中国社会科学院研究生重点教材
MAJOR TEXTBOOKS FOR POSTGRADUATE STUDENTS
CHINESE ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES

数理逻辑

Mathematical Logic

张清宇 主编
刘新文 夏素敏 编

中国社会科学出版社

中国社会科学院研究生重点教材

MAJOR TEXTBOOKS FOR POSTGRADUATE STUDENTS
CHINESE ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES

数理逻辑

Mathematical Logic

张清宇·主编

刘新文 夏素敏 编

中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数理逻辑／张清宇主编．—北京：中国社会科学出版社，2010．2

（中国社会科学院研究生重点教材系列）

ISBN 978－7－5004－8543－8

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①数理逻辑－研究生－教材　Ⅳ．①O141

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第027221号

责任编辑　吴连生
责任校对　韩天炜
封面设计　王　华
技术编辑　王炳图

出版发行　中国社会科学出版社
社　　址　北京鼓楼西大街甲158号　　邮　编　100720
电　　话　010－84029450（邮购）
网　　址　http：//www.csspw.cn
经　　销　新华书店
印　　刷　北京奥隆印刷厂　　装　订　广增装订厂
版　　次　2010年2月第1版　　印　次　2010年2月第1次印刷
开　　本　710×980　1/16
印　　张　9.25　　插　页　2
字　　数　185千字
定　　价　24.00元

中国社会科学院
研究生重点教材工程领导小组

总　序

中国社会科学院研究生院是经邓小平等国家领导人批准于1978年建立的我国第一所人文和社会科学研究生院，其主要任务是培养人文和社会科学的博士研究生和硕士研究生。1998年江泽民同志又题词强调要“把中国社会科学院研究生院办成一流的人文社会科学人才培养基地”。在党中央的关怀和各相关部门的支持下，在院党组的正确领导下，中国社会科学院研究生院持续健康发展。目前已拥有理论经济学、应用经济学、哲学、法学、社会学、中国语言文学、历史学等9个博士学位一级学科授权、68个博士学位授权点和78个硕士学位授权点以及自主设置硕士学位授权点5个、硕士专业学位2个，是目前我国人文和社会科学学科设置最完整的一所研究生院。建院以来，她已为国家培养出了一大批优秀人才，其中绝大多数已成为各条战线的骨干，有的已成长为国家高级干部，有的已成长为学术带头人。实践证明，办好研究生院，培养大批高素质人文和社会科学人才，不仅要有一流的导师和老师队伍、丰富的图书报刊资料、完善高效的后勤服务系统，而且要有高质量的教材。

20多年来，围绕研究生教学是否要有教材的问题，曾经有过争论。随着研究生教育的迅速发展，研究生的课程体系迈上了规范化轨道，故而教材建设也随之提上议事日程。研究生院虽然一直重视教材建设，但由于主客观条件限制，研究生教材建设未能跟上研究生教育事业发展的需要。因此，组织和实施具有我院特色的“中国

社会科学院研究生重点教材”工程，是摆在我们面前的一项重要任务。

“中国社会科学院研究生重点教材”工程的一项基本任务，就是经过几年的努力，先期研究、编写和出版100部左右研究生专业基础课和专业课教材，力争使全院教材达到“门类较为齐全、结构较为合理”、“国内同行认可、学生比较满意”、“国内最具权威性和系统性”的要求。这一套研究生重点教材的研究与编写将与国务院学位委员会的学科分类相衔接，以二级学科为主，适当扩展到三级学科。其中，二级学科的教材主要面向硕士研究生，三级学科的教材主要面向博士研究生。

中国社会科学院研究生重点教材的研究与编写要站在学科前沿，综合本学科共同的学术研究成果，注重知识的系统性和完整性，坚持学术性和应用性的统一，强调原创性和前沿性，既坚持理论体系的稳定性又反映学术研究的最新成果，既照顾研究生教材自身的规律与特点又不恪守过于僵化的教材范式，坚决避免出现将教材的研究与编写同科研论著相混淆、甚至用学术专著或论文代替教材的现象。教材的研究与编写要全面坚持胡锦涛总书记在2005年5月19日我院向中央常委汇报工作时对我院和我国哲学社会科学研究工作提出的要求，即“必须把握好两条：一是要毫不动摇地坚持马克思主义基本原理，坚持正确的政治方向。马克思主义是我国哲学社会科学的根本指导思想。老祖宗不能丢。必须把马克思主义的基本原理同中国具体实际相结合，把马克思主义的立场观点方法贯穿到哲学社会科学工作中，用发展着的马克思主义指导哲学社会科学。二是要坚持解放思想、实事求是、与时俱进，积极推进理论创新”。

为加强对中国社会科学院研究生重点教材工程的领导，院里专门成立了教材编审领导小组，负责统揽教材总体规划、立项与资助审批、教材编写成果验收等等。教材编审领导小组下设教材编审委员会。教材编审委员会负责立项审核和组织与监管工作，并按规定

特邀请国内2—3位同行专家，负责对每个立项申请进行严格审议和鉴定以及对已经批准立项的同一项目的最后成稿进行质量审查、提出修改意见和是否同意送交出版社正式出版等鉴定意见。各所（系）要根据教材编审委员会的要求和有关规定，负责选好教材及其编写主持人，做好教材的研究与编写工作。

为加强对教材编写与出版工作的管理与监督，领导小组专门制定了《中国社会科学院研究生重点教材工程实施和管理办法（暂行）》和《中国社会科学院研究生重点教材工程编写规范和体例》。《办法》和《编写规范和体例》既是各所（系）领导和教材研究与编写主持人的一个遵循，也是教材研究与编写质量的一个保证。整套教材，从内容、体例到语言文字，从案例选择和运用到逻辑结构和论证，从篇章划分到每章小结，从阅读参考书目到思考题的罗列等等，均要符合这些办法和规范的要求。

最后，需要指出的一点是，大批量组织研究和编写这样一套研究生教材，在我院是第一次，可资借鉴的经验不多。这就决定了目前奉献给大家的这套研究生教材还难免存在这样那样的缺点、不足、疏漏甚至错误。在此，我们既诚恳地希望得到广大研究生导师、学生和社会各界的理解和支持，更热切地欢迎大家对我们的组织工作以及教材本身提出批评、意见和改进建议，以便今后进一步修改提高。

陳佳貴

2005年9月1日于北京

符号对照

C_p^k　常函数

$\bar{n}$　数列（n_0，…，n_{k-1}）

π_i^k　投射函数

$\bar{a}$　序列（a_1，…，a_n）

s_n^m　原始递归函数

$\subseteq$　包含于

$\cup$　并

$*$　并置

$\mathbb{k}$　代数封闭域

$\Leftrightarrow$　当且仅当

$\neg$　否定词

$\bigcup$　广义并

$\bigwedge$　广义合取

$\bigvee$　广义析取

$\wedge$　合取词

μ　极小化运算

κ　集合的基数

$\cap$　交

ϕ　空集

$\mathbb{N}$　理论 N 的模型，皮亚诺算术的模型；N 和皮亚诺算术的标准模型

$\wp$　幂集

$\forall$　全称量词

$\Rightarrow$　如果……那么

$\exists$　特称量词

$\mathbb{R}$　完全有序域、实数集合

ω　无穷（序）数

$\vee$　析取词

$\mathbb{Q}$　有理数域

$\mathbb{C}$　有序域

$\rightarrow$　蕴涵词

$\subset$　真包含于

$\in$　属于

$\vdash A$　A 是一个（内）定理

$\models A$　A 是一个重言式

$\mu^<$　有界极小化

$\exists^<$、$\forall^<$、$\exists^\leqslant$、$\forall^\leqslant$　有界量词

Δ，Ω，Γ　公式集合

$\aleph_0$　第一个无穷基数

χ_A　A 的特征函数

$\ulcorner A \urcorner$　公式 A 的哥德尔数

$\langle k_1, \cdots, k_n \rangle$　序列数

$\ulcorner t \urcorner$　项 t 的哥德尔数

${}^*\mathbb{R}$　非阿基米德序域

Σ_n^0，Π_n^0，Δ_n^0　算术点类

$|X|$　结构 X 的基数

$\sim$　等价关系

$A \equiv_T B$　A 和 B 在 T 中等值

$\boldsymbol{ATM}$　原子公式集合

$\boldsymbol{FORM}$　L 的一个公式集

$\boldsymbol{FORM} \models A$　A 是 $\boldsymbol{FORM}$ 的一个重言

后承

FORM $\vdash A$　公式 A 为公式集 ***FORM*** 的一个语法后承

$gr(f)$　函数 f 的图像

lh　序列的长度

$M \not\models A$　A 在 M 中不是有效的

$M \models A$　A 在语言 L 的结构 M 中为真

m^n　幂函数

PA　皮亚诺算术

$RP(a, b)$　a，b 互素

S　后继函数

seq　所有序列数的集合

T　一阶理论（理论）

Term　项的集合

ν　真值赋值

vble，*sn*，*pred*，*func*，*term*，*Num*，*aform*，*form*，*fr*，*substl*，*pax*，*idax*，LAx_T，NAx_T，Ax_T，*cont*，*exp*，*assoc*，*cut*，*Intr*，Pr_T，Prf_T　递归谓词

WFF　公式集合

前　言

经过一个多世纪的发展，数理逻辑（Mathematical Logic）已经成为了具有多方面内容的学科，影响了许许多多的领域：通过模态逻辑影响到哲学，通过集合论影响到数学，通过它所允许的分析以及允许生成的正确编程影响到计算机科学，等等。同时，数理逻辑也证明了可计算性的局限。那么，数理逻辑是一门什么样的学科？简而言之，数理逻辑就是数学技术在逻辑中的应用。而逻辑主要有两种：形式的和非形式的。

形式(通常所说的“数理”)逻辑源于古希腊的亚里士多德。数理逻辑也有两个方面：句法(syntax)和语义(semantics)。句法指的是我们如何说一些事情，语义指的是我们说的是什么。通过对人类行为方式和世界行为方式的观察，亚里士多德已经引出了一些基本的法则，其范畴逻辑研究得到的是一个我们耳熟能详的概念——三段论(syllogism)。三段论最有名的一个例子是说：“所有人都是会死的，苏格拉底是人；（所以）苏格拉底是会死的。”今天的逻辑学家则会写成：“$\forall x\ (P\ (x)\ \rightarrow Q\ (x))$，$P\ (s)$；$Q\ (s)$”，这一规则的一个非常一般的形式是：“$A$，$(A\rightarrow B)$；$B$”；这就是著名的分离规则（*modus ponens*，或者 detachment）：A 从 $(A\rightarrow B)$ “分离出去”，只剩下 B。此即一条逻辑规则。这一规则（以及其他规则如“$(A\wedge B)$；A”，其中 $\wedge$ 表示“和”）有其明显的解释，是从我们如何使用概念的观察中得到的。这种分析方法也就是19世纪布尔(G. Boole)流传下来的“布尔代数”、“布尔逻辑”的方法，我们今天称其为“命题演算”。19世纪，比布尔稍晚的弗雷格(G. Frege)发展出一套我们今天广泛使用的只和句法有关的逻辑规则——谓词演算，虽然它们是从我们所言所想中抽象得来的，它们的意义即语义和我们的日常生活却有着相当的区别。最常见的语义例子是由所谓的真值表(truth table)给出的，以“和($\wedge$)”为例：

$\wedge$	真	假
真	真	假
假	假	假

要确定命题（$A\wedge B$）的真值，首先要给定这个命题的组成部分 A 和 B 的真值（假定左边的一列为 A 的真值，上面一行为 B 的真值），然后看行与列相交之处的真值，此即整个命题（$A\wedge B$）的真值。一般来讲，确定一个句法表达式（公式）A 的真值需要仔细察看作为其构成成分的命题的真值。到此为止，我们处理的是两种完全不同的事情，语言的两个不同的方面。一方面，我们运用规则来对符号串进行操作，这些规则就是前面说到的分离规则等；另一方面，我们也在寻找意义。后者是所谓的语义学研究，而前者是所谓的句法——研究语言从符号得以建立起来的方式。考虑我们前面的例子：$\forall x\,(P\,(x)\rightarrow Q\,(x))$。如果 $P\,(x)$ 解释成“x 是一个人”而 $Q\,(x)$ 解释成“x 是会死的”，那么这一公式在这一解释下很明显是真的：“对于任意一个个体对象来讲，如果这个对象是一个人，那么他是会死的”，也就是说，“所以人都是会死的”。如果把 $P\,(x)$ 和 $Q\,(x)$ 分别解释成“x 是一只鸟”和“x 是会飞的”，那么在这一解释之下，原来的公式就为假了，因为我们可以找到反例：企鹅是鸟但不会飞。值得注意的是，公式本身无所谓真假，它仅仅是句法中的一个表达式而已。

数理逻辑首先考虑的是句法和语义之间的关系。任何逻辑都是从某些基本符号开始，它们一般都包括变项符号 x，y，z，…以及谓词（或称性质）符号和关系符号如 P，Q，R 等；函数则用一些小写字母如 f，g 来表示。运用函项符号得到的是所谓的项。而有了所有这些之后，我们就可以构造出所谓的原子公式这一类基本公式，如 $P\,(x)$，$Q\,(f\,(x),\,g\,(x,\,y))$ 等。原子公式通过逻辑联结词可以构造出更为复杂的公式，国内也有人称它们为“合式公式”、“良构式”、“良构”，如（$P\,(x)\rightarrow Q\,(y)$），$\forall x\,(P\,(x)\rightarrow Q\,(x))$ 等。逻辑联结词有两类：$\neg$（读作“并非”），$\vee$（“或者”），$\wedge$（“和”），$\rightarrow$（“如果……那么”、“蕴涵”）称为命题联结词；$\exists$（“存在”）和 $\forall$（“所有”）称为量词。在规则的帮助之下，我们就可以得到更多的公式；分离规则现在可以称为蕴涵消除规则（$\rightarrow$E）：前提中的$\rightarrow$在结论中已经消除。下面我们列出弗雷格所发现的规则，由于它们和我们日常的推理实践非常接近，由其构成的推理系统即通常所说的自然推演：

$$\frac{}{\vdash A}\ (\text{Axiom - I}) \qquad \frac{}{A\vdash A}\ (\text{Ass - I})$$

$$\frac{\Delta\vdash\bot}{\Delta\vdash A}\ (\bot\text{E})$$

$$\frac{\Delta,\ A\vdash B}{\Delta\vdash A\rightarrow B}\ (\rightarrow\text{I}) \qquad \frac{\Delta\vdash A \quad \Omega\vdash A\rightarrow B}{\Delta,\ \Omega\vdash B}\ (\rightarrow\text{E})$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Omega \vdash B}{\Delta,\ \Omega \vdash A \wedge B}\ (\wedge \mathrm{I})$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge \mathrm{E}_1) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge \mathrm{E}_2)$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee \mathrm{I}_1) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee \mathrm{I}_2)$$

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash C \quad \Omega,\ B \vdash C \quad \Delta \vdash A \vee B}{\Gamma,\ \Delta,\ \Omega \vdash C}\ (\vee \mathrm{E})$$

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash \forall xA}\ (\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\Delta \vdash \forall xA}{\Delta \vdash A[c/x]}\ (\forall \mathrm{E})$$

x 在 A 中而不在 Δ 中自由出现

$$\frac{\Delta \vdash P[a/y]}{\Delta \vdash \exists yP}\ (\exists \mathrm{I}) \qquad \frac{\Delta \vdash \exists yP \quad \Omega,\ P[x/y] \vdash C}{\Delta,\ \Omega \vdash C}\ (\exists \mathrm{E})$$

x 不在 C 中自由出现

这一系统中没有公理只有假设，比如蕴涵消除规则说的是，如果我们从公式集合 Δ 中的公式可以证明公式 A 并且从公式集合 Ω 中的公式可以证明公式（$A \to B$），那么我们就可以从 Δ 和 Ω 中的公式证明公式 B。规则“$\vee$E”（析取消除）对应的是分情况证明，它的意思是说，如果我们可以从 A 证明 C 并且从 B 也可以证明 C，那么我们就可以从（$A \vee B$）证明 C；而“$\exists$E”（特称量词消除）的大意是说，如果我们可以从某个特殊的 x 使得 x 替换掉 y 之后 P 成立而证明 C，并且我们还可以证明，存在一个 y 使得 P 成立，那么，我们就可以证明 C。仅从直观上来解释，这些规则就已经很好了：在这样的解释之下，我们可以从真的断言得到另外一些真的断言。证明就是重复应用这些规则而构造出来的，由于有的规则有两个前提，因此我们得到的是一个树，这个树就是位于树根的公式的一个证明。我们使用这些基本的规则来对（数学或其他）语言进行分析时，就足够得到语言中为真的句法表达式。这是20世纪上半叶所得到的戏剧般的结果：存在一个很小的（有限的）逻辑规则集合，它可以得到所有那些、也仅仅是那些在任意解释之下都为真的公式。这就是所谓的完全性定理。那么，什么是一个解释呢？首先，我们需要确定我们所谈到的范围，这称为论域，比方说人、自然数等。然后我们需要解释我们的语言中的谓词，它们通常解释成关系，比如自然数之间的“小于”关系。假定现在我们的论域是自然数，我们的语言中有 $P(x,\ y)$ 这样的原子公式，谓词 P 解释成“x 整除 y”，那么我们就知道公式

$$(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$$

总是真的；　$(P(x, y) \vee P(y, x))$ 有时候为真，有时候为假；而 $\forall x \neg P(x, x)$则为假，因为每一个自然数都可以整除自己。但是，谓词 P 不会只有一种解释，如果 P 被解释成了“y 严格大于 x”，那么 $\forall x \neg P(x, x)$则为真。在所有可能的解释下都为真的公式叫做普遍有效公式，一般简称有效式，比如说 $A \rightarrow A$。一个解释 M 是一个公式 A 或者公式集合 Δ 的模型，是说 A 在 M 为真或者 Δ 中的公式都在 M 中为真。1965 年，克雷瑟尔（G. Kreisel）指出，完全性定理实际上捕获了我们对真这个概念的直观把握。原因在于，完全性定理说的是，在所有（形式的、数学的）解释之下为真的每一个公式都是可证的。很明显，可证的任何事情在所有解释包括非形式解释之下都为真。最后，任何在所有解释之下都为真的事情在所有形式解释之下也都为真。这样，三个类 A（在谓词演算中可证的）、B（在所有解释之下为真的）和 C（在所有形式解释之下为真的）具有这样一种关系：$A \subseteq B \subseteq C \subseteq A$。所以，$A$，$B$ 和 C 是重叠的。完全性定理的一半更为有力：如果一个公式集合 Σ 是协调的，也就是说，我们不会从 Σ 推出矛盾来，那么 Σ 就有一个模型，即有一个解释使得 Σ 中所有的公式都为真。这就是所谓的紧致性定理。模型的思想催生了模型论。当然，模型论的发展也从完全性定理得到了极大的推动。模型论研究的是逻辑句子集的解释。有意思的是，只需句子类型就可以得到重要的结论，例如，如果一个公式 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n)$ 在一个解释下为真，其中 A 中不再有量词，那么它在任意一个（非空的）子解释下都为真。看一个简单的应用：如果我们要为由一个乘法运算与其逆运算形成的群写出其公理，那么所有这些公理都可以写成 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n)$ 的形式，其中 A 中不再有量词。如果 G 是这些公理的模型（即一个群），那么 G 的任意一个对逆和乘法封闭的非空子集就是一个子群。模型论还有更多更为强大的结论，它还允许我们以一种新的方式进行演算：罗宾逊（A. Robinson）的非标准分析。模型论使得我们对群论和集合论模型有着深刻的见解，在数理逻辑中与集合论、递归论和证明论并称为“四论”。

逻辑不止一个。20 世纪初期，布劳维尔（L. E. J. Brouwer）就对排中律进行了质疑，为数学中使用的句法进行了新的解释，认为一个证明所要告诉我们的是如何建立一个构造。在他看来，$(A \vee \neg A)$ 的一个证明是可以接受的仅当我们可以为 A 给出一个证明或者为 $\neg A$ 给出一个证明。在那时的数学中，$(A \vee \neg A)$ 的真不值一提，它的思想基础是 A 或为真或为假而没有中间的可能，即使我们并不实际知道 A 到底为真还是为假；这对布

劳维尔来说是不可接受的、无意义的。排中律（$A \vee \neg A$）或者说双重否定规律“从 $\neg\neg A$ 可以推出 A”到现在还是许多数学家和大多数哲学家所使用的逻辑的基础，这两条规则等价于前述的规则“$\perp$ E”。对于另外一些哲学家和大多数计算机科学家来讲，他们并不使用这一规则，所得到的逻辑就是所谓的直觉主义逻辑（属于构造性逻辑）。20 世纪 60 年代，克里普克（S. Kripke）为证明直觉主义逻辑的完全性而给出了一个新的解释，他的“解释”并不是我们前面所说的单个模型，而是一类这样的模型，各个模型之间还具有某种关系。这就是可能世界解释，一个公式是可证的、仅当它在所有的可能世界中都为真。今天，我们有着各式各样不同的逻辑，各有其价值和应用，这其中就包括各种模态逻辑。模态逻辑引入分别表示“可能”和“必然”等这些模态词的新符号◇和□。在这些逻辑中，很多也有完全性定理，其证明也类似于直觉主义逻辑的完全性证明。当然，克里普克首先证明的是模态逻辑的完全性结果，然后再用他的想法来证明直觉主义逻辑的完全性。

逻辑的力量随着目光转向特殊的论域而改变，比如说自然数。为了研究自然数，形式算术理论也由公理来刻画，这些公理以皮亚诺（G. Peano）公理而闻名于世。1931 年，哥德尔（K. Gödel）证明了不存在有限的公理系统来给出所有的算术真命题，这就是著名的不完全性定理。为了证明这一定理，哥德尔提出递归函数（可计算函数）的概念，即形式算术中可表示的函数，也就是说，有一些刚好反映这些函数的谓词。1937 年，图灵（A. Turing）证明在现在所说的图灵机上可计算的函数刚好就是哥德尔的递归函数。计算机就从图灵机这个概念而来。一个函数是可计算的，当且仅当它可以在某个计算机上被编程，而对于每一个计算机类型来说，可以计算的函数都在图灵可计算函数之中。因此，递归函数刚好就是可以计算的函数。这也证明了有的函数是不能计算的；特别是不可能计算一个给定的、带有某个既定程序的图灵机是否会停止，这就是停机问题。除了图灵机之外，还有多种方法推进了可计算函数的理论发展，如 λ 演算。除了算术之外，逻辑也被应用到集合论。19 世纪，数理逻辑的主要推动力之一是分析基础问题，特别是微积分。19 世纪 70 年代，康托尔（G. Cantor）在研究傅立叶级数的时候遇到了困难，首先是我们可以数到无穷之外。例如，我们首先列出所有的偶数然后列出所有的奇数，得到 0，2，4，…，1，3，5，…。当我们用 1，2，3，…来数这个序列的时候，还没有数到结束我们就已经用完了计数的数。康托尔引入了无穷（序）数来接着计

数：1，2，3，…，ω，ω + 1，ω + 2，…。这一过程可以进行到 $\omega\times\omega$ 或 ω^{ω} 甚至 $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$，没有结束之时。康托尔引进集合论来发展他的大基数和序数理论。集合有两种构造方法：一是通过增大，如取较小集合的并集；另一是定义一个集合为使得 A (x) 成立的 x 的集合。素朴的概括公理是说集合 $\{x: A(x)\}$ 总是存在，而这导致了罗素悖论。集合论的基本公理并不烦琐，在策梅罗（E. Zermelo）和弗兰克尔（A. Fraenkel）的表述之中，概括公理得到了限制。在数理逻辑的帮助之下，集合论这一领域已经发展得相当庞大。但是，这一有限的公理模式集并没有解决所有问题，原因在于它不仅是不完全的，而且也没有解决选择公理的地位问题。选择公理是说，给定一个非空的非空集合的集合，存在一个从每一个这些集合中只选出一个元素所组成的集合。第一个问题是协调性问题。这可以通过建立集合论的模型来解决，哥德尔是第一个通过在集合论中建立集合论模型来这样做的人。然而，这些模型并不能解决所有问题。哥德尔在 20 世纪 40 年代只是建立了选择公理和连续统假设的相对协调性。连续统假设说的是在最小的无穷基数（自然数集合的基数）和自然数的所有子集的集合的基数之间不再有无穷基数。1963 年，科恩（P. Cohen）证明了选择公理（和连续统假设）对集合论其他公理的独立性。我们现在知道，科恩使用的模型论与克里普克用于模态逻辑和直觉主义逻辑中的模型论密切相关，其中的技术以“力迫法（forcing）”闻名于世。从那时起，其他许多重要的数学命题也被证明是独立于集合论的其他公理。虽然初看起来集合这个概念相当的简单，但我们对什么是一个集合却没有精确的观念；此外，从 20 世纪 70 年代以来，集合论领域已经发展得极其复杂，难以驾驭。

哥德尔不仅证明了不完全性定理，而且还证明了不可能在形式算术之内证明形式算术的协调性。20 世纪 40 年代，为了证明皮亚诺算术公理都是协调的，根岑（G. Gentzen）开始了数理逻辑中形式证明的研究，这就是证明论的起源。他设计了一套新的方法来表述证明，与前述的自然推演系统相当接近，这样，他就能够证明我们可以简化某些证明。例如，假定我们有了两个证明，其中第一个是 A 的证明（下页最左边的那个证明），另一个是从 A 到 B 的证明由此而得到一个（$A\to B$）的证明（下页从左到右第二个证明），那么假定我们运用分离规则把 A 从（$A\to B$）中消除，这样我们就得到一个证明（下页从左到右第三个证明）。但是，我们只需把 A 的证明置于（$A\to B$）的证明的最上边，那么就不再需要第二个证明中的假设［A］以得到 B 的证明。刚才第三个证明采用了一个不必要的迂回，也就是说，我们可以把

这个证明归约到 B 的一个更为简单的证明形式（最右边）：

$$\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{(A\to B)}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathrm{A}\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{(A\to B)}}{B}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{array}$$

对这一不必要迂回的排除就是证明论的核心——切割消除。根岑使用一种特殊形式的归纳——超穷归纳——证明，矛盾式不会有证明，即算术是协调的。实际的技术是假定矛盾式有一个证明，然后用切割消除来归约这一证明，直到它是一个具有非常简单形式的证明。从这里不会得到这样一个证明。根岑的技术由费菲曼（S. Feferman）和舒特（K. Schütte）等人所大力发展，使其结果推广到了比简单的算术更为复杂得多的系统。半个多世纪前由根岑所开始的工作现在已经在计算机科学中兴起了一个新的、庞大的工业；虽然他自己已经注意到了一个证明中所包含的信息，但是直到霍华德（B. Howard）1969 年的论文才证明命题演算反映了 λ 演算，至此为止，根岑的工作用来产生计算机程序的作用才得以实现。

本书介绍数理逻辑的基本内容，如经典一阶逻辑（包括命题逻辑和谓词逻辑）的句法、语义、逻辑演算（形式证明）以及刻画句法和语义之间关系的完全性定理，初步的模型论内容，集合论初步知识，哥德尔第二不完全性定理以及所需的递归论内容，等等。这些内容为我们欣赏 20 世纪的伟大发现——哥德尔定理——提供了基础，也为进一步学习和研究数理逻辑的专门知识和问题提供了基础，甚至可以说是必不可少的基础，正所谓“伐柯伐柯，其则不远”（《诗经・豳风・伐柯》）。

本书是 2006 年张清宇主持的中国社会科学院研究生重点教材工程“数理逻辑”的结项成果，由刘新文、夏素敏执笔，分别编写了第一、四、五章和第二、三章，全书由张清宇统稿。在本书撰写过程中，哲学所雷继红女士提供了许多有益的帮助；成书期间，研究生院张初霞老师、特别是数量经济与技术经济研究所吴连生研究员付出了辛勤劳动。

编　者

2009 年 7 月