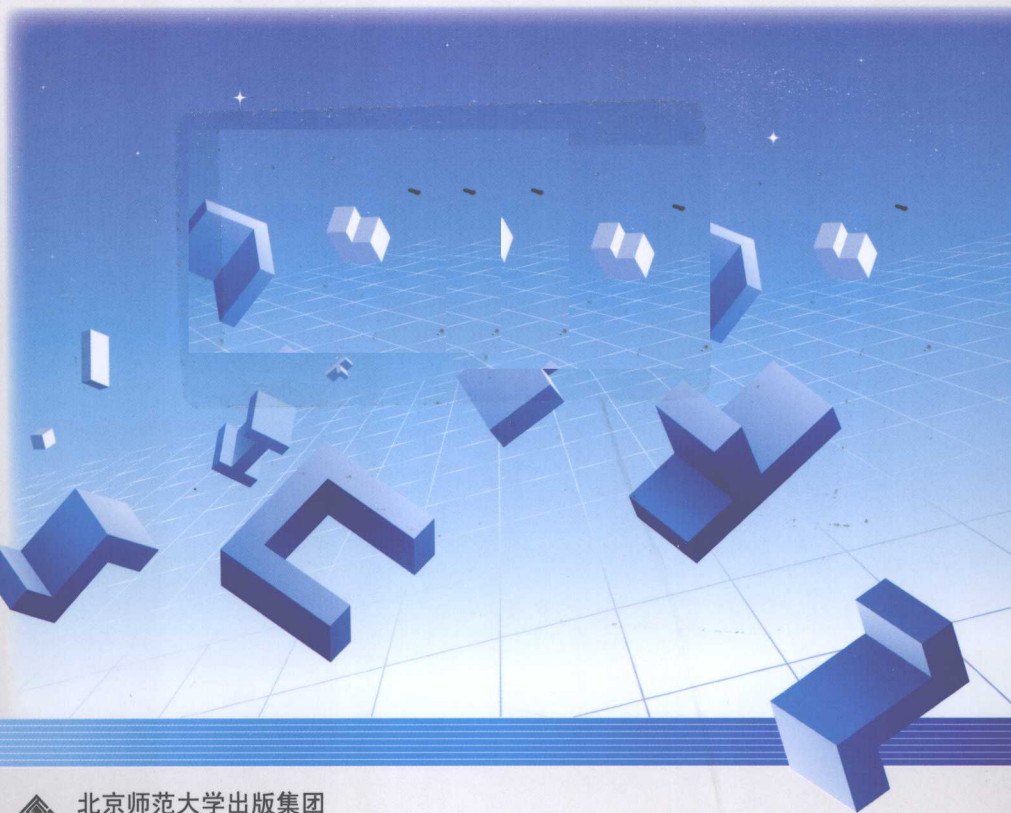
 数学教育丛书

# 数学教学心理学

SHUXUE  
JIAOXUEXINLIXUE

张英伯 曹一鸣 丛书主编  
喻平 编 著



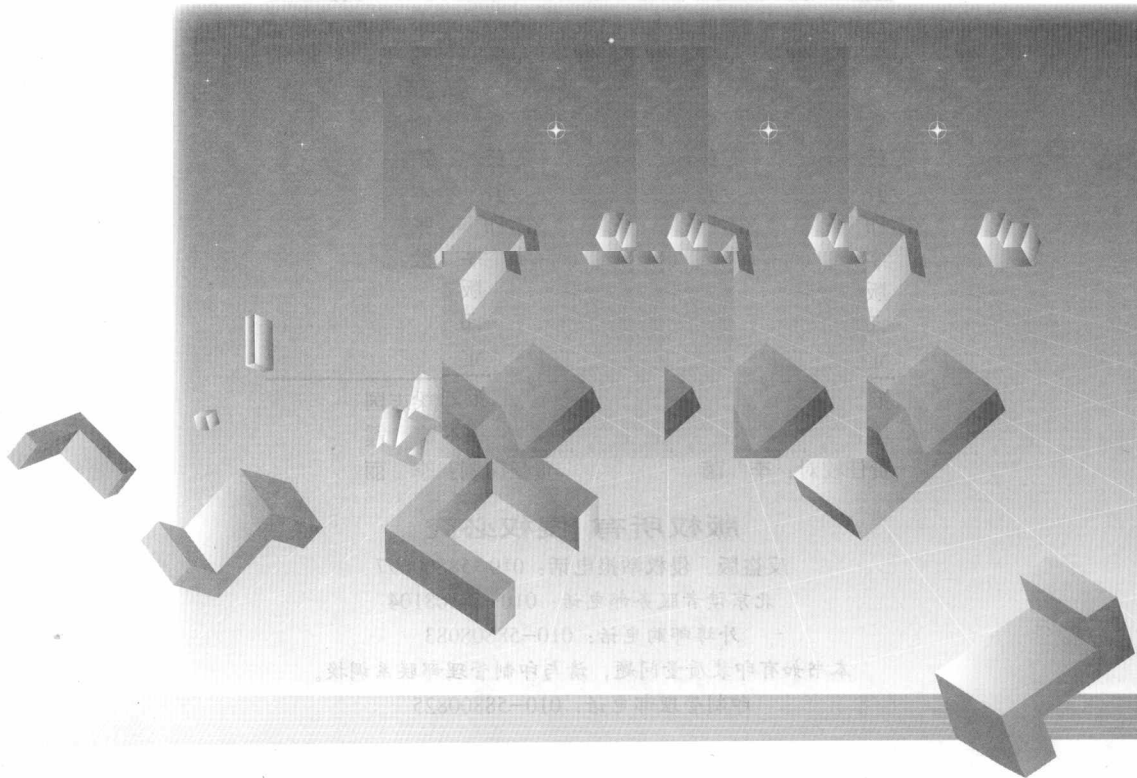
北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

京師 数学教育丛书

# 数学教学心理学

SHUXUE  
JIAOXUEXINLIXUE

张英伯 曹一鸣 丛书主编  
喻平 编著



北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

---

**图书在版编目(CIP)数据**

数学教学心理学 / 喻平编著. —北京: 北京师范大学出版社, 2010.1

(数学教育丛书 / 张英伯, 曹一鸣主编)

ISBN 978-7-303-10629-5

I. ①数… II. ①喻… III. ①数学教学—教学心理学—中学 IV. ①G633.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第195259号

---

营销中心电话 010-58802181 58808006  
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>  
电子信箱 beishida168@126.com

---

出版发行: 北京师范大学出版社 [www.bnup.com.cn](http://www.bnup.com.cn)  
北京新街口外大街19号  
邮政编码: 100875

印刷: 北京京师印务有限公司  
经销: 全国新华书店  
开本: 170 mm × 230 mm  
印张: 22.5  
字数: 374千字  
版次: 2010年1月第1版  
印次: 2010年1月第1次印刷  
定价: 37.00元

---

策划编辑: 梁志国 责任编辑: 梁志国  
美术编辑: 高霞 装帧设计: 高霞  
责任校对: 李茵 责任印制: 李丽

**版权所有 侵权必究**

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

# 数学教育丛书

顾 问:徐利治 张景中 张奠宙

主 编:张英伯 曹一鸣

丛书编委会(按姓氏笔画为序)

马云鹏 王光明 孔凡哲 宁连华

代 钦 宋乃庆 张奠宙 张英伯

张春莉 张景中 张生春 松宫哲夫

涂荣豹 高 旻 徐利治 黄秦安

曹一鸣 喻 平

# 总 序

成为一名优秀的数学教师，是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展，提高中国数学教育的质量，是每一位中国数学教育工作者的匹夫之责。

数学教育是数学的教育，数学教师需要有良好的数学素养。20世纪后半叶及21世纪初科学技术的迅猛发展，对大、中、小学数学教育提出了越来越高的要求，数学课程改革需要不断应对时代的挑战。将一些现代数学的内容以及思想方法(譬如，微积分、向量、算法、编码、统计、群等)引进中学数学课程，已是大势所趋。相比以往，正在实施中的数学新课程，内容变化较大，许多选修课的内容甚至连教师都没有学过。现在的课程内容涉及的知识面广，难以全面掌握、深刻理解，使得广大的中学数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。

教师是一个专门的职业，作为一位优秀的数学教师需要有良好的数学教育素养。面对时代的要求，面对新的教学理论、教育技术，如何处理传统与现代的关系，改进教学方式，让学生主动参与教学，减轻学生过重的数学学习负担，提高数学教学效率，促进学生长远发展，这些都需要教师对数学教育理论进行系统的学习与研究。

全国高等师范院校数学教育类课程与教材建设正在进行之中。近年来的全国高等师范院校数学教育研究会特别将“数学教育专业课程建设”以及“研究生培养”作为重点专题来研究。2005年全国高等师范院校数学教育研究会常务

理事会期间，部分专家提出目前没有合适的、系统的数学教育本科、研究生（特别是教育硕士）教材。2006年全国高等师范院校数学教育研究会议再次提出这一问题。会议期间几位热心的学者着手策划此事，从而诞生了本套丛书。该套丛书得到了许多著名数学家以及数学教育家的鼎力支持。张景中院士、徐利治教授、张奠宙教授欣然答应担任丛书顾问，并承担丛书的编写工作。他们身体力行，为建设中国数学教育大业，提高数学教育类教材水平鞠躬尽瘁。他们严谨治学的态度深深地影响着参与丛书编写工作的各位同仁。各位编委（分册主编）齐心协力，充分利用参与国内外学术交流的机会，探讨交流、出谋划策，经过大家的共同努力，初步确定了这一套书的总体框架，也彰显了国内数学教育同仁的强烈责任心和神圣使命感。

北京师范大学出版社大力支持我国的数学教育类课程与教材建设，理科编辑室梁志国主任精心运作，将“丛书”纳入出版计划，体现了北京师范大学出版社服务于教育事业的使命感。

这套丛书共12本，构成一个整体，基于数学，紧密联系数学教学实践，各有侧重：一类加深对数学素养的提升，如《数学哲学》《数学方法论选读》《现代数学通览》《现代数学与中学数学》（第2版）；另一类则注重于提升数学教育理论与研究水平，如《数学教育原理——哲学、文化与社会的视角》《数学课程导论》《数学教学论》《数学教学心理学》《数学教育测量与评价》《数学教育研究方法与论文写作》《数学教育史》《数学教学案例研究》。

但愿该套丛书的出版能够为有志于系统研习数学教育理论，全面提高数学及数学教学、科研水平的中小学教师、教研员、本科生、研究生提供有效的帮助。

数学教育丛书编委会

2009年7月

# 前 言

数学教育(学)心理学作为一个单独的学科,其历史只有30余年。但是,数学学习或教师教学的心理问题却源远流长,因为,有了教学就有了这些问题。

应当说,数学教育心理学的生长,主要是建立在教育心理学的研究基础之上的,而教育心理学又是心理学发展到一定阶段之后与教育问题相结合的产物,这个由一般到特殊的研究思路、由单纯学科研究到学科之间交叉与结合研究的发展沿革,是历史的事实,也是合乎人类思维逻辑的。

在这里,需要厘清两种关系。第一,数学教育心理学与数学教学心理学。数学教育心理学与数学教学心理学没有本质的区别,但从“教育”和“教学”的关系看,后者显然包含于前者,教育的概念宽泛,教学的概念专门。因此,本书定名为“数学教学心理学”,意在专门讨论数学教学中心理问题,研究的内容主要是课堂教学中的问题,不涉及课堂之外学生的心理,也没有对教师的心理问题进行专门论述。第二,数学学习心理学与数学教学心理学。前者主要探讨学生在学习中的心理现象、规律,研究的是学习问题;后者以学习心理学为基础,讨论教师如何根据学生的心理规律制订相应的教学计划和教学策略,研究的是学习和教学问题。因此,在各章都安排了教学设计或教学策略的相关内容。

本书的构思基于以下考虑。

第一,没有对历史上心理学理论的发展进行全面介绍,因为这一部分内容在一般教育心理学的论著中均有表述。因此,在内容安排上直接切入数学教学心理学的研究主题。

第二,力求展示数学教学心理学研究的最新成果,包括对国内外近30年来的研究动态、研究课题、研究方法、研究成果的介绍和评述,主要想法是使读者对数学教学心理研究的体系、框架、内容、方法有一个整体性的认识,同时又能使读者明确这一领域研究的一些前沿问题和热点问题。

第三,贯穿全书的理论基础主要是认知心理学和建构主义理论,但是并不排斥行为主义理论中的合理因素。

第四,没有对研究方法进行专门介绍,但是在论述中穿插了研究案例的分析,事实上又突出了数学教学心理的研究方法。读者对案例的学习主要是领会、理解和掌握研究者的研究目的、研究思路、研究设计和研究方法。我们认为,研究案例是学习数学教学心理学不可缺少的内容,这种学习方式对于提高学习者自身的研究能力有积极的促进作用。

本书共12章。

第1章对国内外数学教学心理研究的基本概况作出粗略的梳理,其中国外部分比较详细,介绍国际数学教育心理学组织(PME)30年来的主要研究工作。国内部分没有进行详细综述,主要讨论数学教学心理学研究的几个特征,提出几点思考。

第2章讨论数学知识的分类和表征。以认知心理学为理论基础,讨论了一般知识的分类与表征,然后结合数学学科的特点,对数学知识的分类与表征作了探讨。

第3章讨论数学认知结构。主要介绍数学学习的CPFS结构理论,然后介绍概念图的理论与应用。之所以把概念图作为本章的一个内容,是考虑到概念图与认知结构有内在的密切联系,它是沟通外显知识结构与认知结构的桥梁。

第4章讨论学习中的迁移问题。首先介绍迁移理论的发展,然后讨论迁移的研究方法,在此基础上,结合数学学习的特殊性,研究迁移对数学学习的影响,最后提出促进正迁移产生的若干教学策略。

第5章讨论元认知问题。在介绍元认知的一般理论、元认知的若干研究之后,就外部因素和内部因素对数学学习中的元认知作用进行分析,并提出提高学生元认知水平的若干教学策略。

第6章讨论个体认识信念问题。首先介绍认识信念的相关理论,然后讨论数学学习中的认识信念问题,最后从教学层面讨论教师的教学信念。

第7章讨论数学学习中的非智力因素问题。在介绍非智力因素一般概念的基础上,主要探讨动机、焦虑和自我效能感3个因素对数学学习的影响,最后提出激发学生非智力因素的若干教学策略。



第8章讨论数学学习策略问题。首先介绍学习的相关理论,然后论述数学学习的阅读策略、直观化策略、对象转化策略、反思策略。

第9章讨论数学概念的教与学的心理问题。包括概念形成的理论、数学概念学习的心理过程、数学概念教学设计3个主要论题。

第10章讨论数学命题的教与学的心理问题。包括命题学习的一般理论、演绎推理与合情推理、数学命题的教学设计3个主要论题。

第11章讨论数学问题解决的教与学的心理问题。包括数学问题解决的相关理论、数学问题解决中的部分心理要素的分析、数学问题解决的教学策略等3个主要问题。

第12章讨论数学能力问题。首先对数学能力研究的传统进行反思,对数学能力结构进行重构,然后讨论中小学生数学能力的发展,最后提出关于数学能力的一些值得研究的问题。

书中可能会出现个人观点的偏颇,或对他人研究成果的曲意理解,敬请读者在阅读过程中对不妥或不实之处提出批评与校正。

喻平

南京师范大学随园

2009年6月

# 目 录

<b>第 1 章 数学教学心理研究的历史沿革 /1</b>	
1.1 国外数学教育心理研究概况 .....	1
1.2 国内数学教学心理研究概况 .....	23
<b>第 2 章 数学知识表征 /31</b>	
2.1 认知心理学关于知识表征的相关 理论 .....	31
2.2 数学知识的分类与表征 .....	40
<b>第 3 章 数学认知结构 /46</b>	
3.1 数学认知结构的基本理论 .....	46
3.2 数学学习心理的 CPFS 结构理论 .....	50
3.3 概念图的理论与应用 .....	69
<b>第 4 章 数学学习迁移 /82</b>	
4.1 学习迁移理论的发展 .....	82
4.2 学习迁移的研究方法 .....	89
4.3 数学学习中的迁移研究 .....	97
4.4 促进正迁移产生的若干教学策略 .....	110

<b>第 5 章 数学学习中的元认知因素 /118</b>	
5.1 元认知理论 .....	118
5.2 学习中元认知的若干研究 .....	125
5.3 数学学习中元认知的作用 .....	134
5.4 提高学生元认知水平的若干教学策略 .....	142
<b>第 6 章 数学教学中的认识信念 /146</b>	
6.1 认识信念的基本理论 .....	146
6.2 数学学习的认识信念 .....	151
6.3 数学教学的认识信念 .....	160
<b>第 7 章 数学学习中的非智力因素 /175</b>	
7.1 非智力因素概述 .....	175
7.2 非智力因素对数学学习的影响 .....	178
7.3 激发非智力因素的若干教学策略 .....	194
<b>第 8 章 数学学习策略 /200</b>	
8.1 学习策略的相关理论 .....	200
8.2 数学学习的几种策略 .....	207
<b>第 9 章 数学概念教学心理 /227</b>	
9.1 概念形成的相关理论 .....	227
9.2 数学概念学习的心理过程 .....	232
9.3 数学概念教学设计 .....	238
<b>第 10 章 数学命题教学心理 /253</b>	
10.1 命题学习的相关理论 .....	253
10.2 演绎推理与合情推理 .....	261
10.3 数学命题教学设计 .....	271

**第 11 章 数学解题教学心理 /281**

- 11.1 数学问题解决的相关理论..... 281
- 11.2 数学问题解决认知要素的研究 ..... 292
- 11.3 数学解题教学设计 ..... 304

**第 12 章 中小学生的数学能力 /312**

- 12.1 数学能力研究的反思与重构 ..... 312
- 12.2 小学生数学能力发展 ..... 326
- 12.3 中学生数学能力发展 ..... 333
- 12.4 数学能力研究的若干课题..... 341

**主要参考文献 /343**

# 第1章 数学教学心理研究的历史沿革

数学教学心理学作为一个专门的研究领域,其历史只有30多年,它是数学教学理论与心理学结合的产物,它的发展经历了借用心理学理论解释数学学习心理现象到数学教学心理自身理论建构与发展的历程。本章从国外和国内两个方面就数学教育心理学研究的历史作一个梳理,从而明晰涵盖于数学教育心理学中的数学教学心理学研究的问题、结论及走向。

## 1.1 国外数学教育心理研究概况

将数学教育心理学作为专门研究领域始于20世纪70年代。在第3届国际数学教育大会(ICME)召开期间,国际数学教育心理学组织(PME)于1976年在德国的卡尔斯鲁厄成立,第1届数学教育心理学大会于1977年由弗赖登塔尔(Freudenthal)在荷兰的乌特列支组织召开。此后,数学教育心理学组织每年都会在全球的某个地方组织召开大会。国际数学教育心理学组织已发展成教育研究领域中最成功的国际合作研究的典范之一。当前,这种发展趋势仍在持续,经过数学教育心理学组织的不懈努力,不断地寻找和发展新的研究数学的教和学的方法,并且整合其他学科研究领域中所出现的新观点,使数学教育心理的研究得到了长足的发展。

下面围绕国际数学教育心理学大会的学术论文集介绍国际数学教学心理研究概况,这些论文集详细概述了那个时期该研究领域中的研究现状。<sup>①</sup>

### 1.1.1 代数的教与学的研究

代数的教与学始终是数学教育心理学共同体研究的重要分支,从1977年第1届数学教育心理学大会到2005年第29届数学教育心理学大会,这个期间共有33篇关于代数研究的报告。早期的研究主要关注代数概念和过程、解代数应用题以及从算术学习转变到代数学习过程中学生所遇到的困难。字母、符号的学习是被研究的主要课题,用于分析研究数据的基本理论框架多源于皮亚杰(Piaget)的认知发生原理。随着研究的深入,数学教育心理学的研究范围得

<sup>①</sup> Gutierrez A, Boero P. Handbook of research on the psychology of mathematics education past, present and future. Netherlands: Sense Publishers, 2006.

到了进一步的拓展，它涵盖了表征符号、技术工具的应用、关于代数内容的不同观点，以及用于思考代数学习、教学和用于分析数据的各种不同理论框架。

表 1.1-1 数学教育心理学代数研究 30 年中出现的重要主题

时间段	出现的研究主题
从 1977 年到 2006 年	1. 从算术向代数、变量和未知数、方程式和解方程式以及代数应用题转变
20 世纪 80 年代中期到 2006 年	2. 技术工具的应用以及对多元表征形式和归纳的关注
20 世纪 90 年代中期到 2006 年	3. 小学生的代数思维，对代数教学、物理环境的动态模式和其他动态代数环境的关注

### 1. 算术学习到代数学习的转变

早期，数学教育心理学共同体中的代数研究者一般都把代数课程看成是给定的课程，他们主要关注学生在遇到代数符号和代数运算时的思维和方法，因为从算术向代数的转变过程中，这些符号和记号的意义会发生转变。早期关于学生解释代数符号方式的研究趋向于关注认知水平<sup>①</sup>，关注算术体验和思维方式<sup>②</sup>，关注符号应用的困难，如带有乘法意义的等号<sup>③</sup>，以及括号的使用。

早期很多研究都关注初学代数的学生解方程的方法：<sup>①</sup>本能方法，包括使用数字事实、计数技巧以及隐藏法。<sup>②</sup>尝试错误法。<sup>③</sup>标准方法。学生在解方程中所出现的错误也是研究者的兴趣所在，例如，忽视将这一对数字结合起来的减号运算；方程变形的错误，以及错误的检验行为。更为近期的研究已经开始深入探究学生解不等式的方法，学生解方程组的方法，他们发现已经学习过一元一次方程的学生更乐于使用“加减法”而不是“代入法”。在解应用题的过程中，有学者探讨了真实的、现实的情境影响，也研究了在解决长度和面积问题的过程中，画不正确的直线图所导致的后果，他们发现：真实性因素和画图活动对学生的解题活动没有产生有益的影响，事实上，真实问题反而使学生远离了问题潜在的数学结构。

<sup>①</sup> Kieran C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 1981(12).

<sup>②</sup> Booth L R. *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson, 1984.

<sup>③</sup> Kieran C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 1981 (12).

在这个研究主题组中，更为近期的研究反映在理论和方法上的转变，这些转变在过去 25 年当中经常发生。建构主义的理论框架在 20 世纪 80 年代得到了蓬勃发展，建构主义认为知识是认知主体主动建构的，而不是从环境中被动接受的，这个观点吸引了众多数学教育心理研究者的研究兴趣，这一理论也使得代数研究者把注意力从学生所犯的错误转移到他们是如何理解代数概念和过程的。尽管研究的焦点仍然属于认知范畴，但是它比早期的研究范围要更为广阔。

20 世纪 90 年代，社会-文化理论观点在数学教育心理学共同体之外发展起来，并开始对数学教育心理学共同体内形成。对于很多从事代数教学心理的研究者来说，较为早期的建构主义、认知方向的研究开始转向研究影响代数学习的社会因素分析，并开始对文化工具的调节作用产生兴趣。这种转变也导致课堂文本的研究得到迅速发展，课堂文本的研究开始关注教师与学生、学生与学生之间的互动。

## 2. 代数学习中工具的作用

20 世纪 80 年代，代数研究主要关注字母和符号，这种研究开始经历一些变革。尽管函数研究在最初几年一直被认为是一个独立的研究领域，但是，这两个领域的研究开始在代数研究领域发生了融合。带有图形的、表格的、符号表征形式的函数开始被看成是真实的代数研究对象。尤其是图形表征形式开始被看成是融合字母-符号表征形式和意义的工具。有些数学家和数学教育家主张：计算技术对中学数学和大学数学的内容和难度可能会产生重要影响。早期一些富有远见的研究者就已经提出了这个观点，即在数学教学中，计算技术有利于更为全面地整合数学对象的多元表征形式。

对这个时期的研究产生重要影响的是技术工具的应用，技术工具可以应用于代数学习中。技术工具的使用不仅促使函数研究从多元表征形式研究向学校代数领域发展，也成功地扩大了学习代数的学生获得代数意义的源泉。代数不仅仅成为关于方程式和解方程式的研究，也逐步发展成为涵盖函数（及其表征形式）及其转变的研究，并且也涵盖了这些函数所能模拟的真实世界情境。社会-文化观点也被应用于学习研究设计和数据分析中，两者的综合产生了新的问题，这些问题主要涉及在课堂中用这些工具进行学习的本质以及不同参与者的作用。

## 3. 代数思维

研究主题涉及小学生代数思维，关注代数教师及教学，关注物理环境的动态模式和其他动态代数环境。

随着以方程式为主题的代数研究逐步扩展到研究函数和各种各样的函数表征形式所模拟的真实世界情境,代数可以被更多的学生所理解,甚至小学生也可以理解代数,这个观点被不断地完善。关于小学阶段代数思维发展的研究,在20世纪90年代中期的数学教育心理学大会上首次出现。大约同一时间,关于代数教师的研究也发展迅猛。在数学教育心理学发展的整个过程当中,代数学习者成为代数研究者关注的焦点。

与此同时,20世纪90年代中期,研究主要关注代数学习中的动态环境、物理环境的探索和模式化与技术工具的整合,可以在这些研究中看到与技术相关的代数研究中所出现的进展。新的技术观点正在形成,试图更加准确地思考代数学习的各个方面,这些方面正在被研究,尤其是手势、身体运动以及语言在代数学习中所起的作用。

早期算术研究所关注的一些重要主题,大部分内容主要涉及自然数、数列以及计数的学习。皮亚杰理论、计数为主的方法,主导着关于自然数概念的研究,但是这两种方法并不是相互冲突的,在更广的理论视野中,它们是互补的。皮亚杰理论把逻辑推理看成是自然数概念建构的基础,而计数为主的方法则主张数字概念衍生于计数技巧,但是这种计数技巧形成于数量化的过程之中。

研究涉及范围包括:第一,计算策略的认知分析,如儿童在个位数的乘法和除法研究领域中计算策略的特征和发展<sup>①</sup>、儿童多位数的计算<sup>②</sup>、学习成绩较差的学生所获得的简单的算术策略<sup>③</sup>。第二,在不同环境中发展算术能力,关注3个主题:①具有高度教育意义的环境的设计、应用和评价,这些环境兼容了数学专业知识的性质观和数学学习作为社会文化情境中的主动的、联合的意义建构的观点。②教师知识、信念和活动在这类学习环境中的作用。③校外情境中的算术知识和技巧的获得和使用,这些知识与技巧与学校数学存在潜在

---

① Mitchelmore M C, Mulligan J T. Children's developing multiplication and division strategies // L Puig, A Gutierrez. Proceedings of the 20th PME International Conference, 1996.

② Cooper T J, Heirdsfield A M, Irons C J. Year 2 and 3 children's correct-response mental strategies for addition and subtraction word problems and algorithmic exercises // L Puig, A Gutierrez. Proceedings of the 20th PME International Conference, 1996.

③ Gray E M, Pitta D, Tall D O. The nature of the object as an integral component of numerical processes // E Pehkonen. Proceedings of the 21st PME International Conference, 1997.



的联系,促进学校数学的发展。显然,所有这些内容不仅仅在算术领域中非常重要,在数学领域的学习中也是非常重要的。

研究还涉及解决应用问题。为了考查学生如何解应用题,一些研究者始终关注基于图式测验的方法。这些方法充分应用了问题的图形表征形式,借此来测试或提高小学生所要学习的概念知识结构。同时,数学教育心理学研究共同体也越来越关注在解数学问题的环境中认知和元认知(或者自我调节)策略的作用,以及不同类型的情感、情绪和信念之间的相互关系对解决问题的影响<sup>①</sup>、开放性问题。

数学建模也是一个重要的研究主题。主要强调问题的真实情境、解题策略和问题解决的态度。这些实验方案的共同特征包括:①使用比传统教材中的问题更加实际的、更具挑战性的任务。②教学方法和学习者活动的多样性,包括专家解题策略的模拟、小组研究和全班讨论的策略性因素。③课堂环境的创造,这种环境有助于小学生进一步完善数学模式化的观点,促进小学生发展数学的信念和态度。<sup>②</sup>

## 1.1.2 几何与空间思维

关于几何和空间思维的研究,主要关注的课题是思维水平、思维策略、视觉化、证明和技术等。

### 1. 范希尔(Van Hiele)的几何思维模式

范希尔夫妇提出了几何思维模式,这个模式由5个推理水平构成:认识(感知仅仅是视觉的)、分析(根据性质辨别图形)、分类或非正式的演绎(意识到性质的重要性)、正式演绎(建构几何证明)、严密性(这个要素表明从前一个水平进行运算和辨别是很困难的)。思维发展源自格式塔式的视觉水平,主要经过描述、分析、抽象和证明这几个水平,这些水平的复杂程度是逐渐增加的。范希尔夫妇认为:教学应该适应学生的思维水平,并提出了教和学的模式,这个模式提出了如何促使学生从一个思维水平发展到另一个思维水平的建议。

随后,许多学者对范希尔的几何思维模式展开了不同侧面的研究。有人研

<sup>①</sup> Marcou A, Philippou G. Motivational beliefs, self-regulated learning, and mathematical problem solving // H L Chick, J L Vincent. Proceedings of the 21st PME International Conference, 2005.

<sup>②</sup> English L D, Watters J J. Mathematical modeling with young children // M J Hoines, A B Fuglestad. Proceedings of the 28th PME International Conference, 2004.