解析幾何學

劉薰宇編

解析幾何學

劉薰宇編

開明書店

民國廿二年五月初版發行

實價大洋一元
（實價不折不扣
外埠酌加寄費）

"解析幾何學"

編者 劉薰宇

發行者 杜海生 上海福州路八十五號

印刷者 美成印刷公司 上海東熙華德路餘慶里

總發行所 上海四馬路八五號 電報掛號七〇五四 開明書店發行所

分發行所 漢口中山路 廣州惠愛東路 北平楊梅竹斜街 長沙南陽橋 開明書店分店

（科631）

序

當我用了英文的課本對高級中學生講授數學的時候,我總感到這不是一個妥善的辦法.第一,我們所採用的英文課本,不是來自英國,便是來自美國,不用說,這些書是依了他們的學生的程度和需要編成的,對於中國的高中學生在這兩方面都未能適合.第二,雖則閱讀數學課本所需的英文程度不必十分深,但這只是不得已而思其次的說法,以不十分高深的英文程度而閱讀英文的課本,在心理的過程上,少不來一度翻譯的工夫,這是很容易體會到的,即或因了多讀的緣故,對於 point, line, curve, plane, equal to, perpendicular, parallel,……已經用不到在心裏翻譯一次但在思索的時候,卻免不了成爲中英合璧的狀態,如'到兩個 point distance 相等的 point 的 locus 是一條 perpendicular bisector'之類.這一種思索,一方面說來在心裏總多些灣轉,而另一方面,就數學講則欠精密,所謂'兩個 point'應當是'兩個定點'所謂'一條……'應當是'聯這兩定點的直線的垂直平分線.'若就英文說,最少在名詞的數上面總常常是用錯的.這樣地思索成了習慣,無論在數學上在英文上都會鑄成一些不自覺而且難於糾正的錯誤.

因了這些理由,我覺得中國學生最少在上課的時候應當聽中國話,看中國文的書.——自然學習外國語應當反過來——然而沒有書讀,卻是一個大大的問題.這便是我寫這册書的動因.當我提筆的時候,很想編成教本,但在中國,教本很難編,要經過我們的教育部審定,要遵守我們的教育部所公佈的所謂課程標準.而我動筆時,這課程標準,也許在起草的專家的腦裏都還沒有影兒,當然要依據也無從找來依據了.

我後來一想,像這類的書,卽使不作教本,也是需要,要打破用英文的課本作教本的關口,無論在那方面都要使中文書的量大大地增加.供給和需要在著作物上,是互相促進的;因此我就請求開明給我出版,而我居然得到他們的允許,這使我很愉快而且對他們懷著很大的謝意.

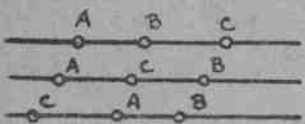
一九三三,四月五日.

目　次

第一章

直坐標——點

1. 線段的正負. 在無限直線上任意用兩點截取一段如第1圖的 AB,這稱爲線段.初等幾何中只研究線段長短的關係,不問牠的方向,所以 AB 和 BA 相等.但在近世幾何中,線段的方向和牠的長短一般地重要.



第 1 圖

方向原是相對的,如圖以 A 點做標準,則可說 B 點在牠的右邊;但若以 B 點做標準,則可說 A 點在牠的左邊.同樣的理由,用 A 點做標準 AB 的方向和 BA 的就恰相反;若用 B 做標準,則 BA 和 AB 的方向也相反.

對於兩個相反的方向,我們可以任意假定一個是正的,則另一個便是負的;所以假定 AB 爲正,則 BA 爲負,因此:

$$AB=-BA,$$

或

$$AB+BA=0.$$

在 AB 線段上若另有一點 C, 則一共成了三條線段

AB, BC 和 AC. 因了 C 點對於 AB 的位置關係不同,也就有三種形式,如第 1 圖所示. 這三條線段的關係,若照初等幾何不問牠們的方向,則可得不同的三個式子,就是:

$$(1)\quad AB+BC=AC,$$

$$(2)\quad AB-CB=AC,$$

$$(3)\quad BC-BA=AC.$$

但若照上面所說的,用 A 點做標準,由 A 向右爲正,向左爲負,則 (1) 式中, AB, BC 和 AC 都是正的; (2) 式中 AB, AC 是正的, BC 卻是負的而等於 '$-CB$'; (3) 式中 AB 是正的, AC, BC 都是負的,所以 AB 等於 '$-BA$'.

由此, (1) (2) (3) 三個式子都可用 (1) 式來代表;換句話說,無論 C 點對於 AB 的位置關係怎樣,下列的關係都可以成立;卽:

$$\boldsymbol{AB+BC=AC.}$$

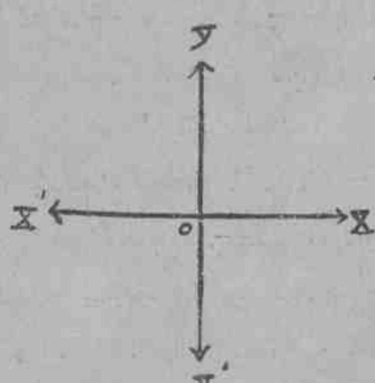
2. 平面上點的位置. 學過地理的人,總都已知道,地球上一個地方的位置,須得要知道牠的經度和緯度纔能決定;如上海在東經 116° 29′, 北緯 39° 53′; 倫敦在西經 5′, 北緯 51° 32′ 便是. 經度是用經過格林維契的做標準,緯度是用地球的赤道做標準. 所以上海在格林維契的東,倫敦卻在牠的西;而上海和倫敦都在赤道的北. 倘若只知道紐約是西經 74° 6′, 我們不過知道牠在格林維契西

邊 74° 6′ 的那條經線上面,至於牠是在北半球或南半球,就莫名其妙了;所以必須還要知道牠是在北緯 40° 25′ 12″ 牠在地球上的位置纔能確定.

地球的表面我們可當作一個平面看,上海,倫敦或紐約,我們可以當作這平面上的一點.由上面的說法可以知道,一個點在平面上的位置,須有兩個不同的量纔能決定.

在這裏有一個疑問可以發生,比如說甲地在乙地的東北五里,倘若乙地是我們已經知道的;那末,甲地的位置不是也就可以明瞭了麼?這不是只有一個量嗎?但仔細分析一下,'東北五里'所含的實在是兩個不同的量;(1)'東北'所表示的是從東方轉向北方 45 度;(2)'五里'所表示的是從乙到甲的直線距離有五里.

3. 直坐標. 依前節所說的,平面上一點的位置須有兩個不同的量纔能決定;但位置本是相對的,所以就得有兩個決定位置的標準.在平面上取直角相交的兩條直線來作決定這平面上一點的位置的標準;這是極通常而且便當的.

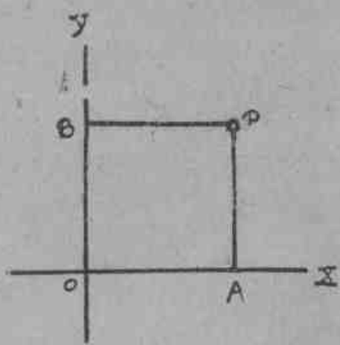


第 2 圖

如第 2 圖，XOX' 和 YOY' 兩條直線相交成直角，就可用來決定牠們所包含的平面上的各點的位置。這稱為'直角坐標'，或簡稱為'直坐標'。XOX' 和 YOY' 稱為'坐標軸'；而 XOX' 稱為'橫坐標軸'，或'x 軸'，YOY' 稱為'縱坐標軸'，或'y 軸'，牠們的交點 O 稱為'原點'。

XOX' 和 YOY' 將平面分成四個'象限'，這是平面三角中已經講過的，不用再加說明了。

4. 點的坐標和牠的畫法. 如第 3 圖從 P 點向兩坐標軸各作平行線 PB 和 PA，則 BP 稱為 P 點的橫坐標，AP 稱為牠的縱坐標。因為從直線外的一點只能作一條直線和牠平行，所以若 P 點的位置一定，BP 和 AP 的方向和長短也一定。反過來，若 BP 和 AP 的方向和長短一定，則 P 點的位置也就決定了。若 BP 和 AP 的長相應地等於 a 和 b，則 a, b 稱為 P 的坐標，我們記成 (a, b)。



第 3 圖

橫坐標以原點作標準向右為正，向左為負；縱坐標以原點作標準，向上為正，向下為負。因此，在各個象限中符號都不相同：

第一象限的點爲……$(+, +)$,

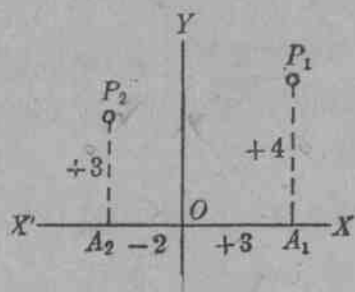
第二象限的點爲……$(-, +)$,

第三象限的點爲……$(-, -)$,

第四象限的點爲……$(+, -)$.

實際上,已知道 P 點的坐標要將牠畫出,並不定要作 BP, AP 兩平行線;因爲 $OAPB$ 既是一個平行四邊形, OA 和 BP 便相等.所以若 P 的坐標爲 (a, b),先在橫坐標上取一 A 點使 OA 等於 a, 然後平行於縱坐標從 A 取 AP 等於 b, 則 P 點就是所求的.

例如 P_1 的坐標爲 $(+3, +4)$, 先從 O 向右在 OX 上取 OA_1 等於 3 個單位得 A_1 點,再從 A_1 向上和 OY 平行取 A_1P_1 等於 4 單位,就得 P_1 點.



第 4 圖

又 P_2 的坐標爲 $(-2, +3)$, 先從 O 向左在 OX' 上取 OA_2 等於 2, 得 A_2 點,再從 A_2 向上和 OY 平行取 A_2P_2 等於 3, 就得 P_2 點.

〔注意〕　坐標的單位可以任意定,但通常橫坐標和縱坐標總用一樣的單位.普通用的方格紙,若沒有什麽不便當,則以 1 小方格, 2 小方格或 3 小方格爲單位 1.

習 題 I.

1. (o, o), (o, b), (a, o) 這三點各在什麼地方?

2. 用適當的單位畫出下列各點:

(a) $(0, 1)$; (b) $(1, 0)$; (c) $(1, 1)$;

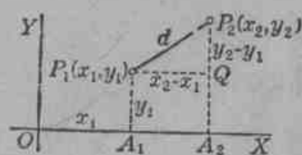
(d) $(-1, 1)$; (e) $(-1, -1)$; (f) $(1, -1)$;

(g) $(2, 3)$; (h) $(-2, 3)$; (i) $(3, -2)$;

(j) $(0, -2\frac{1}{3})$; (k) $(-3.7, 0)$; (l) $(-1\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4})$;

(m) $(-4, 8.2)$; (n) $(3.24, -0.87)$; (o) $(-\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$.

5. 兩點間的距離. 若 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 兩點的坐標已經知道的時候,則牠們中間的距離 d 很容易求出.



第 5 圖

如第 5 圖先畫 P_1 和 P_2 的坐標,又畫 P_1Q 垂直於 A_2P_2, 則

$$P_1Q = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1,$$

和

$$QP_2 = A_2P_2 - A_2Q = y_2 - y_1.$$

但 P_1QP_2 是一個直角三角形,依照<u>闢塔果拉士</u>(Pythagoras)的定理,

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2.$$

所以 $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$