21世纪高等职业院校精品规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编／文伟 吴强
副主编／彭仲元 窦海玲 葛 琳

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业院校精品规划教材

高等数学

主　编:文　伟　吴　强
副主编:彭仲元　窦海玲　葛　琳

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

根据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识. 全书共10章，内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数微分学的应用，不定积分，定积分，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，二元函数积分学，行列式、矩阵与线性方程组.

本书可作为高职高专类高等数学课程的教材，也可作为相关工程技术人员参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/文伟，吴强主编. —天津：天津大学出版社，2009.8

ISBN 978-7-5618-3193-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①文…②吴… Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第152436号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址	www.tjup.com
印　　刷	天津泰宇印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	169mm×239mm
印　　张	14
字　　数	299千
版　　次	2009年8月第1版
印　　次	2009年8月第1次
印　　数	1-3000
定　　价	25.00元

前　言

高等数学作为一门基础课程，内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远. 它不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力、综合利用所学知识分析问题解决问题的能力、自主学习能力和创新能力上都具有非常重要的作用.

目前一些高职高专教材缺乏针对性、实用性，难以做到因材施教，影响教学效果. 本教材是根据教育部制订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，认真总结全国高职高专高等数学教改的经验，结合工科各专业教学的特点，着力体现当前高职高专教学模式转变的要求，突出针对性、适用性和实用性而编写的. 书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍和数学方法的应用，让学生更多地接触应用数学知识、数学方法解决工程实际问题的实例，增强学生的应用意识和能力.

在本书的编写过程中我们注意以下几点.

(1)采用以“案例导入教学”的编写模式. 对基本概念的叙述清晰准确，通俗易懂，有利于激发学生的学习兴趣及培养学生用数学的原理和方法分析工程概念和工程原理等专业知识的能力.

(2)对例题的选配力求典型多样，具有代表性和启发性. 难度上层次分明，注意解题方法的总结，强调基本运算能力的培养和理论的实际应用，注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养.

(3)每章或每节开始尽可能用简短的语言点题，使读者了解本章或本节所研究的基本内容，以起到承上启下的作用，增强可读性.

(4)每节后面附有配合例题的典型习题，题量适中，难度适宜. 主要为学生巩固基本知识提供素材.

(5)为缓解课时少与教学内容多之间的矛盾，恰当地把握教学内容的深度和广度，定理的证明简明易懂，难度较大的理论问题则不过分强调论证的严密性，有的仅给出结论而不加证明.

(6)充分考虑高职高专学生特点，以符合高职高专学生的认知结构，便于学生自学. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题能力的培养.

本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识. 全书以微积分学为核心内容，一元函数和多元函数是微积分研究的主要对象，微分方程则作为微积分学的延伸和应用. 本书共分 10 章，内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数

微分学的应用，不定积分，定积分，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，二元函数积分学，行列式、矩阵与线性方程组.本书可作为高职高专类高等数学课程的教材，也可作为有关工程技术人员的参考用书.

参加本书编写工作的编者，均为广东省茂名职业技术学院多年从事数学教学的一线教师.本书由集体讨论，分章编写.由文伟、吴强任主编，彭仲元、窦海玲、葛琳任副主编.编写过程中也得到了学院领导的大力支持，在此表示感谢！

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不妥之处，欢迎专家、同行及读者批评指正，以使本书在教学实践中不断完善.

编者

2009 年 4 月

目　录

第 1 章　函数 极限 连续

1.1　函　数

1.1.1　区间与邻域

本书中所讨论的数都是实数.关于集合的初步知识在中学已经详细学过了,本书以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,则把数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

它在数轴上表示点 a 与 b 之间的线段,但 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

它在数轴上也表示点 a 与 b 之间的线段,且 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地,可定义半开半闭区间:

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\};[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,上述区间都称为有限区间,区间的长度为 $b-a$.此外还有所谓的无限区间,如

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};(a,+\infty)=\{x|a<x\},(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\},$$

其中,记号"$+\infty$"、"$-\infty$"分别读作"正无穷大"和"负无穷大",仅仅是一个符号,不是数,因此不能把它们当作数来进行运算.

以点 a 为中心的任何开区间称为 a 的邻域,记作 $U(a)$.

开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$,其中 $\delta>0$,称为点 a 的 δ 邻域,记作 $N(a,\delta)$,即

$$N(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\},$$

点 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径.

在点 a 的 δ 邻域中去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\overline{N}(a,\delta)$,即

$$\overline{N}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\},$$

这里,$0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

1.1.2　函数的概念

函数是微积分学的主要研究对象,它的实质就是变量之间的对应关系,下面给出函

数的定义.

定义 设 $D\subset\mathbf{R}$，如果有某一对应法则，使得对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值与 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，函数值 $f(x)$ 的全体所组成的集合称为函数 y 的值域，记作 M 或 $f(D)$.

在函数 $y=f(x)$ 中记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应法则，也可以改用其他字母，如 F、φ、f_1、f_2 等. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数是相同的，否则是不同的.

有些函数虽然也可用数学式子表示，但它们在定义域的不同范围内有不同的表达式，这样的函数叫做分段函数. 也就是说，分段函数是用几个式子来表示一个函数.

例如，$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

函数定义域的确定，一般按两个方面考虑：一方面，在实际问题中，应根据变量的实际变化范围来确定定义域；另一方面，在数学中，当函数通过表达式表示时，定义域就是使该式子有意义的自变量的集合. 具体可分为几种情况：①分母不能为零；②偶次根式中的被开方式子必须非负；③对数的真数必须大于零；④若函数表达式由若干子项组成，它的定义域是各子项定义域的交集；⑤分段函数的定义域是其各个表达式的定义范围的并集.

例 1 求函数 $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ 的定义域.

解 当分母 $x-3\neq0$ 时，此函数式有意义. 因此函数的定义域为 $x\neq3$ 的全体实数，用区间表示为：$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

例 2 确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 的定义域.

解 要使函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 有意义，必须使 $\begin{cases}1-x^2\geqslant0,\\ x>0\end{cases}$ 成立，解此不等式组得 $0<x\leqslant1$，所以函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 的定义域是 $(0,1]$.

例 3 已知函数 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(0)$ 及 $f(t+1)$.

解 只需把 $x=0$ 和 $x=t+1$ 分别代入函数表达式，计算即可.

$$f(0)=0^2-3\times0+1=1,$$

$$f(t+1)=(t+1)^2-3(t+1)+1=t^2-t-1.$$

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 求函数的定义域及 $f(0)$、$f(-5)$、$f(5)$ 的值.

解 显然函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}$，

$$f(0)=0,\ f(-5)=-5-1=-6,\ f(5)=5+1=6.$$

函数的表示方法如下.

(1)解析法(公式法) 用数学式子表示函数关系的方法,也称公式法.前面所列的那些函数的例子都是用解析法表示,优点是便于理论推导与计算,缺点是不直观,而且有些实际问题中的函数往往难于用解析法来表示.

(2)列表法 将自变量的值与对应的函数值列成表格表示函数关系的方法.如对数表、三角函数表、企业产值表等,其优点是函数值容易查得,缺点是表中所列数值往往不完全.

(3)图像法 用图像表示函数关系的方法,优点是直观形象,可清楚看到函数的变化趋势,此法在工程技术上应用较普遍.

1.1.3 函数的几种属性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在正数 M,使得对一切 $x\in X$,均有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 内有界;若这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 内无界. 例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|\sin x|\leqslant 1$. 反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $[0.1,1]$ 上是有界的,但在 $(0,1)$ 内无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,若对于任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 且 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增(或单调递减). 单调递增函数及单调递减函数统称为单调函数,使函数 $f(x)$ 为单调函数的区间称为单调区间.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增,但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数. 函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的.

3. 奇偶性

设函数的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数;如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数. 而不满足奇函数和偶函数定义的函数叫非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称. 函数 $y=\sin x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

例 5 研究函数 $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ 和 $g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$ 的奇偶性($a>0,a\neq 1$).

解 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数,而

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x),$$

$$g(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{2}=-\frac{a^x-a^{-x}}{2}=-g(x).$$

因此，$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$是偶函数，$g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$是奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于一切的 $x\in D$，有$(x+T)\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常所说的周期是指函数的最小正周期.

例如，函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$、$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.4 初等函数

在中学学习了如下几类函数.

(1)常数函数：$y=C$ (C 为常数).

(2)幂函数：$y=x^n$(n 是实数).

(3)指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(4)对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(5)三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6)反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

人们把这 6 种函数统称为基本初等函数. 关于它们的图形和简单性质，在中学里已作过详细介绍. 为了介绍初等函数，首先引入反函数和复合函数的概念.

1. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，对于值域 M 中任一数值 y，在定义域 D 内可以确定唯一的 x 值与 y 对应，由此得到以 y 为自变量的函数，该函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

注：(1)习惯上，总是用 x 表示自变量，y 表示函数，因此，$y=f(x)$ 的反函数可以写成

$$y=f^{-1}(x),x\in M;$$

(2)在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2. 复合函数

现在举例说明一些复杂函数的构成情况，函数 $y=\ln\sin x$ 可以分解为

$$y=\ln u,u=\sin x,$$

这里 u 称为中间变量.

定义 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则对任意 $x\in D$，通过 $u=\varphi(x)$，变量 y 有唯一的值 $f(u)$ 与之对应，该函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，D 是它的定义域，u 称为中间变量.

例 6 设函数 $f(x)=x^3$，$\varphi(x)=\sin\sqrt{x}$，求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$、$f[f(x)]$.

解 由 $f(x)$、$\varphi(x)$ 的表达式得

$$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^3=\sin^3\sqrt{x}.$$

$$\varphi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin x^{\frac{3}{2}}.$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^3=(x^3)^3=x^9.$$

注：(1) 函数 φ 与 f 能构成复合函数的条件是函数 φ 的值域必须包含于 f 的定义域内. 例如，$y=\arcsin u$、$u=3+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数复合而成，例如，$y=\sqrt{\tan\frac{x}{3}}$ 看成是由 $y=\sqrt{u}$、$u=\tan v$、$v=\frac{x}{3}$ 这 3 个函数复合而成.

例 7 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=(\sin 5x)^3$；　(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$；　(3) $y=\arctan(\sin e^{4x})$.

解 (1) $y=(\sin 5x)^3$ 是由 $y=u^3$、$u=\sin v$、$v=5x$ 复合而成.

(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\ln u$、$u=1+\sqrt{v}$、$v=1+x^2$ 复合而成的.

(3) $y=\arctan(\sin e^{4x})$ 是由 $y=\arctan u$、$u=\sin v$、$v=e^w$、$w=4x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所构成，并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=x^2+\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$、$y=3xe^{\sqrt{1-x^2}}+2$ 等都是初等函数，而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0\end{cases}$$

不是初等函数，因为它在定义域内不能用一个解析式表示. 本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

1.1.5 函数关系的建立

一些实际问题，常用分析该问题中的变量之间的等量关系来建立函数关系. 下面举例说明通过建立函数关系式解决实际问题的一般方法.

例 8 已知一有盖的圆柱形铁桶，容积为 v，试建立圆柱形铁桶的表面积 S 与底面积半径 r 之间的函数关系式.

解 设铁桶的高为 h，由 $v=\pi r^2 h$ 得 $h=\frac{v}{\pi r^2}$，则

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r\frac{v}{\pi r^2}+2\pi r^2,$$

即
$$S=\frac{2v}{r}+2\pi r^2\qquad(0<r<+\infty).$$

例 9 从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0(元)，按铁路部门的规定，身高在 1.1 m

以下的儿童免票，身高超过 1.1 m 但不足 1.4 m 的儿童购买半价票，身高超过 1.4 m 者购买全票，试写出从甲地到乙地票价 q 作为身高 s 的函数关系式.

解 设身高为 s 米，票价为 q 元，据题意，有

$$q=\begin{cases}0, & 0<s<1.1,\\ \frac{1}{2}q_0, & 1.1\leqslant s<1.4,\\ q_0, & s\geqslant 1.4.\end{cases}$$

习题 1-1

1. 用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1-x^3}$； (2) $y=\sqrt{3x-2}$；

(3) $y=\frac{1}{\ln(4x-3)}$； (4) $y=\frac{1}{x+1}-\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\frac{\ln(5x-4)}{\sqrt{x^2-4}}$； (6) $y=\tan(2x+3)$；

(7) $y=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1+x, & x>0.\end{cases}$

2. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=x^2+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(x+1)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(-3)$，$f[f(-1)]$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(3) $f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

4. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^5+3x^3-2x$； (2) $f(x)=x\cos x$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (4) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$；

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$； (6) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin(2x-1)$； (2) $y=\sqrt{3+2x}$；

(3) $y=5(x+2)^3$； (4) $y=\ln[\sin(\frac{3}{2}x)]$；

(5) $y=\arcsin[\lg(3x-4)]$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

6. 将下列各题中的 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=u^2, u=\sin v, v=2^x$；　　(2) $y=\ln u, u=\sqrt{v}, v=1+\tan x$；

(3) $y=3^u, u=v^2, v=2x+1$；　　(4) $y=e^u, u=\sin x$.

7. 设一矩形，长为 x，面积为 A，周长为 s.

(1)若已知面积 A 一定，将周长 s 表示为 x 的函数；

(2)若已知周长 s 一定，将面积 A 表示为 x 的函数.

8. 某公共汽车运行的路线全长 20 km，票价规定为：乘坐 4 km 以下者收费 3 元，乘坐 4 至 10 km 收费 5 元，10 km 以上收费 7 元，试建立票价与路程的函数关系.

1.2 极限的概念

极限描述的是变量在某个变化过程中的变化趋势，其实，这样的描述在日常生活中人们是经常用到的. 极限是高等数学中的一个非常重要的概念，是微积分的灵魂. 极限理论的建立，使微积分有了坚实的理论基础，并使微积分在当今科学的各个领域得以广泛、合理、深刻地应用和发展. 下面从大家最熟悉的数列出发，介绍极限的基本概念.

1.2.1 数列极限

数列是按一定次序排列的一列数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

简记为 $\{a_n\}$. 数列也可以看作是定义在正整数集合上的函数

$$a_n=f(n) \qquad (n=1,2,\cdots),$$

a_n 称为数列的第 n 项或通项.

注：*数列就它的项数可分为有穷数列和无穷数列. 项数 n 是有限的数列称为有穷数列，项数 n 是无限的数列称为无穷数列.*

例如，数列：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$，该数列的通项 $a_n=\frac{1}{2^n}$. 当 n 无限增大时，2^n 也无限增大，其倒数 $\frac{1}{2^n}$ 会随之越变越小，无限地趋近于 0.

由上述的例子，我们给出关于数列极限的定义如下.

定义　给定一个无穷数列 $\{a_n\}$，如果当 n 无限增大时，a_n 无限地趋近于某一确定的常数 A，则称常数 A 为数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋于无限大时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A$$

或

$$a_n\to A \quad (n\to\infty).$$

这时也称数列 $\{a_n\}$ 收敛，即当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 否则，如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称该数列发散.

这里所说的 a_n 无限地趋近于某一确定的常数 A，是指 a_n 与 A 的差的绝对值 $|a_n-$

$A|$越来越小,可以小到任意程度.

例 1 观察以下数列的变化趋势,讨论它们的极限.

(1)$a_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　(2)$a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$;

(3)$a_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$;　　(4)$a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$.

解 (1)这里 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$,即$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

(2)这里 $a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$,所以$|a_n|\leqslant\dfrac{1}{n}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right)=0.$

(3)这里 $a_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$,即 $1,\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{8},\cdots,\dfrac{n+1}{2n},\cdots$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}.$

(4)这里 $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$,即$-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},-\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,(-1)^n\dfrac{n}{n+1},\cdots$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right]$不存在.

1.2.2 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$时,函数 $y=f(x)$的极限

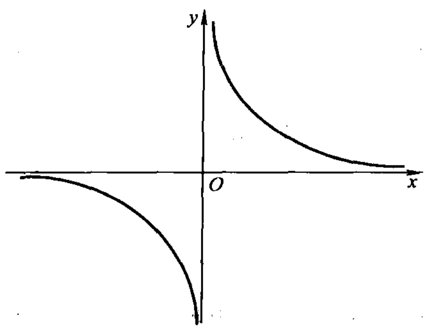

图 1-1

反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图像如图 1-1 所示,当自变量 x 的绝对值无限增大时,曲线无限逼近 x 轴,即相应的函数值 y 无限逼近常数 0,这就是将要讨论的 $x\to\infty$时,函数 $y=\dfrac{1}{x}$的极限是 0.

于是,类似于数列极限,我们有以下定义.

定义 设函数 $y=f(x)$,如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$当 x 趋向于无穷大时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

如 $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x}=1.$$

$x\to\infty$可分为 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$两种情况,指的是 x 取正值无限增大和取负值而

绝对值无限增大. 因此，可以类似地给出 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的定义.

定义　设函数 $y=f(x)$，如果当 $x>0$ 且 x 无限增大（即 $x \to +\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于正无穷大时的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A\,(x \to +\infty).$$

定义　设函数 $y=f(x)$，如果当 $x<0$，而 $|x|$ 无限增大（即 $x \to -\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于负无穷大时的极限，记作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A\,(x \to -\infty).$$

注：$x \to \infty$ 意味着同时考虑 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$，显然得到下面的关系.

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} f(x)=A.$$

例 2　观察 $y=\arctan x$ 的图像（图 1-2），求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x$；　　(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$.

解　由图 1-2 看出：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

现在讨论当 x 无限趋近于定值 x_0（记为 $x \to x_0$，读作 x 趋向于 x_0）时，函数 $f(x)$ 的极限问题.

考察当 $x \to 1$ 时，函数 $y=2x-1$ 的变化趋势. 当 $x \to 1$ 时，y 的值无限地趋近于常数 1（如图 1-3），称常数 1 为函数 $y=2x-1$ 当 $x \to 1$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to 1}(2x-1)=1$.

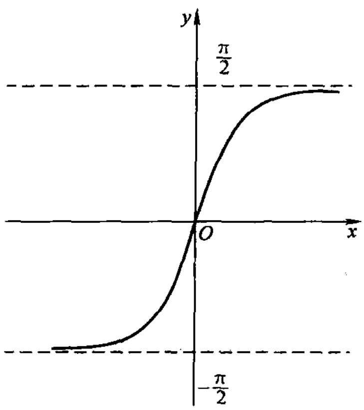

图 1-2

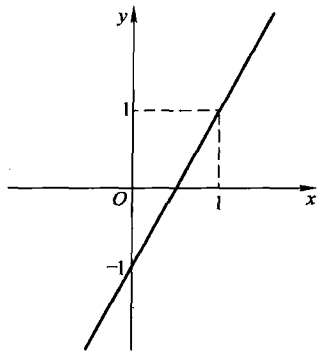

图 1-3

下面给出当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的一般定义.

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内（点 x_0 可以除外）有定义，如果当 x 无限趋向