

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數 學

(一至五冊合訂本)

湯元吉 主編

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數學

(一至五冊合訂本)

湯元吉 主編

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月十日再版

自然科學叢書之一

數 學 (1)

全套 24 單冊，合訂五冊，不分售

基本定價 20.80

主編 湯元吉

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 15795 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

序

居今日而欲致國於富強之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求道步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦為國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久為識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心繫祖國，鑒於自然科學之發展，與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，為邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已為數不貲。前歲之多，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以逐譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋湧、李煥榮、南登岐、孫賡年（物理學總執筆人）、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃為序）諸君分任逐譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則為慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實為元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心*譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

* 該中心為一不以營利為目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事為李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭望厚、湯元吉等九人。

編輯要旨

- 一、本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。
- 二、本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本：數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別選請專家逐譯。
- 三、本叢書之供應對象，主要為中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要為主旨。
- 四、原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟為存真起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。
- 五、本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首冊中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專冊，以供讀者檢閱。
- 六、本叢書數學原文，每冊約為六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故為便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印為一冊，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。
- 七、本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認為必要時，亦偶用其他譯名代替之；其為上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尚冀海內專家學者不吝賜教。

- 本叢書之逐譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉為整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。
- 本叢書原文篇幅浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第一冊目錄

	頁數
不要怕數學.....	1
切忌死讀.....	2
研習本書的說明及建議.....	3

上 冊 數

走不盡的公路.....	5
數學符號及四種基本計算法.....	11
加 法.....	12
減 法.....	14
括 弧.....	20
和數及差數之加減法.....	20
求未知數.....	24

下 冊 體

幾何之基本原理.....	31
點.....	32
線.....	34
面.....	39
體.....	39
體之三元.....	40
位置的意義.....	42
角，角度.....	47
內容摘要.....	54
數學符號.....	55
希臘字母.....	56
習題解答.....	56
雜 題.....	60
測 驗.....	60

不要怕數學

許多人對於數學一門，往往害怕而討厭，最好不去碰它。可是同時也知道，不懂數學便找不到職業。數學這一門，乃人人所必需而又迴避不了的一項麻煩的事。假如各位正是這種人，討厭數學而又必需學它，那就正好，本書正好合用。各位很快便可明瞭，數學毫不可怕，祇要循軌前進，不久各位便願意學它，而且結成朋友一般會喜歡它。學習的時候，自然還得靠自己去努力，不努力是不會進步的。本書將協助各位去解決困難，指點方向，提醒並幫助各位，很快各位便不會再怕它了。

本書不以有數學天才或有數學基礎的人為對象，以便讀者得以溫故而知新。更由基本算術開始，因為算術也是數學的一部份。

或有人問：數學的術語，是不是很難？或者你曾經翻閱過數學課本，看見過什麼專門名詞如同：被乘數，商數及其他等等，以為非懂專門術語不可，這也是一種錯覺。例如某一商人，素無駕駛汽車經驗，一旦進入汽車修理工廠，便聽見一些專門名詞如同：聯接器，差速器等等，一點也不懂。可是工廠中任何學徒，却都知道。數學的術語，也是一樣，各位不久便熟悉會用的。

數學中有時會用到外國字母，那也不必害怕或懷疑。我可以舉例說明，它們一點也不難，任何十二歲的兒童，都一教便會。茲舉例如下：

一乘一等於一，普通乘號是以 $\times$ 代表。有時也用一點 $\cdot$ 代表 $\times$ ，這一點放在乘數和被乘數當中，依然讀如乘：

$$3 \times 4 = 4 \times 3; \quad 5 \times 8 = 8 \times 5; \quad 9 \times 7 =$$

各位看了上面第一式和第二式，一定可以知道第三式等於什麼。由於上面三式，即可了解乘法的通例，乘數和被乘數可以隨便換動，答數總是一樣的。無論 3×4 或是 4×3 ，答數總是相等的，我們用 $(=)$ 代替等號。兩數相乘所得，叫做積數。積數是由兩個因子相乘而得的。例如 $3 \times 4 = 12$ ， $4 \times 3 = 12$ 。3和4都是因子，12是積（或稱乘積）。因此，我們得到下面的定律：

不論因子排列次序的先後，其乘積相同。

我們也可以說：第一因子和第二因子相乘，或第二因子和第一因子相乘，其積相同。如以 p 代表第一因子， g 代表第二因子，我們可以說：

$$p \cdot g = g \cdot p$$

我們只要把這一公式和上面用文字說明的定律比較一下，便知公式簡便得多，這是數學的好處。

還有一點須加說明的，即在任何一個公式裏，任何一個字母祇能代表一個一定的數字。例如 p 代表 3，即令搬移到公式右邊去了，仍然代表 3。我們又獲得了一條定律如下：

在任何一個公式中，任何字母，
祇能代表一個數字。

除了 p, g 之外，其他字母，一樣可以採用。例如： $a \times b = b \times a$ ； a 不一定代表 1， b 也不一定代表 2，它們可以代表任何一個數字，當然也可以代表 1 或 2。

4 切忌死讀

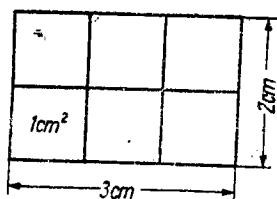
我奉勸各位讀者，要學數學，並不需要死讀和熟記。數學並不盡是一些定律和公式。死記和半懂，為學數學之大忌。許多學生，死記公式，不會思想和活用，那決學不好。本書所着重的，在訓練各位會用：

數學的思考。

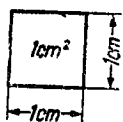
讀者會問：當真可以不用定律和公式，就能學會數學嗎？當然不是如此。祇要你細心研究，確實了解之後，許多公式，自然而然，便會深入腦筋，變成各位的知識，使各位能加以靈活運用。這樣，用不着強記，各位也忘記不了。即令忘記了公式，但憑各

位的了解和智慧，自己也會想得出來。例如：試求 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 的積數。在死記公式的人看來，或以爲分母相同，分子相加即行，一口說出積數是 $\frac{2}{3}$ 。殊不知這是錯了。

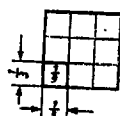
各位如果留心學習本書，答案一定兩樣。這是兩數相乘。例如： $2 \times 3 = 6$ ，各位可以想到一個長方形，一邊是 2cm ($\text{cm} = \text{厘米}$) 一邊是 3cm 。兩數相乘，其積應爲 $2 \times 3 = 6\text{qcm}$ ($\text{qcm} = \text{平方厘米}$)。一看第[4a]圖便可明瞭。現在回到本題 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 上去。請各位試畫一個圖，每邊是 1cm ，各位便了解第[4b]圖，乃是一塊面積爲 1cm^2 或一平方厘米的正方形。 ($\text{cm}^2 = \text{qcm} = \text{平方厘米}$)。因此在 $\frac{1}{3}$ 中的 $\frac{1}{3}$ ，便等於[4c]圖所示的 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ，也就是說等於[4c]圖左下角那樣大小。



4 a



4 b



4 c

各位或將提出疑問，似此構想與畫圖，考試的時間那會够用？不。各位經過如此訓練之後，很快就會有把握，用最大的速度去想像；畫圖也不必過於端正，在幾秒鐘之內，隨便畫個略圖也就够了。開始時也許要多花一點時間，可是值得的。與其快而錯，反不如慢而對來得更好。

本書的教授法，便是求各位懂得所以然，而不是要各位強記或死記。

研習本書的說明及建議

本書每一頁的左右旁，印有較粗的亞拉伯字母 1234...，表示第幾節。在以後複習或參考的時候，常常註明：[1; 5] 等等

，那便代表第一冊第五節。書中的插圖，都編有號碼和 a, b, c 等字樣，號碼表示節數， abc 表示圖號。例如：11a 表示第十一節第一圖，11b 表示第十一節第二圖。

如在同一冊中，提到某節第幾圖，便在方括弧內寫明。例如 [11b] 乃代表本冊第十一節第二圖。如果提到另一冊某節某圖，那便在前面將冊名一併說明。例如 [1; 4c] 乃代表第一冊第四節第三圖。

每一冊中，多半分成兩部份，上一半講數字，下一半講空間和立體。也就是上一半講算術和代數，下一半講幾何。在學校裡的教授法，是分開的，似乎越學越難。本書用的則是混合教授法，同時並進，便等於同時學了兩樣。

請各位在每天腦筋清醒的時候，研習本書。不妨每一句多讀幾遍，直到完全了解為止。每一重要的定律，不妨大聲反復背誦。祇求意義不錯，不求照句死記！每一幅圖，要自己重畫一遍。即使各位在旁的地方，已經學過數學，但對本書比較容易的章節，切勿跳過。因為本書編寫的體裁不同，其中一字一句，都是有其重要性的。

讀者應隨時注意本書提到前文已經討論過的那些資料。用小號字體排印的章節，可以暫時撤去不必複習，亦不致影響到整體的貫通。但這些部份，假如下面各冊再提到時，最好能詳加複習多次。好多節末尾，常附有許多習題，都不難自行解答。而每冊末端，都附有那些習題的答案，以便讀者自行核對。若有錯誤，最好再複習該節一次，然後再做。須知俗語說得好：錯誤乃人之常情。假如本書內容有誤或印刷有錯誤之處，歡迎讀者不吝指教。

做習題時，最好用兩本無格練習簿，一本備計算用，另一本備幾何用。這兩種練習簿亦可作為繪小圖之用。較大的圖，最好另畫在繪圖紙上，並須置備一塊繪圖板，左邊必須平直。此外還需要有一付繪圖儀，一付三角板一把丁字尺。

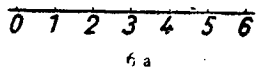
讀完本節，敬祝各位研習數學這一門科學，達到成功之路！

上 冊 數

走不盡的公路

由某城市中心，有一條道路指向東方。在市中心有一塊公路里程碑，上面刻了個 0 字。向東走出去一公里，又看見第二塊里程碑，上面刻了個 1 字；再走一公里，里程碑上刻了個 2 字。學數學的人，一定存了個幻想，這條路是永遠走不盡的。各位可能提出異議，認為天下沒有走不盡的道路的。各位的抗議是對的，可是要知道，數學本是一個理想的世界，學數學必須拋棄現實。可是數學偏偏又能應用在工業的世界裡。以後各位可以慢慢地學到那些。於此又必須提醒各位讀者，假如各位希望變成一個精明的數學家，必須特別專心研習重點，不要七想八想那些不相干的問題。

我們設想將這一條道路縮小，並畫成一條直線。由於我們祇研究里程，所以路寬可以不去管它。爲了簡明關係，路也拉成一條直線。出發點作零點，每一公里加一標記，而且距離相等〔 $6a$ 〕。在每一格上，註明 0, 1, 2...。由於這一直線上的標記，全爲數字，故此一直線，定名爲數字直線。



由零點算起

在我們這一條數字直線上，最左一個數字是零。零點代表市中心里程碑的起點。零爲數學上很重要的一個數字。零以下沒有了，零數是起點。

〔 $6a$ 〕又可以當作一根尺，尺上刻了厘米，分米，又可以拿來丈量長短。（工程上畫圖所用的比例尺，並非普通所用的量尺，以後再有說明。）市面上許多量尺的起點，往往並不註上零字

，事實上却是零點或起點。

現在我們要計算走了多少公里了，當然從市中心零點算起。在許多場合，我們必須從零點計算的。例如賽跑，槍聲一響，大家從零點開始。而計時的馬錶，同樣也得由零點開始。因此我們要了解：

在數學中，零點代表沒有，代表尚未，
代表開始。

所以零並非單純代表沒有，也可以代表競賽的開始。各位讀者，讓我們以今天的零點，作我們大家研習數學競賽的開始吧！

各位能數得多少

各位在那公路上能走多遠？換句話說，各位能數得多少？這並非對小學初級生的問題。我可以問得再仔細一點：一二三四數下去，要到何時為止？撇去冗長計算和浪費時間不說，即令各位有時間，有興趣，有記性，各位是永遠算不盡的。各位也可以回答說：數下去是沒有止境的。

除了千數萬數億數兆數，再下去還有說不清的某數某數，我們可以簡單說：下一個數一定是前一個數的加一，或者說，每一數必然比前數多了個一。總而言之，在數學上我們可以說：

數字是數不盡的，或者說，數字是無窮的。

此處所指無窮或者不盡，我們也許不懂。反過來，我們給無窮下了一個定義：永遠數下去多一。

現在各位知道無窮數了。根據無窮數的定義，各位也可以用圖或數字表達出來。在上面第〔3〕節我們學過，我們可以用一個字母，代表任何一個數字。我們現在用 n 。

23 加一個，我們知道是 $(23+1)$ ，215 以上一定是 $(215+1)$ 。所以用 $(n+1)$ 既可以代表 $(23+1)$ ，也可以代表 $(215+1)$ ，這 $(n+1)$ 便可以通用了。比 $(n+1)$ 再多一個的數字，便是

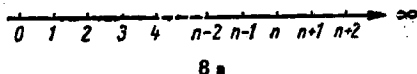
$(n+2) \circ 22 = 23 - 1$, 22 是 23 前面的一個數字。假如 n 代表 23, 則前面的一個數字, 便是 $(n-1)$, 以此類推。

在 $[8a]$ 圖中一目了然

。當中有斷線, 代表當中切

去了一段。 n 代表某一數,

隨便說是 275 或者 1056, 甚至任何一數都可。它前面一數, 一定是 $n-1$, 再前面一個是 $n-2$ 。它後面一個, 一定是 $n+1$, 後面兩個一定是 $n+2$ 。



我們用箭頭表示數字一直數下去是無窮無盡的, 同時箭頭前面還有一個好似橫寫的 8 字, 這是數學上專用的一個符號, 代表無窮數。一看見 ∞ , 便知道是說不完的無窮數。

習題：

9

在適當的地點, 我們暫停研討, 先做些練習題也好。上面第 [5] 節中已經說過。(此次只擬請各位做很少幾個習題, 以後將越來越多。)

1) 由 0, 1, 2, ... 數起, 到了 8 以後, 應為何數? (注意: 答數不用 9, 須用另一方式代表。)

2) 在數字行列中, p 代表某一數。問 p 前一數為何數, 後一數又為何數?

3) 問 p 數前五數及後五數各為何數?

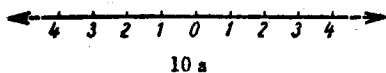
4) 問 8 之倍數為何數? (不用 16 表示, 須用另一方式表示之)。

5) p 之倍數為何數?

再談走不盡的公路

10

由市中心除了向東的路以外, 另有一條向西的路。這兩條路同一起點, 而且都豎立了一塊塊的里程碑 1, 2, 3...。雙方均用箭頭, 表示路走不完, 可是



方向是一東一西相反的, 這應該有一個區別, 好比東行四公里和

西行四公里，怎樣去劃分和計算。因為這裡兩路是正東正西的，故可用逆向去解決它。這方法也適用於正南正北，或者左右對向，而不適用於其他的，不在一條數字直線上的兩條路，如〔10a〕圖。

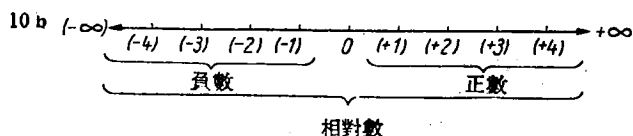
我們在計數物羣（如公路里程碑）數學上，逢有逆向，即一正一反的地方，必須加以區別，這對以後研究數學，有極大意義。

數學家對於兩個逆向的計算，係用正號和負號來區分。

孰是正號，誰是負號，可以隨意選定。假如各位選定東向爲正，則西向一定是負。選擇時多半以向着目標爲正，背着目標爲負。例如造屋工作爲正，拆屋工作爲負。

〔10a〕圖中，我們選定東向爲正。在0點以東的數字前，一律加以正號(+)。在零點以西的數字，則一律加以負號(-)，讀如正負。這是數字前面的符號，例如 +4 讀如正四，-4 讀如負四。祇有 0 才沒有正負符號。（何故？）+- 在此爲正負，過去的加減符號亦爲 +-，注意它們的符號雖然相同，可是讀法不同，意義也不同。這是非常重要的一點！初學時爲了避免混淆起見，我們暫時將正負符號的數字，外面加一道括弧()，例如 (+4) 爲正四，(-4) 爲負四。

現在我們可以將〔10a〕的數字直線，利用符號，使其完整了，如〔10b〕圖：

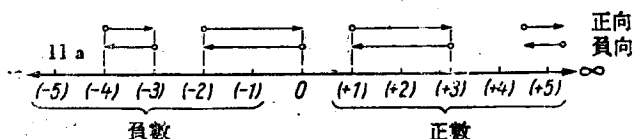


〔10b〕圖中，0 點以東的數字，全加上正號，以西的數字，全加上負號。正數和負數，都是相對數。看便圖明白，它們是分向東西或正負兩個不同的方向的。

註：在第〔3〕節中，我們知道一個字母，可以用來代替任何一個數字

。現在應該補充一句，這字母可以代表一個正數或負數。所以一個字母，可以代表任何一個相對數，而用不着加上正號或負號。不過也例有外。在需要區別正 a 和負 a 時，也須加上正負符號。以下還要說到。假如我們祇要絕對數值，而不計較它的正負，則無需正負符號：例如 $(+4)$ 和 (-4) 的絕對值，同樣都是 4。

現在我們回到談公路的第[10b]圖。由 0 點向右，數字都是正的，我們叫它正向。同樣，向左都是負數，我們叫它負向。在任何一個方向之中，由任何一點或里程碑，我們又可以由左向右，或由右向左行走。例如由 (-4) 到 (-3) 或由 (-2) 到 0，雖然都是在負向區內，可是走的仍是正向。祇要是由左向右走，便都是正向。反之，祇要是由右往左，無論是由 $(+4)$ 到 $(+2)$ 或由 $(+5)$ 到 0 乃至到 (-2) ，都是負向。參閱[11a]圖。



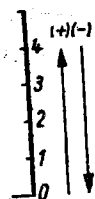
由上圖我們必須嚴格區分：

- 正數及負數；由 0 向右都是正數，向左都是負數。
- 正向及負向；不論正數和負數，向右走的都是正向，向左走的都是負向。[11a] 圖中，係用箭頭表明。

除了左右之外，我們再舉上下一例。

電梯中上下

住宅中的電梯，多半由平地開始。我們叫出發點為 0。電梯裡面也是用 0 點表示到了平地。乘客看到 0 點的燈光，便知道已經落地了。假如各位要上一樓，只要看見 1 字的燈光亮了，便是到了一樓。[11b] 圖，是電梯上的簡化圖。

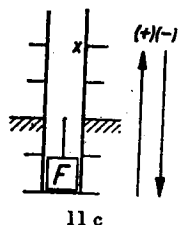


電梯向上開動，我們叫它為正向。於是向下開動，便是負向。電梯已降落到了平地，0 燈發亮，電梯再開

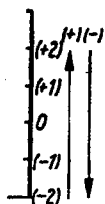
不下去了。這裡的 0，是正向的起點，同時也是負向的終點。

類此之例極多。例如軍事工程有三道便橋，當然順序編成 1, 2, 3 號。等到拆除之時，一道道拆去，便由 3 變 2 變 1 而至於 0。0 以下的負數，對便橋而言，是不存在也不可能的。

在上文公路的例子，乃至其他日常生活實例上，在負向方面，也可能繼續下去，例如地下室便可下達到兩層或三層。電梯也得開到地下室，然後由地下二層再向上開，如〔11c〕圖。我們叫上行爲正向，則向下開便是負向。我們習慣以地平爲準。儘管由地下底層開到二樓，已經有四層，可是地面以上二樓，仍然用 2 表示比較合宜，寧願以地平爲準，上二層或下二層。



我們採用簡明的標誌，來表示地上幾層或地下幾層。數學家多半以正號表示地面上，以負號表示地面下。（當然我們也可以反過來用負代表地上，用正代表地下。）因此採用〔11d〕圖的標記。不過我們必須注意正和負的雙重意義，上面已經說過的：正號代表地面上的一層樓二層樓，正向則代表上行的方向；負號代表地面下的一層二層，而負向則代表下行的方向。正號代表零以上，同時也表示向上；負號代表零以下，同時也表示向下。〔11d〕圖顯示出，電梯正向行駛時，也可以由負號各層上行，或負向行駛時，也可以在正號各層下行。



11 d

12 同樣的情形，也適用於溫度計。

在溫度計上，我們稱每一格爲一度。冰點以上，我們叫它正幾度，冰點以下叫它負幾度。溫度計上玻璃管中的水銀上升時，我們謂之正向。即令在冰點下，由負十五度升到負十度，也算是正向上升五度。反之，如果由正三十度降到正二十度，仍然叫做負向降落了十度。

13 另一例子爲銀行存款。

第〔11a〕圖也可以代表簡單銀行存款。（+4）表示尚有存款