KAI FANG DE CHU ZHONG SHU XUE

开放的初中数学

曹松峰 著

奇妙的幻方

"世界上最大的旅馆"里发生的故事

我为什么不能中奖

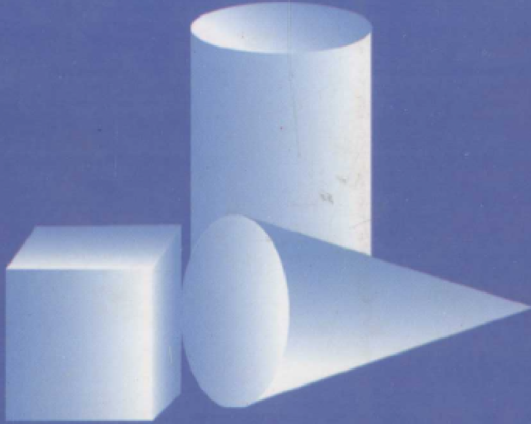
月历中的数学问题

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

责任编辑：贾伯胜

封面设计：刘宗国



ISBN 7-5633-5950-8

9 787563 359509 >

ISBN 7-5633-5950-8/G·343

定价：12.50元

开放的初中数学

曹松峰　著

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

开放的初中数学

曹松峰 著

责任编辑：贾伯胜　　　　　　　　　　　　封面设计：刘宗国

广西师范大学出版社出版发行

（广西桂林市育才路 15 号　　邮政编码：541004
网址：http://www.bbtpress.com）

辉县市文教印务有限公司印刷

*

开本：890×1240　1/32　　印张：10.5　　字数：280 千字

2006 年 3 月第 1 版　　　　　　　2006 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5633-5950-8/G・3433

定价：12.50 元

目　录

华夏赤子　数学大师

当代数学大师华罗庚，1910 年 11 月 12 日出生于江苏省金坛县一个城市贫民家庭，在金坛县立初中毕业后就回家帮助父亲干活. 为了养家糊口，学点本事，不久考取上海中华职业学校，由于家境贫寒，念了一年书就辍学回家，一边在自家的小杂货铺里干活，一边顽强自学. 父亲对儿子专心于学习很不高兴，在一本关于华罗庚的通俗传记上登载了一幅漫画，他父亲穿过店堂追赶儿子，小男孩恐惧地抓紧胸前的几本数学书，父亲威胁他要把书烧掉，画面上还有一张华罗庚帮他父亲算账用的小桌子，桌子上放着一个算盘.

华罗庚 18 岁那一年，染上了致命的伤寒病，接着又患了关节炎，致使左腿终身残废. 这使他十分苦恼，周围人们的议论，更让他不知如何是好. 坚强自信的华罗庚经过反复思考，决定一生钻研数学. 因为搞数学不需要什么设备，有一支笔和一些纸就可以. 从此，他在原有的基础上，顽强地向数学王国进军. 1929 年，只有 19 岁的他，写出了一篇有学术价值的论文《苏家驹之代数的五次方程式不能成立的理由》，这篇论文令时任清华大学算学系主任的熊庆来教授大吃一惊. 他随即派人打听，后来知道作者是一个仅有初中程度的自学青年. 1931 年，爱才如命的熊庆来先生亲自邀请华罗庚到清华大学一边工作一边进修数学. 在这里，他不仅在数学领域打下了坚实的基础，而且还自学了英文、法文和德文. 在清华大学的四年中，他突飞猛进，仅就数论这一分支就发表了十几篇高水平的论文，成了轰动世界的青年数学家，并很快由助理员晋升为助教、教授. 1936 年他作为剑桥大学的访问学者到英国深造. 在英国的两年中，华罗庚参加了由一些世界著名数学家组成的数论研究小组，很快对堆垒数论中的华林问题和哥德巴赫问题取得了创造性成果，其中还得出了“华氏定理”，撰写了 18 篇有学术价值的论文. 抗日战争爆发后，他毅然放弃学位，于 1938 年回到祖国，在西南联大任数

学教授. 在民族危亡的日子里，在敌机狂轰滥炸的恶劣环境中，在生活无保障的情况下，他一面教书，一面不分昼夜地钻研数学，先后写了 20 多篇高水平的论文，并于 1941 年完成了《堆垒素数论》的手稿，但未能出版.

1945 年，华罗庚应苏联科学院的邀请去苏联旅行和讲学. 1946 年 4 月苏联科学院出版了他的名著《堆垒素数论》. 同年秋天，华老应邀访问美国，任普林斯顿大学客座讲师、教授. 他边教书，边搞研究，兴趣更加广泛，开始涉足多复变函数论、自守函数和矩阵几何，并取得显著成就. 新中国诞生后的 1950 年，时任美国伊里诺大学终身教授的他，放弃了美国的优越条件，义无反顾地携家眷投入祖国母亲的怀抱. 在那艰难的岁月里，他夜以继日，呕心沥血，为新中国科学的发展，为培养一代又一代的数学家作出了划时代的贡献.

华老研究的范围十分广泛. 他是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论、多复变函数论等多方面研究的创始人与开拓者，一生写了 200 多篇学术论文，10 部专著和 10 部科普作品. 他的《堆垒素数论》1953 年出了中文版. 1957 年，60 万字的《数论导引》问世，该书内容丰富，叙述严谨，深入浅出，深受科技界的好评. 他的著名论文《多复变函数典型域上的调和分析》于 1957 年获得我国科学一等奖. 他当之无愧地被称作当今中国的领袖数学家. 华老的功绩和贡献还是世界性的，不少国家选他为科学院院士，他的名字已载入国际著名数学家的史册，是世界上最杰出的数学家之一. 诺贝尔奖获得者杨振宁教授曾在 2000 年说过："从过去发展的历史可以看出来，中国最早得到世界绝对第一流研究成果的，也是在数学领域，华罗庚先生、陈景润先生就是证明."

华老还是将数学直接造福于人民的光辉典范. 他一贯强调数学的应用价值，并且身体力行，为推广数学应用而努力. 20 世纪 70 年代前后，他带领工作组，不知疲倦地进工矿、到农村，大力推行简单实用的"优选法"、"统筹法"，足迹遍及全国二十多个省市自治区. 1982 年夏天，已步入古稀之年的他，还冒高温，拄拐杖，头戴柳条帽，身穿矿工服，下矿井调查研究，为开发两淮煤矿积极献计献策. "双法"的普遍推广和应用，为国家的经济发展和社会进步创造了难以估量的价值.

华老对读书的方法问题，自有一套深刻独到的见解，即"读书要从薄到厚，再从厚到薄". 他的经验是，首先要作好读书笔记，补充书中

的不足之处，包括补足定理证明的缺陷等等．还要选做书中的习题．这样就好像是把书读厚了．他还说过：“读数学书而不做习题，真好像是入宝山而空返．”进一步是要努力提炼出书中的基本要点和核心内容以及论证方法的关键所在．因为要点、核心和关键经过分析、概括和彻底理解后也就会变成直观上一目了然的东西，显然只需用极小的篇幅即可记录下来，所以厚书也就变薄了．对待探究性科学研究，华老认为在工作过程中出现些差错是常有的事．他说：“只有庙宇里的菩萨才不会出错误，研究工作做得越多的人，出现差错的机会也就会越多．”人们常把华老称赞成“天才”，他个人并不认可这种说法．在他看来，一般正常人的天赋智能其实差别很小，但由于人们实际生活环境与条件的不同，智能被开发的程度不同，才使其智能在表现上有所差别．他常说，自己的成就主要靠勤奋，还常用“勤能补拙”的成语来勉励后人．从华老的许多著作可以看出，他丰硕的数学工作成果所反映的“价值观”主要表现为：追求简易、重视技巧、寻求显式、坚持构造和看重应用．

1985 年 6 月 12 日，这位国际著名的数学家在东京大学讲学时，心脏病发作，永远地离开了我们．

对于整数和自然数，我们熟悉吗？

有关连续整数的问题

连续整数具有一些简单的性质：（1）两个连续整数中必有一个偶数；（2）三个连续整数之积能被 6 整除；（3）四个连续整数之积与 1 的和必为某个整数的平方；等等.

证明：（1）、（2）很简单，同学们可自行证之.

（3）设四个连续整数分别为 $n-1$，n，$n+1$，$n+2$（n 为整数）. 注意到 $-1+2=0+1$，可以将 $n-1$ 与 $n+2$ 结合，n 与 $n+1$ 结合，于是，$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n^2+n-2)(n^2+n)+1=(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1=(n^2+n-1)^2$.

从性质（3）的证明过程不难看出，对于任意的实数 x，都有 $(x-1)x(x+1)(x+2)+1=(x^2+x-1)^2$.

正确灵活地运用上述性质解题，常常可以化繁为简，捷足先登.

例 1 计算 $\sqrt{2\,006\times2\,005\times2\,004\times2\,003+1}-2\,004^2$.

解： 由性质（3），原式 $=\sqrt{(2\,004^2+2\,004-1)^2}-2\,004^2=2\,004^2+2\,004-1-2\,004^2=2\,003$.

例 2 方程 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=0$ 的解为__________.

本例留给同学们去解，答案是 $x_{1,2,3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

例 3 n 为某一自然数，代入代数式 n^3-n 中计算其值时，四个同学算出如下四个结果，其中正确的结果只能是（　　）

A. 388 944　　B. 388 945　　C. 388 954　　D. 388 948

解： 因为 $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$，可以被 3 整除，而题设四个答案中只有 388 944 能被 3 整除，故应选 A.

例 4　证明方程 $x^3-x-2\,002=0$ 没有整数根.

同学们可仿例 3 的解题思路自行证之.

例 5　求证：$n(n+1)(2n+1)$（n 为整数）能被 6 整除.

证明：因为 $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)[(n-1)+(n+2)]=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$，两项都是三个连续整数之积，都能被 6 整除，故 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 6 整除.

例 6　已知 a、b 是两个连续正整数，$c=ab$，求证 $M=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 是奇数.

证明：设 $a=n$（n 是正整数），则 $b=n+1$，$c=n(n+1)$，

$M=\sqrt{n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2}=\sqrt{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}=\sqrt{[n(n+1)+1]^2}=n(n+1)+1$. 因为 $n(n+1)$ 是偶数，所以，$n(n+1)+1$ 是奇数. 故 M 必是奇数.

求自然数连乘积中所含某因数的个数

为方便起见，先介绍符号 $[x]$，它表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[2]=2$，$[\pi]=3$，$[-\pi]=-4$ 等.

不难验证，从 1 起的 m 个连续自然数中，含一个因数 n 的自然数有 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 个，含两个因数 n 的自然数有 $\left[\frac{m}{n^2}\right]$ 个，…因此，连乘积 $1\times2\times3\times\cdots\times m$ 中所含因数 n 的个数是

$$N=\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{m}{n^2}\right]+\left[\frac{m}{n^3}\right]+\cdots \qquad (1)$$

更一般地，$(i+1)(i+2)\cdots m$（i，m 都是自然数，并且 $m>i$）中所含因数 n 的个数等于从 1 起的 m 个连续自然数乘积中所含因数 n 的个数减去从 1 起的 i 个连续自然数乘积中所含因数 n 个数的数目.

例 7　下列五个数中有一个是 $1\times2\times3\times\cdots\times15$ 的结果，这个数是（　　）

A. 1 307 674 368 200　　B. 1 307 674 368 000

C. 1 307 674 368 500　　D. 1 307 674 368 010

E. 1 307 674 368 510

分析：从尾部 0 的个数作出判断行吗？试一试. 在连续自然数的乘

积中，因数 2 的个数显然多于 5 的个数．因此，其中所含因数 5 的个数也就是乘积得数尾部 0 的个数．而 $1\times2\times3\times\cdots\times15$ 中所含因数 5 的个数为 $[\frac{15}{5}]=3$，故应选 B.

例 8 $\frac{1\times2\times3\times\cdots\times99\times100}{6^{100}}$ 约简后所得分数的分母是__________.

解： 在 $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100$ 中，所含因数 2 的个数是 $[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{2^2}]+[\frac{100}{2^3}]+\cdots+[\frac{100}{2^6}]=50+25+12+6+3+1=97$．类似，可求得所含因数 3 的个数是 48．于是，$1\times2\times3\times\cdots\times99\times100=2^{97}\times3^{48}\times p$（其中 p 与 2、3 是互质数），故分母是 $2^3\times3^{52}$.

例 9 已知 $\frac{1\,001\times1\,002\times1\,003\times\cdots\times19\,999\times20\,000}{11^n}$ 是整数，则自然数 n 的最大值是__________.

解： 连乘积 $1\times2\times3\cdots\times19\,999\times20\,000$ 中所含因数 11 的个数为 $[\frac{20\,000}{11}]+[\frac{20\,000}{11^2}]+[\frac{20\,000}{11^3}]+[\frac{20\,000}{11^4}]=1\,818+165+15+1=1\,999$，$1\times2\times3\times\cdots\times1\,000$ 中所含因数 11 的个数为 $[\frac{1\,000}{11}]+[\frac{1\,000}{11^2}]=90+8=98$．故 n 的最大值是 $1\,999-98=1\,901$.

关于整数与自然数，我们先聊到这里．其他的一些知识，以后我们将会逐步接触到.

数学家年龄趣题

数学神童维纳

20 世纪著名数学家诺伯特·维纳（Nobort Wiener，公元 1894 年～1964 年），从小智力超常，三岁时能读写，十四岁就大学毕业了．几年后，他又通过了博士论文答辩，成为美国哈佛大学的科学博士．

在博士学位的授予仪式上，执行主席看到一脸稚气的维纳，颇为惊讶，于是就当面询问他的年龄．维纳不愧为数学神童，他的回答十分巧妙：“我今年岁数的立方是个四位数，岁数的四次方是个六位数，这两个数，刚好把十个数字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 全都用上了，不重不漏．这意味着全体数字都向我俯首称臣，预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业．”

维纳此言一出，四座皆惊，大家都被他的这道妙题深深地吸引住了．整个会场上的人，都在议论他的年龄问题．

其实这个问题不难解答，但是需要一点数字“灵感”．不难发现，21 的立方是四位数，而 22 的立方已经是五位数了，所以维纳的年龄最多是 21 岁；同样道理，18 的四次方是六位数，而 17 的四次方则是五位数了，所以维纳的年龄至少是 18 岁．这样，维纳的年龄只可能是 18、19、20、21 这四个数中的一个．

剩下的工作就是“一一筛选”了．20 的立方是 8 000，有 3 个重复数字 0，不合题意．类似地，19 的四次方等于 130 321，21 的四次方等于 194 481，都不合题意．最后只剩下一个 18，是不是正确答案呢？验算一下，18 的立方等于 5 832，四次方等于 104 976，恰好“不重不漏”地用完了十个阿拉伯数字，多么完美的组合！

这个年仅 18 岁的少年博士，后来果然成就了一番大事业，成为信息论的前驱和控制论的奠基人．

丢番图的墓志铭

丢番图（Diophantus，约公元246年～　年）是古希腊的一位数学家．据说，他墓碑上的碑文用一首诗大略地记述了他的生平：

这是一座石墓，里面安葬着丢番图．请计算下列数目，便可知他一生经过了多少个寒暑．他一生的六分之一是幸福的童年，十二分之一是无忧无虑的少年．再过去七分之一的生命旅程，他建立了幸福的家庭．五年后儿子出生，不料儿子竟先于父亲四年而终，年龄不过父亲享年的一半，晚年丧子老人真可怜，悲痛之中度过了风烛残年．请你告诉我，丢番图寿数几何？

根据这首诗给出的条件，我们可以用几种不同的方法求出丢番图去世时的年龄．

解法1（算术方法）：丢番图儿子出生前的五年与儿子去世后的四年加在一起，共占他一生的$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{84}$．所以，丢番图去世时的年龄为$9\div\frac{9}{84}=84$（岁）．

解法2（算术方法）：从诗的内容可知，丢番图去世时的年龄应是6、12、7、2的公倍数．由于$12=6\times2$，所以，为求丢番图的年龄，只需求12与7的公倍数．12与7的最小公倍数是84，下面的公倍数分别为168，252，…丢番图不可能活到168岁，所以，他去世时是84岁．

解法3（代数方法）：设丢番图去世时为x岁，依题意，得

$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$．解之，可得$x=84$（岁）．

请你根据计算结果把丢番图的去世年份填上．

多产的数学家欧拉

数学大师列昂纳德·欧拉（Leonhard Euler），在其一生中，为人类作出了卓越的贡献，留下了886篇论文和著作，几乎在数学的每个领域都有他的足迹．在他一生岁数的$\frac{1}{4}$那年，就发表了第一篇数学论文，

并且获得了巴黎科学院奖金. 7年后，他当上了彼得堡科学院的数学教授. 不幸的是，2年后他右眼失明了，但他仍以顽强的精神进行科学研究. 多年后，终因工作过度劳累，导致左眼也失明了. 然而他却以惊人的毅力，继续在黑暗的世界里凭着记忆和心算进行研究，并口传给他的学生著书. 从双眼失明到逝世的十七年里，他丝毫没有停止工作，口述了400篇论文，这正好是他当上彼得堡科学院数学教授后工作年数的8倍.

同学们，你听了这段故事有什么感想呢？请你想一想，数学家欧拉这一生活了多少岁？