突破。为了便于学生掌握教材内容和教师组织教学时有灵活的选择,书中给出了较多的例题,并着重阐述了解题的思路。同时各章后配有思考题和习题。

《材料力学》(I)的主要内容包括:绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态及应变状态分析、强度理论、组合变形时的强度条件、压杆稳定及附录等,可供 40~60 学时的工科院校各类专业选修。其中第一、二、三章及附录由苟文选编写,第四章由王安强编写,第五、六、七章由高雅丽、苟文选编写,第八、九、十章由金保森

编写,第十一章由王锋会编写。

《材料力学》(Ⅱ)主要包括:能量法、超静定系统、动载荷、疲劳强度、扭转及弯曲问题的进一步研究、超过弹性极限后材料的变形与强度、材料力学行为的进一步认识、实验应力分析概况等内容。作为拓展模块供力学、机械、建工等各专业选修。其中第一、二、三章由卫丰编写,第四章由王锋会编写,第五章由苟文选编写,第六章由张克实编写,第七章由矫桂琼编写,第八章由金保森、苟文选编写。王安强博士用计算机绘制了全书的插图。全书由苟文选任主编。金宝森,卫丰任副主编。

郑斯滔教授和原国家教委工科课程指导委员会委员俞茂宏教在百忙中审阅了全部书稿,并提出精辟珍贵的指导修改意见;西北工业大学教务处教材科的领导和力学与土木建筑学院的领导对本书的出版给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢。

力学系列课程教学内容和课程体系改革是一项重大课题,但限于编者的水平,教材中难免有疏漏和不妥之处,希望使用本教材的广大师生和读者提出批评意见,以利于教材质量的进一步提高。

编 者

2004年10月

主要使用的量和单位

分 类	符 号	名 称	国际单位	备 注
外 力	F	集中载荷	N, kN	1kgf=9.81N
	q	分布载荷集度	N/m, kN/m	1kgf/m=9.81N/m
	M, M_e	外力偶矩	N·m, kN·m	1kgf·m=9.81N·m
	F_{af}	附加力	N, kN	
	M_{af}, T_{af}	附加力偶矩	N·m, kN·m	
	F_R	约束反力	N, kN	
	$F_A(F_{Ax}, F_{Ay})$	A点处的支座反力	N, kN	
内 力	F_d	动载荷	N, kN	
	F_N	轴力	N, kN	
	F_s, F_{sy}, F_{sz}	剪力	N, kN	
	M_y, M_x	弯矩	N·m, kN·m	
	T, T_x	扭矩	N·m, kN·m	
	F_N	单位力引起的轴力	N, kN	
	F_s	单位力引起的剪力	N, kN	
	M, M_y, M_z	单位力引起的弯矩	N·m, kN·m	
	T	单位力引起的扭矩	N·m, kN·m	
	M_e, T_e	弹性极限弯矩、扭矩	N·m, kN·m	
应力、应变、位移	M_p, T_p	塑性极限弯矩、扭矩	N·m, kN·m	
	σ	正应力	Pa, MPa	1Pa=1N/m ²
	τ	切应力	Pa, MPa	1kPa=10 ³ Pa
	$\sigma_{\max}$	最大正应力	Pa, MPa	1MPa=10 ⁶ Pa
	$\sigma_{\min}$	最小正应力	Pa, MPa	1GPa=10 ⁹ Pa
	σ_m	平均应力	Pa, MPa	1MPa=1N/mm ²
	σ_a	应力幅	Pa, MPa	
	σ_r	循环特征为 r 的疲劳极限	Pa, MPa	
	σ_{-1}	对称循环的疲劳极限	Pa, MPa	
	σ_{st}	静应力	Pa, MPa	
	σ_d	动应力	Pa, MPa	
	$(\sigma_{-1})_d, (\tau_{-1})_d$	光滑试样的疲劳极限	Pa, MPa	
	$(\sigma_{-1})_k, (\tau_{-1})_k$	有应力集中的疲劳极限	Pa, MPa	
	ϵ	线应变		
	Δ, δ	广义位移	mm, rad	
	δ_{ij}	单位力引起的位移	mm, m	
	Δ_{st}	冲击点静位移	mm, m	
	Δ_d	动位移	mm, m	

续表

分 类	符 号	名 称	国际单位	备 注
材料特性等	σ_u	极限应力	Pa, MPa	
	$[\sigma]$	许用应力	Pa, MPa	
	$[\sigma_t], [\sigma_c]$	拉伸、压缩许用应力	Pa, MPa	
	E	弹性模量(杨氏模量)	GPa	
	G	切变模量	GPa	
	$[\sigma_{-1}]$	对称循环的许用应力	Pa, MPa	
	N	累积循环次数、疲劳寿命		
	K	应力强度因子、应力集中因数	$\text{N} \cdot \text{m}^{-\frac{3}{2}}$	
	K_{IC}, K_{IIC}	平面应力、平面应变断裂韧度	$\text{N} \cdot \text{m}^{-\frac{3}{2}}$	
	A	弯曲中心		
	e	偏心距	mm	
	α_k	材料的冲击韧度	J/mm^2	
	K_σ, K_τ	有效应力集中因数		
	$\epsilon_\sigma, \epsilon_\tau$	尺寸因数		
	β	表面质量因数		
	ψ_σ, ψ_τ	不对称循环敏感因数		
	n_σ	构件的工作安全因数		
	W	功	J	$1\text{J}=1\text{N} \cdot \text{m}$
	V_s	应变能	J	
	v_s	应变能密度	J/mm^3	
	r	循环特征(应力比)		
	ω	角速度	rad/s	
	α	角加速度	rad/s^2	
	v	速度	m/s	
	a	加速度	m/s^2	
	g	重力加速度	m/s^2	
	K_d	动荷因数		
	E	能(量)	J	
	$E_P(V)$	势能, 位能	J	
	$E_K(T)$	动能	J	

注:① 国际单位中的空栏为“无量纲”。

② 主要使用的量和单位表的编写依据是“中华人民共和国国家标准 GB/T 3100—1993 国际单位制及其应用”, GB/T 3101—1993 中“有关量、单位和符号的一般原则”, GB/T 3102.3—1993 中“力学的量和单位”。对标准中无规定的符号,使用依据是高等教育出版社的“材料力学主要符号表”。

目 录

第二版前言

第一版前言

主要使用的量和单位

第 1 章 能量原理在杆件位移分析中的应用	1
1.1 杆件应变能	1
1.2 杆件应变能的普遍表达形式	6
1.3 卡氏定理	9
1.4 单位载荷法	14
1.5 图形互乘法	21
1.6 虚功原理	29
1.7 功的互等定理	32
思考题	34
习题	35
第 2 章 能量原理在求解超静定结构中的应用	40
2.1 概述	40
2.2 超静定结构分析基础	42
2.3 力法正则方程	48
2.4 对称性条件及其在求解超静定结构中的应用	56
2.5 三弯矩方程	70
思考题	75
习题	75
第 3 章 疲劳强度	82
3.1 概述	82
3.2 交变应力的循环特征	84
3.3 疲劳极限	85
3.4 影响疲劳极限的因素	88
3.5 疲劳强度计算	92
3.6 弯扭组合作用下构件的疲劳强度计算	98
3.7 抗疲劳设计	100
3.8 提高构件疲劳强度的措施	102
思考题	104
习题	104
第 4 章 扭转及弯曲问题的进一步研究	108
4.1 薄壁杆件的自由扭转	108

4.2 开口薄壁杆件的弯曲切应力及弯曲中心	113
4.3 组合梁	121
4.4 平面曲杆的正应力	127
4.5 用共轭梁法求梁的变形	134
4.6 梁变形的普遍方程——奇异函数法	139
思考题	147
习题	148
第5章 超过弹性极限材料的变形与强度	152
5.1 概述	152
5.2 金属材料在简单拉压载荷下的塑性变形	152
5.3 纯弯曲梁的塑性变形	156
5.4 横力弯曲梁的塑性弯曲	158
5.5 圆轴的极限扭矩	162
5.6 简单桁架的弹塑性变形分析	164
思考题	167
习题	167
第6章 材料力学行为的进一步认识	168
6.1 温度对材料力学性能的影响	168
6.2 应变速率对材料力学性能的影响	169
6.3 材料的黏弹性特性简介	169
6.4 线弹性断裂力学简介	172
6.5 复合材料力学简介	174
思考题	178
习题	178
第7章 实验应力分析简介	179
7.1 概述	179
7.2 电测法的基本原理	179
7.3 应变测量与应力换算	183
7.4 光弹性实验方法及平面偏振光	189
7.5 平面受力模型在平面偏振光场中的效应	190
7.6 平面受力模型在圆偏振光场中的效应	193
7.7 材料条纹值的测定	196
7.8 光弹性方法的应用	198
思考题	199
习题	199
习题答案	201
参考文献	207

第 1 章 能量原理在杆件位移分析中的应用

1.1 杆件应变能

在工程结构分析中,经常需要计算结构和构件的变形。使用一般的方法,如积分法作变形计算时需要分析结构和构件的具体变形形式,并需大量的计算工作。特别是对于刚架、桁架和曲杆等复杂的超静定结构,由于变形复杂,一般方法根本无法完成。工程上通常采用能量原理完成结构和构件的变形分析。

在固体力学领域,能量原理泛指利用功和能的相关定理分析问题的方法。能量原理除了在变形和超静定结构分析方面有广泛的应用之外,也应用于工程结构的稳定和冲击等问题分析。能量原理在结构或者构件的变形分析中,不涉及具体的变形过程,因此具有应用简单、方便等优点。能量原理的另一个优点是公式统一,适于利用计算机编程处理。以能量原理为基础的有限元方法,目前已经成为应用最为广泛的工程结构分析工具。

能量原理的主要基础为:物体在外力作用下发生变形,因此外力在变形过程中做功,这一外力功将转化为其他形式的能量。对于弹性物体,由于变形的可逆性,这种能量转化过程相对简单。由于在弹性变形过程中,可以忽略其他形式的能量,如动能、热能等的损耗,认为外力功 W 全部转化为应变能 V 。存储于弹性体的内部,即

$$W = V_s \quad (1-1)$$

在弹性范围内,应变能与外力功是可逆的。这就是说,当外力增加时,外力功可以转化为应变能存储于弹性体内部,而外力减小时,应变能又可以转化为功。

本章介绍有关能量法的基本原理和方法,如果没有特别说明,一般认为材料的应力应变关系满足胡克定理,讨论问题仅限于线性弹性问题;外力为静载荷,即外力从零开始缓慢地增加,直到终值;弹性体在外力的作用下将发生变形,弹性体的变形也从零开始直到对应的数值。

以下首先分析杆件基本变形的应变能表达形式。

1.1.1 轴向拉伸或压缩

在线弹性条件下,即应力应变关系满足胡克定理,外力在杆件上所做的功在数值上等于存储于杆件内部的应变能。在《材料力学》(I)中 2.10 节已经证明,拉伸曲线与横轴所围面积为外力功。因此,如图 1-1 所示,三角形 OAB 的面积在数值上等于外力所做的功,即

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l \quad (1-2)$$

根据内力分析和胡克定律知

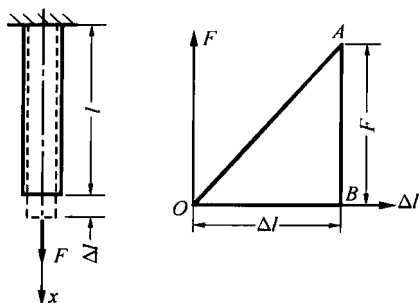


图 1-1

$$F_N = F, \quad \Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

由能量原理式(1-1), 则应变能为

$$V_s = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F_N^2 l}{2EA} \quad (1-3)$$

式(1-3)为等截面直杆在轴力为常量条件下的应变能计算公式。如果杆件为变截面杆件, 或者轴力是变化的, 可以考虑 dx 微段的应变能为

$$dV_s = \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx$$

积分可得整个杆件的应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx \quad (1-4)$$

1.1.2 扭转

圆轴扭转时, 如果材料应力应变关系处于线弹性范围, 则扭矩 T 与扭转角 φ 的关系为图 1-2(b) 所示一条直线。按照《材料力学》(I) 中 3.3 节的证明, 变形过程中扭矩所做的功在数值上等于三角形 OAB 的面积, 即

$$W = \frac{1}{2} T \varphi \quad (1-5)$$

根据《材料力学》(I) 中式(4-12)

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

所以, 圆轴扭转的应变能 V_s 为

$$V_s = \frac{1}{2} T \varphi = \frac{T^2 l}{2GI_p} \quad (1-6)$$

如果圆轴的扭矩或者极惯性矩沿杆件的轴线为变量, 则扭转应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p(x)} dx \quad (1-7)$$

对于非圆截面杆的扭转, 则需将式(1-7)中截面二次矩 I_p 换为 I_n 。

1.1.3 弯曲

首先讨论等截面梁纯弯曲时的应变能。设梁的两端面作用弯矩为 M , θ 为两个端面之间的相对转角, 如图 1-3(a) 所示, 则根据几何关系

$$\theta = \frac{l}{\rho}$$

根据《材料力学》(I) 中式(6-1)

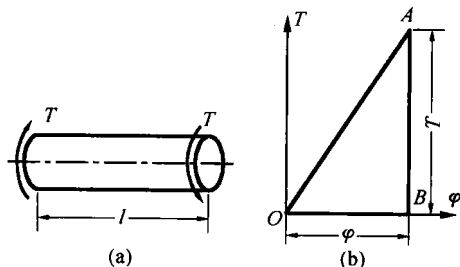


图 1-2

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

所以

$$\theta = \frac{Ml}{EI_z}$$

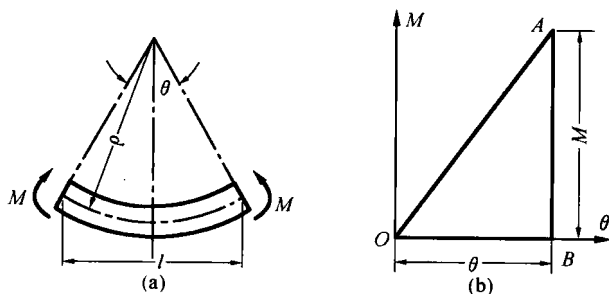


图 1-3

在线弹性条件下,梁的弯矩 M 与端面转角 θ 之间的关系曲线为图 1-3(b)所示的一条直线。弯矩 M 所做的功在数值上等于三角形 OAB 的面积,即

$$W = \frac{1}{2} M \theta \quad (1-8)$$

所以,纯弯曲梁的应变能 V_s 为

$$V_s = \frac{1}{2} M \theta = \frac{M^2 l}{2EI_z} \quad (1-9)$$

对于剪切弯曲问题,必须分别考虑弯矩和剪力产生的应变能。由于剪切弯曲时,内力弯矩不再是常量,因此取 dx 微段,如图 1-4 所示,则外力功 dW 为

$$dW = \frac{1}{2} M(x) d\theta$$

dx 微段的应变能为

$$dV_s = \frac{1}{2} M(x) d\theta = \frac{M^2(x) dx}{2EI_z}$$

所以,整个梁的弯曲应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI_z} \quad (1-10)$$

对于剪切应变能,可以从剪切应变能密度入手讨论。根据《材料力学》(I)中的式(3-11),剪切应变能密度 v_s 为

$$v_s = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (1-11)$$

由于在 F_s 作用下的切应力 τ 为

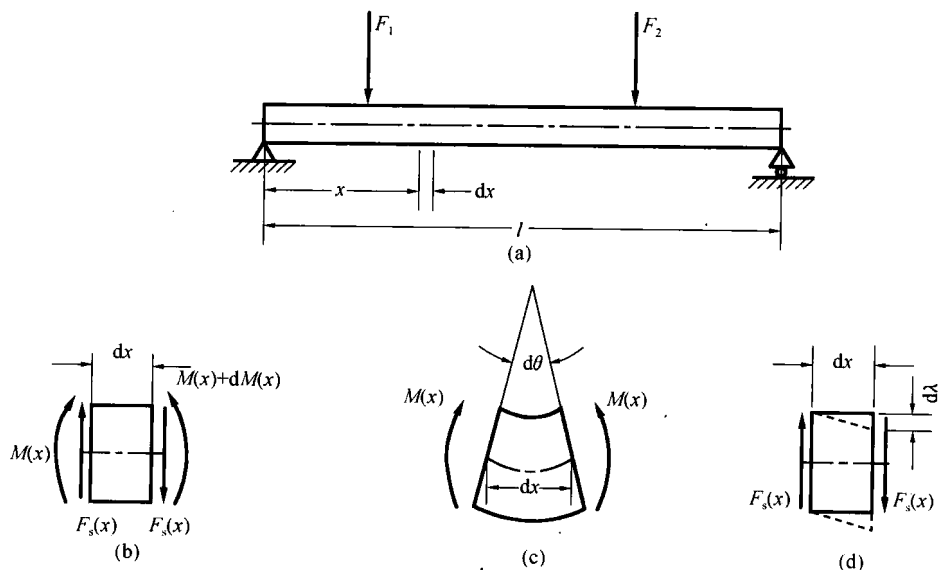


图 1-4

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{b I_z}$$

代入式(1-11)得剪切应变能密度 v_s 为

$$v_s = \frac{1}{2G} \left(\frac{F_s S_z^*}{b I_z} \right)^2$$

整个梁的剪切应变能 V_s 为

$$V_s = \int_V v_s dV = \int_l \left[\int_A \frac{1}{2G} \left(\frac{F_s S_z^*}{b I_z} \right)^2 dA \right] dx = \int_l \frac{F_s^2}{2G I_z^2} \left[\int_A \left(\frac{S_z^*}{b} \right)^2 dA \right] dx \quad (1-12)$$

引入记号

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left(\frac{S_z^*}{b} \right)^2 dA \quad (1-13)$$

记号 k 只与梁的横截面形状有关,称为**剪切形状系数**。对于矩形截面, $k = \frac{5}{6}$; 对于圆形截面, $k = \frac{10}{9}$; 薄壁圆环截面, $k = 2$ 。对于其他形状的横截面,剪切形状系数 k 可以根据式(1-13)计算。

引用记号 k 后,则式(1-12)可以简化为

$$V_s = \int_l \frac{k F_s^2}{2GA} dx \quad (1-14)$$

对于细长梁,剪切应变能远小于弯曲应变能,因此进行工程结构分析时,一般对于剪切应变能略去不计。只有在某些特殊形式下,如工字钢等薄壁截面梁,才需要考虑剪切应

变能。

根据上述分析,由于构件应变能在数值上等于外力功,在线弹性范围,式(1-2)、式(1-5)和式(1-8)表示的静载荷外力功可以写为统一表达式

$$W = \frac{1}{2} F \delta \quad (1-15)$$

式中, F 为广义力; δ 为与广义力对应的位移,称为广义位移。

广义位移是广义力作用点,且与广义力方向一致的位移。如果广义力为轴力或者横向力,则广义位移为对应的线位移;如果广义力为力偶,则广义力为对应的转角。

应该注意,在线弹性条件下,广义力与广义位移之间呈线性关系。对于非线性弹性问题,尽管是弹性变形,能量关系(1-1)仍然成立,但是应力应变关系不再满足线性条件,其应变能 V_s 计算公式为

$$V_s = W = \int_l F d\delta \quad (1-16)$$

对于非线性弹性问题, $F-\delta$ 曲线不再是直线,因此式(1-16)计算所得应变能的系数不再是 $\frac{1}{2}$ 。

例 1-1 简支梁 AB 在 C 处作用集中力 F , 如图 1-5 所示。已知梁的抗弯刚度 EI 为常量, 试求梁的应变能 V_s , 并计算 C 点的挠度 y_C 。

解 (1) 求支反力。根据平衡条件 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 可得支座反力

$$F_{Ay} = F \frac{b}{l}, \quad F_{By} = F \frac{a}{l}$$

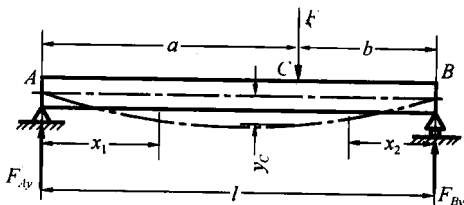


图 1-5

(2) 列弯矩方程并计算弯曲应变能。对于图示坐标系, AC 段弯矩为

$$M_1(x_1) = F_{Ay}x_1 = F \frac{b}{l}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a$$

CB 段弯矩为

$$M_2(x_2) = F_{By}x_2 = F \frac{a}{l}x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq b$$

由于在梁 AC 和 CB 段弯矩方程是通过不同的函数描述的, 因此应用式(1-10)计算应变能时, 必须分段计算然后求和。有

$$\begin{aligned} V_s &= \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} = \int_0^a \frac{M_1^2(x_1)dx_1}{2EI} + \int_0^b \frac{M_2^2(x_2)dx_2}{2EI} \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a \left(F \frac{b}{l}x_1 \right)^2 dx_1 + \int_0^b \left(F \frac{a}{l}x_2 \right)^2 dx_2 \right] = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI l} \end{aligned}$$

(3) 根据能量原理求位移。在变形过程中, 外力 F 做功为

$$W = \frac{1}{2} F y_C$$

根据能量原理 $W=V_s$, 求得 C 点的垂直位移为

$$y_c = \frac{Fa^2b^2}{6EI}$$

计算所得的 y_c 为正值, 表示位移与外力 F 方向一致。

从例 1-1 的分析中可以看到, 由于能量原理应用不涉及变形的具体过程, 因此可以不必采用统一坐标系。例题中梁的 AC 和 CB 段弯矩是通过不同形式的坐标系描述的, 这对于复杂结构的变形分析更具有优越性。

根据上述分析(与《材料力学》(I)中例 2-10 同理), 只有弹性体作用广义力唯一, 而且仅当在分析广义力作用点沿力的作用线方向的广义位移时, 才能直接应用能量原理。为了能够将能量原理更广泛地应用于结构和构件的变形分析, 必须进一步讨论能量关系, 建立求解变形的能量方法。

1.2 杆件应变能的普遍表达形式

本节将根据杆件基本变形的应变能表达式, 推导杆件应变能的普遍表达形式。对于

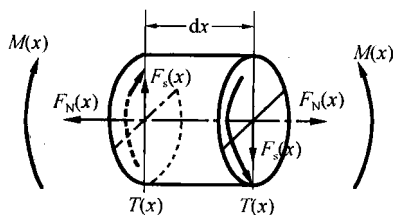


图 1-6

组合变形杆件, 横截面同时作用多个内力分量, 为了方便讨论, 取杆件的 dx 微段分析, 如图 1-6 所示。

设 dx 微段的两端横截面的内力分别为轴力 $F_N(x)$ 、扭矩 $T(x)$ 、剪力 $F_s(x)$ 和弯矩 $M(x)$, 其中剪力产生的应变能一般忽略不计。上述内力, 对于所研究的对象 dx 微段而言均为外力。设 dx 微段的两个端面的相对轴向位移为 $d(\Delta l)$, 相对扭转角为 $d\varphi$, 相对转角为 $d\theta$ 。由于 dx 微段的上述广义位移是正交的, 因此各个外力所做的功是相互独立的, 互不影响。如轴力 $F_N(x)$ 在相对扭转角 $d\varphi$ 和相对转角 $d\theta$ 上不做功, 而扭矩 $T(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 在轴向位移 $d(\Delta l)$ 上也不做功。因此, 外力功为

$$dW = \frac{1}{2} F_N(x) d(\Delta l) + \frac{1}{2} T(x) d\varphi + \frac{1}{2} M(x) d\theta$$

上述外力功等于存储于 dx 微段内的应变能, 若材料变形在线弹性范围内, 则胡克定律成立, 因此

$$dV_s = \frac{1}{2} F_N(x) d(\Delta l) + \frac{1}{2} T(x) d\varphi + \frac{1}{2} M(x) d\theta = \frac{F_N^2(x)}{2EA} dx + \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx + \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

积分可得整个杆件的应变能为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA} dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (1-17)$$

式(1-17)为圆截面杆件的应变能表达式, 对于非圆截面杆件, 应变能的普遍表达形式为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA} dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_n} dx + \int_l \frac{M_y^2(x)}{2EI_y} dx + \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx \quad (1-18)$$