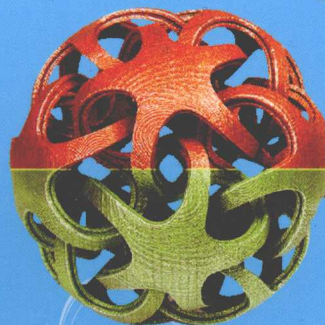
华东师范大学第二附属中学

数学 高中下册

MATHEMATICS

陈双双 刘初喜 等 编



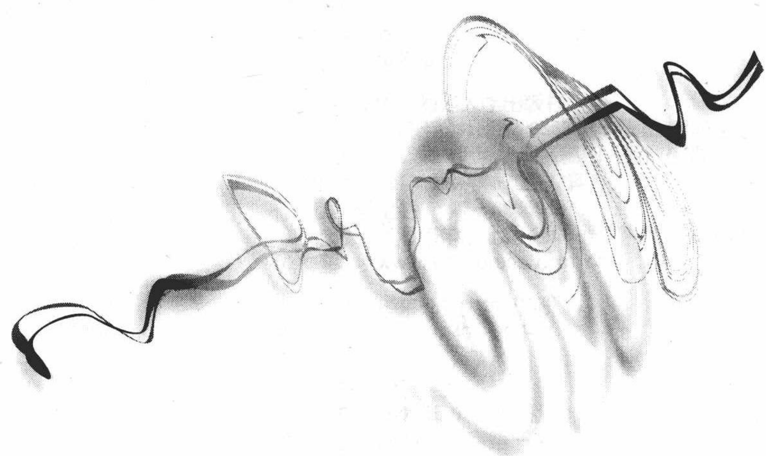
华东师范大学出版社

华东师范大学第二附属中学

数学 高中下册

MATHEMATICS

陈双双 刘初喜 等编



华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学·高中下册/陈双双等编. —上海：华东师范大学出版社，2009
华东师大二附中校本教材
ISBN 978-7-5617-6704-7

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学课—高中—教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 116009 号

数学·高中下册（华东师大二附中）

编　　者　陈双双　刘初喜等
项目编辑　应向阳
审读编辑　张　润
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　13.375
字　　数　390 千字
版　　次　2009 年 9 月第一版
印　　次　2009 年 9 月第一次
印　　数　6 000
书　　号　ISBN 978-7-5617-6704-7/G·4098
定　　价　22.00 元

出 版 人　朱杰人

前 言

亲爱的同学，你一定喜欢数学，而且希望自己能够学好高中数学吧？那么，就请你选择我们这套教材吧！

我们华东师范大学第二附属中学使用的《高中数学》教材，以本校的数学教学校本纲要为基础，经过数学教研组教师多年教学的积累，根据新课标的要求，又结合本校学生的具体情况，编写成上(已出版)、下两册正式出版.

本教材有以下几个方面的显著特点：

(1) 知识结构完整充实

依据新课标的要求，按照高中生的认知规律和发展需求，我们精心选择教材内容，对使用不同版本教材的全国各地学生可根据各自需要选择相关章节学习. 为了方便上海学生使用，在目录部分用“*”标出目前上海高考不作要求的内容. 不过这些知识是优秀学生今后参加著名高校的自主招生考试所必须掌握的.

(2) 思想方法揭示本质

高中数学不是数学的全部，而它却涵盖了数学中最基本的内容. 我们认为，学习数学最重要的，是学习数学的思想方法和本质内涵，学习人类优秀的数学文化精髓，学会用数学的眼光认识世界、用数学的方法改变世界. 因此，我们通过数学内容的呈现，也通过“大家谈”、“自己想”和“自己找”等栏目，尽可能地揭示其中蕴含的数学的本质

特征和思想方法，以使同学们体验数学与自然、数学与社会的和谐关系，领会数学的精神实质和文化价值，感受数学的魅力和学习的快乐.

(3) 发展为本便于自学

本着“以学生发展为本”的理念，以培养学生自主学习能力为出发点，我们在知识点的引入，知识内容的拓展等方面都力求详细完整；“自己想”中的问题设计，更能加深同学们对数学知识的理解；而“自己练”则能起到及时巩固所学知识、加强数学思维训练的作用；“自己学”是为学有余力的同学准备的，以达到提高数学素养的目的.

本教材上册第一章至第六章依次分别由陈双双、刘初喜、王平、刘招川、杨汉昌、郑跃星编写，第七章和第九章由施洪亮编写，第八章由甄德文编写；下册的第十章至第十四章依次分别由甄德文、倪建春、刘招川、刘初喜、唐立华编写，第十五章由王平、王海霞编写，第十六、十七章分别由郑跃星、杨汉昌编写，第十八章由陆继红、乔根凤分别编写其中的概率和统计部分，第十九章由施洪亮、蔡玲玲分别编写建模和文化部分，第二十章由陈双双编写. 全书由陈双双组稿、统稿与审核，吴森参与了部分校对与审核工作.

同学们，相信本教材会对你们的数学学习提供较大的帮助. 但是在这套教材中，还会有一些错误和不妥之处，欢迎你们提出宝贵意见和建议，以使本教材日臻完善，谢谢！

本书编者

2009. 7. 18

目录

第十四章　坐标变换、参数方程和极坐标方程

第十五章　空间直线与平面

第十六章　简单几何体

第十章

数列、数学归纳法与数列的极限（Sequences of Numbers、Mathematical Induction and Limits of Sequences）

按一定次序排列起来的一列数叫做数列，早在约公元前 1650 年的埃及"莱因得纸草"上就记载着数列的问题，在我国，约成书于公元前 2 世纪的《周髀算经》中也记载有数列的问题. 本章着重讨论数列的通项公式、递推公式，讨论两类最常用的数列：等差数列和等比数列，并学习数列在解决实际问题中的应用.

10.1 数列 (Sequences of Numbers)

数学研究的基本对象是数，按一定顺序排列起来的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数叫做这个**数列的项**，数列的各项按先后顺序依次称为这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，…，第 n 项，…. 数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，简记为 $\{a_n\}$，其中 a_n 是数列的第 n 项. 项数有限的数列叫做**有穷数列**；项数无限的数列叫做**无穷数列**. 从第 2 项起，每一项都大于它的前一项的数列叫做**递增数列**；从第 2 项起，每一项都小于它的前一项的数列叫做**递减数列**；各项相等的数列叫做**常数列**. 存在正常数 M，使得每一项的绝对值都不大于 M 的数列叫做**有界数列**，否则叫做**无界数列**.

在数列中，当数列的项的序号 n 确定时，相应的项 a_n 也就唯一确定了. 于是数列的项 a_n 与项的序号 n 之间存在着对应关系，这种对应关系

可描述如下：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项的序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \text{项} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

因此，从函数的观点看，数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）为定义域的函数 $a_n = f(n)$，当自变量按从小到大的顺序依次取值时，$f(n)$ 所对应的一列数. 当数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项的序号 n 之间的关系：$a_n = f(n)$ 可以用一个公式来表示时，这个公式就叫做这个数列的**通项公式**（general term）. 例如，数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 的通项公式可以是 $a_n = \frac{1}{n}\ (n \in \mathbf{N}^*)$；数列 1,1,1,1,1 的通项公式可以为 $a_n = 1\ (1 \leqslant n \leqslant 5, n \in \mathbf{N}^*)$. 若将数列中的序号 n 与对应的项 a_n 用坐标 (n, a_n) 表示，则在平面直角坐标系中所得的数列的图象是一列离散的点.

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项（或前 n 项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前 n 项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的**递推公式**（recurrence formula）. 递推公式也是定义数列的一种方式. 例如，数列 $a_n = n+3\ (1 \leqslant n \leqslant 7)$ 可以用下面的递推公式表示：

$$\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_n = a_{n-1} + 1 (2 \leqslant n \leqslant 7). \end{cases}$$

在现实生活中，我们经常会求一些数的和. 在数列中，一般地，用 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和，即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，显然有

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

例 1　写出下面数列的一个通项公式，使它的前 5 项分别是下列各数：

(1) $\frac{2^2-1}{3},\frac{4^2-2}{5},\frac{6^2-3}{7},\frac{8^2-4}{9},\frac{10^2-5}{11}$;

(2) $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{12},-\frac{1}{20},\frac{1}{30}$;

(3) $-\frac{1}{2},\frac{2}{5},-\frac{2}{5},\frac{8}{17},-\frac{8}{13}$;

(4) 1, 0, 1, 0, 1.

解 (1) 前 5 项的规律是

$$\frac{(2\times 1)^2-1}{2\times 1+1},\quad \frac{(2\times 2)^2-2}{2\times 2+1},\quad \frac{(2\times 3)^2-3}{2\times 3+1},$$

$$\frac{(2\times 4)^2-4}{2\times 4+1},\quad \frac{(2\times 5)^2-5}{2\times 5+1}.$$

所以该数列的一个通项公式是 $a_n=\frac{(2n)^2-n}{2n+1}$.

(2) 前 5 项的规律是

$$\frac{1}{1\times 2},\quad -\frac{1}{2\times 3},\quad \frac{1}{3\times 4},\quad -\frac{1}{4\times 5},\quad \frac{1}{5\times 6}.$$

且项的符号按$(-1)^{n+1}$ 的规律变化. 所以该数列的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

(3) 前 5 项的规律是 $-\frac{2^0}{1^2+1},\quad \frac{2^1}{2^2+1},\quad -\frac{2}{5}=-\frac{4}{10}=-\frac{2^2}{3^2+1},\quad \frac{2^3}{4^2+1},\quad -\frac{8}{13}=-\frac{16}{26}=-\frac{2^4}{5^2+1}$, 所以该数列的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^n\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2+1}.$$

(4) 前 5 项的规律是 $\frac{1+1}{2},\frac{1-1}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1-1}{2},\frac{1+1}{2}$, 所以该数列

的一个通项公式是 $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. 根据数列的项的周期性规律，数列通项公式也可以是 $a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}$.

例 2 根据下列递推公式写出数列的前五项,并分别写出它们的一个通项公式:

(1) $a_1=0,a_{n+1}=a_n+(2n-1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $a_1=1,a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

解 (1) $a_1=0,a_2=a_1+1=1,a_3=a_2+3=4,a_4=a_3+5=9,a_5=a_4+7=16$. 数列的前五项是 $0,1,4,9,16$,数列的一个通项公式是 $a_n=(n-1)^2$.

(2) $a_1=1,a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2}{3},a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2}{4},a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2}{5}$, $a_5=\frac{2a_4}{a_4+2}=\frac{2}{6}$. 数列的前五项是 $1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3}$,数列的一个通项公式是 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

例 3 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 分别满足: (1) $S_n=2^n+1$; (2) $S_n=n^2+4n$; (3) $a_1=1,S_n=n^2a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$,求它们的通项公式.

解 (1) 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=3$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+1-(2^{n-1}+1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3, & n=1,\\ 2^{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

(2) 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=5$; ①

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=(n^2+4n)-[(n-1)^2+4(n-1)]=2n+3.$$ ②

在②式中，当 $n=1$ 时，$2n+3=5$，因此由①与②可知，数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n+3\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，化为 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}\ (n\geqslant 2)$. 所以 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

当 $n=1$ 时，上式的值也是 1. 所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

例 4 已知数列$\{\lg b_n\}$的前n项和是$S_n=n(n+1)\lg 3-\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

(1) 求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 设 $a_n=(n+1)b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，试问数列$\{a_n\}$有没有最大项?若有，求出最大项和最大项的项数，若没有，说明理由.

解 (1) 当 $n=1$ 时，$\lg b_1=S_1=2\lg 3$，所以 $b_1=9$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$\lg b_n=S_n-S_{n-1}=\lg\left[9\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}\right]$，所以

$$b_n=9\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1};$$

因为 $n=1$ 时，$b_n=9=b_1$，所以 $b_n=9\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2) 因为 $a_n=9(n+1)\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$，所以

$$a_{n+1}-a_n=9(n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n-9(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=\left(\frac{9}{10}\right)^n(8-n),$$

所以当 $n<8$ 时，$a_{n+1}-a_n>0$，即$a_{n+1}>a_n$；当$n=8$时，$a_{n+1}-a_n=0$，即 $a_{n+1}=a_n$；当 $n>8$ 时，$a_{n+1}-a_n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$.

所以数列$\{a_n\}$有最大项，最大项是 $a_8=a_9=81\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^7$.

例 5　如图 10 - 1，把框图中所输出的数 A 按先后顺序组成数列 $\{x_n\}$，请解答下列问题：

(1) 若输入 $A=\dfrac{49}{65}$，请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项；

(2) 若输出的无穷数列 $\{x_n\}$ 是一个常数列，试求输入的初始值 A 的值；

(3) 若输入一个数 A 时，产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列，试求实数 A 的取值范围.

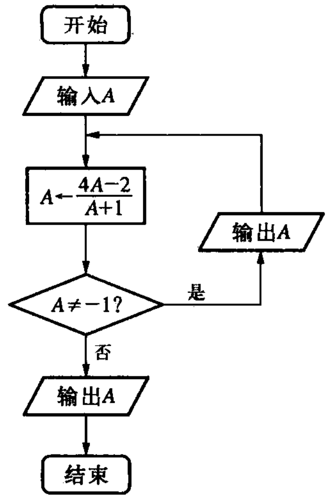


图 10 - 1

解　记 $x_0=A$，则框图所输出的数列 $\{x_n\}$ 的递推关系是

$$\begin{cases} x_0=A, & (A\neq-1), \\ x_n=\dfrac{4x_{n-1}-2}{x_{n-1}+1}, & (n\in\mathbf{N}^*). \end{cases}$$

(1) 因为 $x_0=A=\dfrac{49}{65}$，所以 $x_1=\dfrac{4x_0-2}{x_0+1}=\dfrac{11}{19}$，$x_2=\dfrac{4x_1-2}{x_1+1}=\dfrac{1}{5}$，$x_3=\dfrac{4x_2-2}{x_2+1}=-1$，即数列 $\{x_n\}$ 的所有项是 $\dfrac{11}{19}$，$\dfrac{1}{5}$，-1.

(2) 若输出的无穷数列 $\{x_n\}$ 是一个常数列，则 $A=\dfrac{4A-2}{A+1}$，解得 $A=1$，或 $A=2$.

(3) 若产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列，即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $x_n<x_{n+1}$. 那么 $x_0<x_1$，即 $A<\dfrac{4A-2}{A+1}$，解得 $A<-1$，或 $1<A<2$.

当 $A<-1$ 时，因为 $x_1=\dfrac{4A-2}{A+1}=4-\dfrac{6}{A+1}>4$，所以 $x_1>x_2$，不满足题意；

当$1<A<2$时，因为$x_1=\dfrac{4A-2}{A+1}=4-\dfrac{6}{A+1}\in(1,\ 2)$，所以$x_1<x_2$且$x_2=\dfrac{4x_1-2}{x_1+1}=4-\dfrac{6}{x_1+1}\in(1,\ 2)$，所以$x_2<x_3$且$x_3\in(1,\ 2)$，依次类推，可知当$1<A<2$时，有$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots$.

综上所述，当$1<A<2$时，得到的无穷数列$\{x_n\}$是单调递增数列.

课堂活动·大家谈

1. 根据数列的前若干项归纳得出的通项公式是唯一的吗？如果不唯一，那么可能有几个？

2. 若数列$\{a_n\}$的递推公式是

$$\begin{cases}a_1=1,\\ a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\ (n>1).\end{cases}$$

请写出这个数列的前10项；观察数列的项的变化规律，你能得到什么结论？

课堂活动·自己想

1. 根据数列$\{a_n\}$的前n项和S_n求数列的通项公式时，需要注意什么？

2. 如何判断数列$\{a_n\}$的单调性？如何求数列$\{a_n\}$的项的最大值、最小值？数列与函数有哪些区别与联系？

课外活动·自己学

斐波那契数列

意大利数学家莱昂纳多（Leonardo，约1170—1240），又名斐波那契（Fibonacci）. 在他的著作《算盘书》中有这样一个有趣的问题：“假设一对小兔子一个月后长成大兔子，大兔子下一个月生出一对小兔子，而且不发生死亡. 那么由一对小兔子开始，一年后可以繁殖成多少对兔子？”

每月的兔子对数，如下表所示：

1个月后	2个月后	3个月后	4个月后	5个月后	6个月后
1	2	3	5	8	13
7个月后	8个月后	9个月后	10个月后	11个月后	12个月后
21	34	55	89	144	233

观察兔子对数构成的数列后发现，从第 3 项起，每一项都是其前两项之和. 一般地，我们把数列 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…叫做**斐波那契数列**. 这个数列的任意一项都叫做“斐波那契数”. 用递推公式可以表示为：

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geqslant 3). \end{cases}$$

还可以证明它的通项公式为：$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，有趣的是，虽然斐波那契数列中的所有项都是正整数，可是它的通项公式却是由一些无理数的幂表示出来的.

课外活动

· 自己找

斐波那契数列有着广泛的应用，除上面提到的以外，还应用在人口年龄结构的预测、优选、数论、数值积分等领域. 它涉及面之广，引起了科学家的密切注意和极大的兴趣，美国在 1963 年创办了《斐波那契季刊》这一数学杂志，登载斐波那契数列在应用上的新发现及相关理论. 请借助网络及图书资料查阅更多关于斐波那契数列的相关知识及实际应用.

习题练习

· 自己练

1. 写出下面数列的一个通项公式：

(1) 1，−7，13，−19，25，−31，…；

(2) 3，5，9，17，33，…；