

# 工科微分方程教程

黄建华 王 晓 编

国防科技大学出版社

# 工科微分方程教程

黄建华 王 晓 编

国防科技大学出版社  
·长沙·

## 内 容 简 介

本书是常微分方程和差分方程的理论、方法与数学实验相结合的一本教材。在编写过程中,遵循高等学校教学指导委员会关于常微分方程的教学基本要求,并讲述差分方程的基本理论和方法,力求知识体系相对完整,注重融入现代数学实验与数学建模思想,紧密结合工科专业背景,突出将严谨的数学理论和数学实验有机结合的特点,使抽象的理论易于理解和掌握。本教材的主要内容包括一阶常微分方程基本理论、线性微分方程组与高阶微分方程、微分方程定性理论与稳定性理论初步、一阶差分方程基本理论、差分方程组及其稳定性等。

本书可作为高等学校理工科专业常微分方程课程教材,可作为理工科学生数学建模与数学实验的参考书,也可供相关教学与科研人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

工科微分方程教程/黄建华,王晓编.—长沙:国防科技大学出版社,2009.12  
ISBN 978-7-81099-716-4

I. 工… II. ①黄… ②王… III. 微分方程—高等学校—教材 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 187672 号

国防科技大学出版社出版发行  
电话:(0731)84572640 邮政编码:410073  
<http://www.gfkdcbs.com>  
责任编辑:黄 煌 责任校对:王 嘉  
新华书店总店北京发行所经销  
国防科技大学印刷厂印装

\*

开本:787×1092 1/16 印张:10 字数:237 千  
2009 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-520 册  
ISBN 978-7-81099-716-4  
定价:30.00 元

# 前 言

顾名思义,本书是为工科学学生编写的微分方程教材,为那些已具有微积分和线性代数等大学数学基础、同时在专业课程的学习中需要更多更深入的微分方程知识的学生提供基本理论和方法,如工科指挥自动化、系统工程等专业便有这方面的强烈需求。我们知道,实际问题和数学理论并非浑然一体,只有对实际问题进行数学表示以后,才能利用各种数学方法对其进行研究,即所谓“数学建模”,它是用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学工具。微分方程和差分方程便是对实际问题建立数学模型的主要数学工具之一,它们可以精确或近似地描述和模拟自然界各种变化规律,广泛应用于物理、力学、工程、生物及经济等各个领域。

高等院校工科专业的常微分方程课程部分内容包含在传统的高等数学教材中,主要是用初等积分方法求解一阶线性微分、特殊高阶微分方程和二阶常系数线性微分方程解的结构等,对我校指挥自动化专业、系统工程专业等专业来讲,这些知识是很不够的。而现行的常微分方程教材很多是适合数学和其他理科专业的,为保持其内容的完整性和严密的逻辑性,这些教材大多用2~3章的内容重复讲授了传统高等数学中的微分方程内容,而且对微分方程基本理论讲述很深入,工科专业的大学生难以理解。差分方程是一种离散变化的数学模型,在某些场合,用离散变化来刻画连续变化,便于问题的处理和研究,如我校相关专业常常接触到较多的离散模型,如离散事件仿真模型、特拉法尔加战斗模型等都是差分方程模型,而经典的微分方程教材并不包含差分方程理论和方法,因此,编写一本适合我校情况的教材很有必要。

教材紧密结合指挥自动化和系统工程专业等专业背景和军事特色,讲述一阶微分方程的基本理论、线性微分方程组的求解,以及定性理论和稳定性理论初步,满足了自动控制专业、指挥自动化、系统工程专业等的专业要求,增加一阶差分方程的基本理论和求解方法、二阶差分方程组的求解及其稳定性理论初步等内容,最后紧密结合专业特色,给出了具有军事特色和仿真背景的应用案例,供学员学习和参考。在本教材的内容选取和处理中,一方面让读者了解微分方程和差分方程基本理论的概貌,同时考虑工科学学生的知识背景,对许多定理舍弃严格的理论证明,而只给出其直观描述和说明,通过具体例子重点

讲述定理的应用,这样大大降低了工科学生的学习难度。随着计算机技术的发展,尤其是功能强大的数学软件的出现,使我们能够利用计算机对微分和差分方程的解进行几何表示和数值计算,因此我们在教材中融入数学实验的手段和方法,注重 Mathematica 数学软件的辅助作用,突出数学理论和图形的有机结合,使学习内容更加形象生动。

使用本教材的读者需要具有微积分和线性代数的基本知识。根据我们的教学实施经验,40~46学时可以讲授本教材大部分内容。对数学软件不熟悉或不感兴趣的读者尽可略去相关内容,这不会影响对基本理论的理解和掌握,但我们鼓励读者在不经意中掌握数学软件的基本操作,享受通过计算机探索方程解的性质带来的无穷趣味。

本书的第一、二、三、四章由黄建华编写,第五、六章由王晓编写,全书由黄建华统稿。朱健民教授和李建平教授阅读了全部的书稿,提出了很多有益的建议和意见,并提供了部分数学实验,刘雄伟老师绘制了大部分插图,在此深表感谢!我们在编写过程中,参考了国内、外的部分常(差)微分方程教材和高等数学教材,列在书后作为参考文献,在此向这些参考文献的作者表示感谢。

由于作者水平的局限性,书中的不妥之处和错误,敬请读者批评和指正。

编者

2009年6月

## 目 录

## 第一章 微分方程与差分方程模型

§ 1.1 微分方程模型与基本概念 .....	( 1 )
§ 1.1.1 微分方程模型 .....	( 1 )
§ 1.1.2 微分方程的概念 .....	( 4 )
习题 1.1 .....	( 6 )
§ 1.2 差分方程模型与基本概念 .....	( 7 )
§ 1.2.1 离散模型 .....	( 7 )
§ 1.2.2 差分方程的概念 .....	( 9 )
习题 1.2 .....	( 10 )

## 第二章 一阶微分方程解的基本理论

§ 2.1 初等积分法 .....	( 11 )
§ 2.1.1 可分离变量的微分方程 .....	( 11 )
§ 2.1.2 齐次方程 .....	( 12 )
§ 2.1.3 一阶线性微分方程 .....	( 12 )
§ 2.1.4 伯努利方程 .....	( 14 )
§ 2.1.5 全微分方程 .....	( 14 )
§ 2.1.6 特殊可降阶的微分方程 .....	( 16 )
习题 2.1 .....	( 18 )
§ 2.2 积分曲线及其近似几何表示 .....	( 19 )
§ 2.2.1 积分曲线 .....	( 19 )
§ 2.2.2 线素场 .....	( 20 )

§ 2.2.3 欧拉折线 .....	(23)
习题 2.2 .....	(25)
§ 2.3 一阶微分方程解的存在唯一性 .....	(26)
习题 2.3 .....	(32)
§ 2.4 解的延拓与连续依赖性 .....	(33)
§ 2.4.1 解的延拓定理 .....	(33)
§ 2.4.2 解对初值和右端函数的连续依赖性 .....	(36)
习题 2.4 .....	(38)
§ 2.5 奇 解 .....	(39)
习题 2.5 .....	(43)

### 第三章 高阶线性微分方程与线性微分方程组

§ 3.1 高阶线性微分方程 .....	(44)
习题 3.1 .....	(50)
§ 3.2 常系数线性齐次微分方程组的特征根解法 .....	(51)
习题 3.2 .....	(58)
§ 3.3 常系数线性齐次微分方程组的矩阵指数解法 .....	(59)
习题 3.3 .....	(64)
§ 3.4 变系数线性微分方程组的解法 .....	(65)
习题 3.4 .....	(71)

### 第四章 微分方程定性和稳定性理论初步

§ 4.1 平面线性系统的初等奇点分类、稳定性及其相图 .....	(72)
§ 4.1.1 基本概念 .....	(72)
§ 4.1.2 平面线性微分方程组初等奇点的轨道稳定性 .....	(73)
§ 4.1.3 军备竞赛模型分析 .....	(77)
§ 4.1.4 奇点附近的相图 .....	(78)

习题 4.1 .....	( 83 )
§ 4.2 二维自治系统的周期解和极限环 .....	( 83 )
习题 4.2 .....	( 87 )
§ 4.3 李雅普诺夫稳定性理论初步 .....	( 88 )
§ 4.3.1 平面非自治系统零解的稳定性 .....	( 88 )
§ 4.3.2 Routh-Hurwitz 判据 .....	( 92 )
§ 4.3.3 李雅普诺夫直接方法(V-函数法) .....	( 93 )
习题 4.3 .....	( 96 )
§ 4.4 兰彻斯特军事模型及其定性分析 .....	( 97 )
习题 4.4 .....	( 99 )
 <b>第五章 线性差分方程</b>	
§ 5.1 线性差分方程解的基本性质 .....	( 100 )
习题 5.1 .....	( 103 )
§ 5.2 一阶线性差分方程 .....	( 103 )
§ 5.2.1 一阶变系数线性差分方程 .....	( 103 )
§ 5.2.2 一阶常系数线性差分方程 .....	( 107 )
习题 5.2 .....	( 110 )
§ 5.3 高阶常系数线性差分方程 .....	( 111 )
§ 5.3.1 基本概念及性质 .....	( 111 )
§ 5.3.2 二阶常系数线性差分方程 .....	( 115 )
习题 5.3 .....	( 121 )
 <b>第六章 差分方程(组)及其解的稳定性</b>	
§ 6.1 线性差分方程组的一般理论 .....	( 123 )
§ 6.1.1 解的存在与唯一性定理 .....	( 123 )
§ 6.1.2 线性差分方程组解的结构定理 .....	( 124 )



习题 6.1 .....	(125)
§ 6.2 常系数线性差分方程组 .....	(125)
§ 6.2.1 常系数线性差分方程组 .....	(125)
§ 6.2.2 几个实际问题中的二维常系数线性差分方程组 .....	(130)
习题 6.2 .....	(135)
§ 6.3 差分方程(组)解的稳定性 .....	(137)
§ 6.3.1 基本概念 .....	(138)
§ 6.3.2 齐次线性差分系统的稳定性及其判定 .....	(139)
§ 6.3.3 非线性差分系统的稳定性及其判定 .....	(140)
习题 6.3 .....	(142)
习题参考答案 .....	(144)
参考文献 .....	(150)

---

---

# 第一章 微分方程与差分方程模型

常微分(差分)方程是现代数学的一个重要分支,是人们解决各种实际问题的重要和有效的工具之一,它在几何、力学、物理、自动控制、电子技术、生命科学、航天、军事和经济等领域都有广泛的应用.这一章,我们先利用微分(差分)方程建立数学模型,再给出常微分方程和常差分方程的基本概念.

## § 1.1 微分方程模型与基本概念

### § 1.1.1 微分方程模型

#### 军备竞赛模型

20世纪80年代冷战期间,世界两大阵营军备竞赛日趋激烈,导致了国家防御经费增加,对国民经济产生很大影响.下面我们利用微分方程建立军备竞赛模型.

设  $A$ 、 $B$  两个国家参加军备竞赛,  $x$  表示  $A$  国的年防御费,  $y$  表示  $B$  国的年防御费. 假设这两个国家都只准备必要的防御,  $A$  国的防御经费支出率依赖于多个因素,不考虑与  $B$  国或与  $A$  国不和睦的国家的任何支出费用,假设其防御支出率  $\frac{dx}{dt}$  按已经支出额的比例减少,即

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad a > 0 \quad (1.1.1)$$

比例常数  $a$  代表了维护现有军火库所需费用,以及对防御支出在经济上的限制。

当  $A$  国侦察到  $B$  国也正在进行防御支出时,  $A$  国为了保持自身的安全,势必会被迫增加它的防御预算,以抵消它的竞争对手不断积累起来的防御力量. 假设  $A$  国所增加的防御支出率和  $B$  国的防御支出率成比例,比例系数  $b$  依赖于对  $B$  国的武器威力的一种评估. 在  $B$  国对它的武器库进行更新、升级或增加现代化的武器的时候,  $A$  国也会对自己的武器库更新、升级或增加现代化的武器装备,而增加的数量取决于对  $B$  国的更新或增加武器威力的评估. 因此, (1.1.1) 式应修正为

$$\frac{dx}{dt} = -ax + by \quad (1.1.2)$$

例如,当  $B$  国对自己的武器库添加现代化的武器 100 件时,  $A$  国可能会增加 40 件武

器作为回应;但当  $B$  国给武器库添加现代化的武器 200 件时,  $A$  国可能会增加 75 件武器作为回应. 因此,  $b$  应该是关于  $y$  的减函数, 表明对竞争对手武器增加的有效性作出回应效果会有某种减弱的趋势.

最后还需考虑到  $A$  国对  $B$  国的所有潜在的不安因素的对策, 即使两个国家的防御支出均为零, 出于对敌方未来可能的侵略行为的担心,  $A$  国仍然觉得有必要增加强有力的武器来对抗  $B$  国, 用  $c$  表示威慑或不安因素, 得到下面修正的模型

$$\frac{dx}{dt} = -ax + by + c$$

对  $B$  国可以作类似的分析, 得到

$$\frac{dy}{dt} = mx - ny + p$$

其中  $m, n, p$  为非负常数, 其意义分别与  $b, a, c$  相同. 于是我们得到下面的军费支出模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by + c \\ \frac{dy}{dt} = mx - ny + p \end{cases} \quad (1.1.3)$$

利用第四章的微分方程定性理论对(1.1.3)式进行分析后可知, 当  $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$  时, 随着时间的推移,  $x(t)$  和  $y(t)$  无限增加, 因此会出现军备经费失控; 当  $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$  时, 两个国家的防御支出达到稳定程度, 彼此不构成威胁, 因此两个国家都受益. 从中可以看到, 国家之间通过相互合作、相互尊重和实行裁军政策, 可以降低紧张的程度和威胁感, 避免出现失控的军备竞赛局面.

### 兰彻斯特作战模型

在第一次世界大战期间, 兰彻斯特从他所建立的作战数学模型研究中, 得出了所谓的“兰彻斯特平方定律”, 由此阐明了“军队的集中在战争中的重要性”的观点. 下面我们用微分方程建立兰彻斯特作战模型.

在甲、乙双方的一次战役中, 甲乙双方在开始时投入战士数分别为  $x_0$  和  $y_0$ ,  $t$  时刻甲乙双方战士数分别为  $x(t)$  与  $y(t)$ , 甲乙双方战斗的有效系数(包括士气、武器装备、指挥艺术等)分别为  $b(b > 0)$  和  $a(a > 0)$ , 即甲方(乙方)部队中平均一个士兵使乙方(甲方)士兵在单位时间内的减员数为  $b(a)$ . 如果把士兵病故、逃亡等因素忽略不计, 假设双方没有兵力增援, 那么两正规部队作战的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = -bx \end{cases} \quad (1.1.4)$$

满足初值条件

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (1.1.5)$$

称式(1.1.4)、式(1.1.5)为兰彻斯特基本战斗模型. 由于负的战斗力量是没有意义的, 因此我们总假设  $x \geq 0, y \geq 0$ .

将系统(1.1.4)的第2个方程关于  $t$  求导得到

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt}$$

再将第一个方程代入上式, 得到一个二阶常系数微分方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - aby = 0 \quad (1.1.6)$$

如果我们设在  $t$  时刻甲乙双方部队士兵的增援率分别为  $f(t)$  与  $g(t)$ , 则有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx + g(t) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

通过著名的日军与美军硫磺岛战役来讨论非齐次模型(1.1.7). 硫磺岛位于东京南 1062km. 第二次世界大战中, 美日双方在此岛上进行了一个月的激烈战斗, 成为第二次世界大战中最大的战役之一. 美军 1945 年 2 月 19 日开始进攻硫磺岛, 28 天后宣布占领了该岛, 实际到第 36 天才停止战斗. 有关资料表明, 战斗开始时, 岛上的日军数目为 21 500 人, 以后未补充; 而美军登陆士兵数目如下: 第一天 54 000 人, 第二天未增援, 第三天增援 6000 人, 第四、五天未增援, 第六天增援 13 000 人, 以后未再增援. 战斗结束时, 美军存活人数为 52 735 人, 而日军则全军覆没.

下面来建立其战斗模型. 设  $t$  时刻美军、日军的存活数分别为  $x(t)$  与  $y(t)$ , 美日两军的战斗有效系数分别为  $b$  和  $a$ , 由兰彻斯特模型可知:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 21\,500 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

其中美军的增援函数为

$$f(t) = \begin{cases} 54\,000, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 6000, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 5 \\ 13\,000, & 5 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

方程组(1.1.8)是一阶非齐次线性微分方程组的初值问题.

通过硫磺岛战役的实际数据分析可以看出, 兰彻斯特基本战斗模式比较科学和客观地反映了在战争中敌对双方的战斗力变化规律; 尤其是对增援函数的描述, 更加科学地反映了敌对双方战斗力的变化. 在后面的定性分析中, 我们将给出著名的“兰彻斯特平方

律”的数学解释.

### 单摆模型

将一个形状、大小都可以看成质点的小球系在不计伸长和质量的细线上,假设细线的长度为  $L$ ,单摆偏离垂直方向  $\theta$  角后,在垂直平面上运动,如图 1.1 所示.

设小球的质量为  $m$ ,忽略空气阻力,单摆仅在重力的作用下作有限振动,由牛顿第二定律可得到单摆的运动方程

$$m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\sin \theta}{L} mg = 0$$

整理得到

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

若记

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

称  $\omega_0$  为固定角频率,当  $\theta$  较小时,则有  $\sin \theta \approx \theta$ . 此时,单摆的运动方程变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

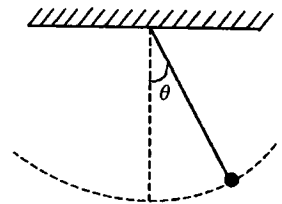


图 1.1 单摆

### § 1.1.2 微分方程的概念

我们先给出微分方程及其解的一般定义,再利用几个模型来阐述微分方程的初值问题.

**定义 1.1.1** 含有自变量  $x$ 、未知函数  $y$  以及未知函数导数的等式称为常微分方程,简称微分方程. 在微分方程中,未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的阶.

下面是一些常微分方程的例子.

$$\frac{dy}{dx} = kx \quad (k \text{ 为常数}) \quad (1.1.9)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0 \quad (\text{其中 } a \neq 0, \text{ 为常数}) \quad (1.1.11)$$

其中,方程(1.1.9)和(1.1.10)是一阶微分方程,(1.1.11)是二阶微分方程.

一般的  $n$  阶微分方程的形式为

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0 \quad (1.1.12)$$

若  $F$  关于未知函数  $y$  以及未知函数的各阶导数的全体而言为一次的,则称它是线性微分方程;否则称它为非线性微分方程. 特别地,称下面的  $n$  阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x) \quad (1.1.13)$$

为  $n$  阶线性微分方程. 例如,方程(1.1.9)和(1.1.11)分别为一阶和二阶线性微分方程,而

方程(1.1.10)为一阶非线性微分方程.

**定义 1.1.2** 设函数  $y = \varphi(x)$  在区间  $I$  上连续, 且有直到  $n$  阶的导数. 如果将  $y = \varphi(x)$  及其各阶导数代入(1.1.12)式中, 使之成为关于  $x$  在区间  $I$  上的恒等式

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

则称  $y = \varphi(x)$  为方程(1.1.12)在  $I$  上的一个解.

由定义可以直接验证:  $y = ce^{kx}$  是方程(1.1.9)在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的解,  $y = \tan x$  是方程(1.1.10)在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上的一个解,  $y_1 = \sin ax$  和  $y_2 = \cos ax$  都是方程(1.1.11)在  $(-\infty, +\infty)$  上的解. 而对任意常数  $C_1, C_2$ ,  $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$  也是方程(1.1.11)在同一区间上的解.

**定义 1.1.3**  $n$  阶微分方程(1.1.12)的包含  $n$  个相互独立的任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  的解  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  称为它的通解.

例如,  $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$  是方程(1.1.11)在  $(-\infty, +\infty)$  内的通解, 其中  $C_1, C_2$  是两个任意常数. 定义 1.1.3 中  $n$  个常数是独立的, 意指不能通过合并而减少常数的个数. 例如  $y = C_1 \sin ax + C_2 \sin ax$  不是方程(1.1.11)的通解, 因为

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \sin ax = (C_1 + C_2) \sin ax$$

实际上解中只含一个任意常数  $C = C_1 + C_2$ . 又例如,  $y = (C_1 + C_2^2) \sin ax$  和  $y = C_1 e^{C_2} \cos ax$  均为方程(1.1.11)在  $(-\infty, +\infty)$  内的解, 但由于  $C_1 + C_2^2$  和  $C_1 e^{C_2}$  各表示一个常数, 因此上述两解也不构成方程(1.1.11)的通解.

**定义 1.1.4** 方程(1.1.12)不含任意常数的解称为一个特解.

例如  $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x + \sin x$  都是  $y'' + y = 0$  的特解. 为了确定微分方程的一个特解, 我们可以给出确定解的条件, 称之为微分方程的定解条件, 常用的定解条件是初始条件, 即指定  $n$  阶微分方程(1.1.12)的解在某一点  $x = x_0$  所满足的条件:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.1.14)$$

方程(1.1.2)联合初始条件(1.1.14)统称为常微分方程的初值问题.

在常微分方程课程中, 我们将用 Mathematica 软件来处理一些计算问题和解的定性理论分析问题, 例如平衡点附近的轨线分布、周期解、积分曲线等. 我们对 Mathematica 软件不作系统的介绍, 只是在需要的地方给出使用方法. 求解微分方程的基本命令语句格式见表 1.1.

表 1.1 求解微分方程的基本命令语句格式

表达式格式	表达式意义
DSolve[微分方程, $y[x], x]$	求微分方程的通解, 格式 1
DSolve[微分方程, $y, x]$	求微分方程的通解, 格式 2
DSolve[{微分方程, 定解条件}, $y[x], x]$	求微分方程满足定解条件的特解
DSolve[{微分方程, 定解条件}, $y, x]$	求微分方程满足定解条件的特解

例 1.1.1 利用 Mathematica 软件求微分方程  $y' = 3xy$  的通解.

解 输入命令

$$\text{DSolve}[y'[x] == 3 * x * y[x], y[x], x]$$

得到该方程的通解为

$$y[x] \rightarrow e^{\frac{3x^2}{2}} C[1]$$

例 1.1.2 利用 Mathematica 软件求微分方程  $y' = -x(y^2 + y)$ ,  $y(2) = 1$  的特解.

解 输入命令

$$\text{DSolve}[y'[x] == -3 * x * (y[x] + (y[x])^2), y[2] == 1, y[x], x]$$

得到特解为

$$y(x) = -\frac{e^6}{e^6 - 2e^{\frac{3x^2}{2}}}$$

## 习题 1.1

1. 指出下列方程的阶数,并说明它们是线性方程还是非线性方程.

(1)  $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$ ;

(2)  $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2\theta$ ;

(3)  $(y')^2 + 2xy' - 2y = 0$ ;

(4)  $xy'' - 2y' + y^2 = 0$ .

2. 验证  $y = e^{2x}$  是方程  $y'' - 4y = 0$  的解.

3. 验证  $y = 2(\sin 2x - \sin 3x)$  是初值问题  $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 10\sin 3x \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = -2 \end{cases}$  的特解.

4. 验证函数  $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$  是微分方程  $y'' - 4y = 0$  的解,进一步验证它是通解.

5. 设一阶微分方程的通解为  $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}$  ( $C$  是任意常数),求此微分方程.

6. (湖南马王堆汉墓考古)根据原子物理学理论,放射性同位素碳-14(记作 $^{14}\text{C}$ )在  $t$  时刻的蜕变速度与该时刻 $^{14}\text{C}$ 的含量成正比,活着的生物通过新陈代谢不断地摄取生物体内的 $^{14}\text{C}$ ,与空气中的 $^{14}\text{C}$ 百分含量相同.生物死亡之后立即停止摄取 $^{14}\text{C}$ ,并且尸体中的 $^{14}\text{C}$ 开始蜕变.假定生物死亡时体内 $^{14}\text{C}$ 的含量为  $x_0$ ,我们先研究死亡生物体内 $^{14}\text{C}$ 含量随时间  $t$  的变化规律,并运用这一规律来推断出湖南长沙马王堆一号墓是哪个时代的墓葬.

7. (导弹跟踪飞机问题)设在初始时刻  $t = 0$  时导弹位于坐标原点  $(0, 0)$ ,飞机位于点  $(a, b)$ ,飞机沿着平行于  $x$  轴的方向以常速  $v_0$  飞行.导弹在时刻  $t$  的位置为点  $(x, y)$ ,且速度为常值  $v_1$  ( $v_1 > v_0$ ).导弹在飞行过程中,按照制导系统始终指向飞机.试建立导弹飞行的微分方程模型.

8. (食饵—捕食模型)考虑在一个生态系统中有两个种群  $A, B$ .对于寿命比较长、世代重叠的种群,当种群个体数量很大时,其数量变化可以近似地看成是一个连续变化过程,这种情形常常可以用微分方程来描述.20 世纪 20 年代,意大利生物学家棣安考纳曾

研究过相互制约的各种鱼类总数的变化情况,特别是在第一次世界大战期间意大利各港口所获各种鱼类总量占渔获量的百分比的资料.表 1.2 为 1914~1923 年间意大利阜姆港收购的软骨掠肉鱼(如鲨等)所占比例.

表 1.2

年	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
%	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

从表 1.2 可以发现,在战争期间软骨掠肉鱼百分比急剧增加,战争期间捕鱼量大大降低了,所以软骨鱼得到更多食物,战争期间软骨鱼增加了,它们可以迅速繁殖.但同时食用鱼也同样增加了.试用微分方程建立数学模型.

9. 用 Mathematica 软件求解微分方程  $\frac{dy}{dx} = x(1 - \frac{x}{10})$  的通解.

10. 用 Mathematica 软件求解微分方程初值问题  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+4y^2)}{1+x^4}$ ,  $y(1) = 0$  的特解.

## § 1.2 差分方程模型与基本概念

在常微分方程中,未知函数  $y$  和自变量  $x$  均是连续变化的.但在实际问题中,它们往往都是离散的,此时就不能用导数来刻画变化率.因此,常用在时间区间段上的差商来近似地表示变量的变化率,与微分方程相对应的便是差分方程.许多模型都可以用差分方程(组)来描述,对这些差分方程进行分析,可以预测这些模型的性态.

### § 1.2.1 离散模型

#### 种群动力学模型

在种群生态学中,每年夏季,蚕、蝉等这类昆虫成虫产卵后全部死亡,第二年春天每个虫卵孵化成一个虫子.假设第  $n$  年的昆虫数目为  $P_n$ ,每年一个成虫平均产  $a$  个虫卵,则第  $n+1$  年的昆虫数为

$$P_{n+1} = aP_n \quad (1.2.1)$$

由于成虫之间为食物等竞争,以及受传染病、自然界天敌等因素影响而减少,假设减少数与现阶段的昆虫成虫数的平方成比例,比例系数为  $b(0 < b < 1)$ ,则实际的昆虫数应为

$$P_{n+1} = aP_n - bP_n^2 \quad (1.2.2)$$

#### 蛛网模型

在工业生产中,许多商品的生产和销售具有周期性,使得商品的投资、销售价格、产量和销售量在一定时期是稳定的,因而在较长一段时期内,这些数据是离散的,我们主要研究商品的销售价格和产量之间的变化规律.

把时间离散化为  $n$  段( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),一个时期相当于商品的一个生产周期,设第  $n$  个阶段某商品的产量为  $x_n$ ,相应的价格为  $y_n$ ,利用价格和产量的关系可知:



$$y_n = f(x_n) \quad (1.2.3)$$

其中  $f(\cdot)$  为需求函数. 出于对自由经济的理解, 商品的数量越多, 其价格就越低, 因此, 我们可作假设如下: 需求函数为一个单调下降函数. 再假设下一个阶段的产量  $x_{n+1}$  由公司高层根据这一阶段产品的价格确定, 即

$$x_{n+1} = h(y_n) \quad (1.2.4)$$

其中  $h$  是单调增加的对应关系, 由方程(1.2.3)和(1.2.4)可以建立差分方程

$$x_{n+1} = h[f(x_n)], \quad y_{n+1} = f[g(y_n)] \quad (1.2.5)$$

$g$  也是单调增加的对应关系.

为研究产量  $x_n$  和价格  $y_n$  的变化过程, 将点列  $P_n(x_n, y_n)$  和  $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$  用折线连接起来, 从中分析迭代映射的规律, 其中

$$(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n)), \quad (x_{n+1}, y_n) = (x_{n+1}, g(x_{n+1}))$$

其对应的图形就像蛛网一样, 因此称该模型为蛛网模型.

从图 1.2 可以看出,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n, y_n) = P_0(x_0, y_0)$$

即市场经济将趋于稳定.

### 特拉法尔加战斗模型

在 1805 年的特拉法尔加战斗中, 由拿破仑指挥的法国、西班牙海军联军和由海军上将纳尔逊指挥的英国海军作战. 一开始, 法西联军有 33 艘战舰, 而英军有 27 艘战舰, 假设在一次遭遇战中双方的战舰损失都是对方战舰的 10%, 分数值表示有一艘或多艘战舰不能全力以赴地参加战斗. 令  $n$  表示战斗过程中遭遇战的阶段,  $B_n$  表示第  $n$  阶段英军的战舰数,  $F_n$  表示第  $n$  阶段法西联军的战舰数, 那么在第  $n$  阶段的遭遇战后, 双方的剩余战舰数为

$$\begin{cases} B_{n+1} = B_n - 0.1F_n \\ F_{n+1} = F_n - 0.1B_n \end{cases} \quad (1.2.6)$$

下面对离散模型(1.2.6)进行分析. 将初始值  $B_0 = 27, F_0 = 33$  分别代入模型(1.2.6)中, 直接计算可得到

$$B_1 = 27 - 0.1 \times 33 = 23.7, \quad F_1 = 33 - 0.1 \times 27 = 30.3 \quad (1.2.7)$$

再将第一阶段的值式(1.2.7)代入离散模型(1.2.6)中可得

$$B_2 = 23.7 - 0.1 \times 30.3 = 20.67, \quad F_2 = 27.93$$

这样迭代下去, 得到战斗模型的数值解  $B_1, F_1, B_2, F_2, B_3, F_3, \dots$ , 见表 1.3.

从表 1.3 中可以看出, 对于全部军力投入的情形, 我们看到英军将全面失败, 只剩下 3 艘战舰且至少 1 艘战舰遭到严重破坏. 在战斗结束时, 经历了 11 个阶段的战斗后, 法西联军的舰队大约还有 18 艘战舰.

从上面的分析可以看出, 差分方程的一组初值对应着一个战斗策略, 在军事指挥上, 也叫一个作战想定. 研究“纳尔逊爵士分割并各个击破”的策略, 实际上就是研究差分方

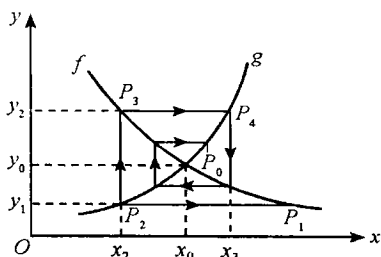


图 1.2 蛛网模型