医用高等数学学习指导

主编 吴克坚 徐清华

YIYONGGAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

第四军医大学出版社

医用高等数学学习指导

医用高等数学学习指导

主　编　吴克坚　徐清华

副主编　李文潮　赵东涛　赵清波

编　者　（按姓氏笔画排序）

万　颖　李文潮　吴克坚

赵东涛　赵清波　徐清华

第四军医大学出版社·西安

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导/吴克坚,徐清华主编.—西安:第四军医大学出版社,2009.9
ISBN 978-7-81086-694-1

Ⅰ.医… Ⅱ.①吴… ②徐… Ⅲ.医用数学:高等数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311;O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第172253号

医用高等数学学习指导

主　　编　吴克坚　徐清华
责任编辑　马元怡
出版发行　第四军医大学出版社
地　　址　西安市长乐西路17号(邮编:710032)
电　　话　029-84776765
传　　真　029-84776764
网　　址　http://press.fmmu.sn.cn
印　　刷　陕西奇彩印务有限公司
版　　次　2009年9月第1版　2009年9月第1次印刷
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　7.25
字　　数　180千字
书　　号　ISBN 978-7-81086-694-1/R·581
定　　价　18.00元

内容简介

本书是配合李文潮等编写的《医用高等数学》而编写的辅导教材. 全书共 8 章，内容包括函数与极限、一元微分学、一元积分学、微分方程、多元函数微积分学、线性代数、概率论、数理统计初步. 每章由重点知识框架图、课程标准要求、本章重点难点、疑难解析、教材内容补充、典型例题、习题选解七部分组成，并配有自测题两套，期末考试卷一套. 该书完全与教材同步，书中精选了具有代表性、典型性的例题，配以解题知识点、要点和点评，其中部分例题还给出了多种解法，旨在帮助学生深入理解基本概念，巩固教材内容，同时提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等医科院校相关专业的本科生辅导教材，也可供广大医务工作者和自学者阅读参考.

前　言

第四军医大学数理教研室编写的《医用高等数学》是供医学院校医疗、口腔、预防、空医、药学等专业使用的高等数学教材. 在该教材中适当压缩了一元函数、微积分的部分内容，扩充增加了多元函数微积分、线性代数、概率论、数理统计、数学实验、模糊数学等内容，并大量增加了生物、医学实例及医学数学模型. 教材在知识容量与难度上有一定的增加.

为了指导学生更好地学习本教材，帮助学生学好高等数学这门课程，减轻学生负担，我们编写了《医用高等数学学习指导》作为与《医用高等数学》配套的辅导教材. 本辅导教材按照原教材的章节顺序，分为八章. 每章由七部分组成：

1. 重点知识框架图：使学生对该章的知识结构有总体了解，在每章预习和总结时参考.

2. 课程标准要求：使学生明确课程内容要求，针对知识内容分为了解、理解、掌握三个层次程度.

3. 本章重点、难点：使学生明确每章需要重点学习的内容，且对难点有明确了解，并在学习中加以注意.

4. 疑难解析：针对教材中容易产生的疑问，较难理解的内容或易疏忽的问题，以问答的形式给出，帮助学生学习掌握教材内容，解惑答疑.

5. 典型例题：提供典型例题及解题思路，帮助学生掌握解题方法及解题技巧.

6. 习题选解：对书中习题较难的或有代表性的习题，给出完整的解答，供学生参考.

7. 模拟试题：目的是让学生了解考试的形式及难易程度，并及时测试自己的学习效果.

本书在编写和出版过程中得到了第四军医大学教务处以及出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，参考了许多同类及相关的中外文书刊，在此深表感谢.

限于我们的水平，书中不免有疏误和不妥之处，恳请使用本教材的师生们不吝赐教，多提宝贵意见.

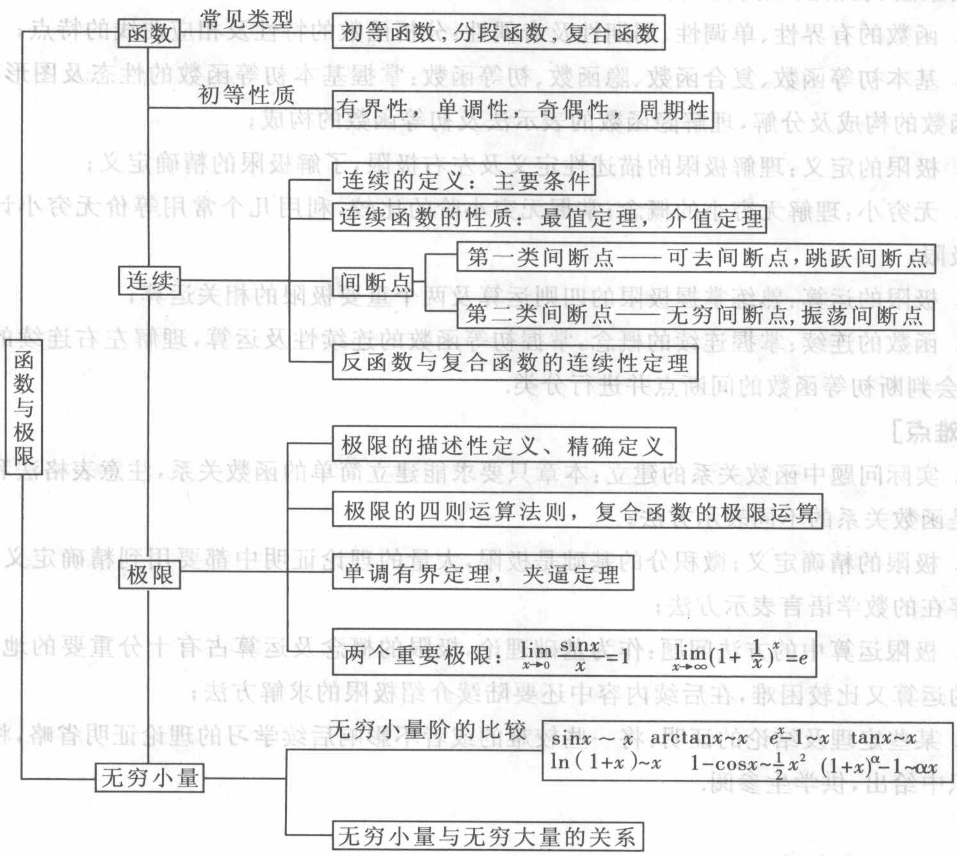
编　者

2009 年 7 月于西安

目　录

第 1 章　函数与极限

一、重点知识框架图



二、课程标准要求

掌握　函数的概念及解析表达式；基本初等函数及其图形；初等函数；复合函数的构成及分解；极限的描述性定义；极限的四则运算；两个重要极限及其运算；函数连续的概念；函数的间断点.

理解　分段函数；无穷小的概念及其性质；简单实际问题函数关系的建立；左、右极限

及左、右连续；间断点的类型.

了解 参数方程所确定的函数；极限的精确定义；无穷大量与无穷小量的关系；几个等价无穷小；闭区间上连续函数的性质.

三、本章重点、难点

[重点]

1. 函数的概念及其表示法：简单实际问题中函数关系的建立，掌握函数定义域的求法，会用图象法、表格法、解析法表示变量的函数关系；

2. 函数的有界性、单调性、周期性及奇偶性：分析函数的特性及相应曲线的特点；

3. 基本初等函数、复合函数、隐函数、初等函数：掌握基本初等函数的性态及图形，掌握复合函数的构成及分解，理解隐函数的表示法及初等函数的构成；

4. 极限的定义：理解极限的描述性定义及左右极限，了解极限的精确定义；

5. 无穷小：理解无穷小的概念；掌握无穷小阶的比较，利用几个常用等价无穷小计算函数的极限；

6. 极限的运算：熟练掌握极限的四则运算及两个重要极限的相关运算；

7. 函数的连续：掌握连续的概念，掌握初等函数的连续性及运算，理解左右连续的相关性质，会判断初等函数的间断点并进行分类.

[难点]

1. 实际问题中函数关系的建立：本章只要求能建立简单的函数关系，注意表格法和图象法也是函数关系的不同表示方法；

2. 极限的精确定义；微积分的基础是极限，大量的理论证明中都要用到精确定义，理解极限存在的数学语言表示方法；

3. 极限运算中的方法问题：作为基础理论，极限的概念及运算占有十分重要的地位，而极限的运算又比较困难，在后续内容中还要陆续介绍极限的求解方法；

4. 某些定理及结论的证明：将一些较难的或者不影响后续学习的理论证明省略，将在补充知识中给出，供学生参阅.

四、疑难解析

1. 实际问题中函数关系如何表示？

答：一般的变量之间的函数关系我们可以用解析的方法表示出来. 如 $y=f(x)$. 但在实际问题中，我们观测到的或者实验得到的仅是一些离散的数据，这时我们往往需要用表格法、图象法将两个变量之间的函数关系表示出来(见教材例 1.1,1.2)，如体重与身高的关系.

为得到两个变量的解析表达式，需要根据实测数据的分布情况，采用最小二乘法(或其它参数估计方法)得到函数的解析表达式. 在这一过程中，要将表格、图形结合起来使用，最

后找到合适的解析表达式的类型，这一过程称为曲线拟合.

2. 几个特殊函数有什么用途?

答：一般的初等函数我们已经非常熟悉了，这里要特别注意几个特殊函数．在后续的学习过程中，某些结论的反例或者某些奇异情况的说明都需用到这些特殊函数．如：

$$y = |x|, \qquad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0. \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

至于 Logistic 函数，大量的医学问题都会涉及到此函数，也在教材中专门列出.

3. 如何理解极限的精确定义?

答：关于极限定义，本教材的重点是极限的描述性定义，但在后续相关内容的学习过程中，又要用到极限的精确定义即 $\varepsilon-\delta$ 定义，希望学有余力的学生能够尽量理解、应用极限的精确定义.

定义中的 ε 与 δ：

ε 具有任意性和固定性：任意性是衡量 $f(x)$ 与 A 的接近程度，ε 越小，接近的程度越好. 其任意性保证了 $f(x)$ 与 A 能接近到任意程度；固定性是指 ε 一经给出就暂时看作是固定不变的，以便根据它来找 δ. 其固定性保证了 δ 的存在．由此可以看出，δ 是在 ε 预先给定的情况下随后找到的，但它们并不是函数关系，并且 δ 不是唯一的.

4. 无穷小量有什么重要性?

答：无穷小量在理论证明及极限过程中都有十分重要的作用．其实质是一个以零为极限的变量(函数)，这里要注意两个问题：

(1) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小.

此式往往用于某些理论证明，把极限问题转化为含有无穷小的等式，便于进行代数运算.

(2) 几个常用的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x, \qquad \tan x \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x, \qquad \arctan x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x.$$

利用等价无穷小的代换求极限，往往适用于求极限的函数中的乘积因子，如果函数中出现加减时，则设法把它们转化为乘除形式，有关问题可参考典型例题.

5. 如何理解和计算两个重要极限?

答：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 可以改写成 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

此时可以简化计算，如：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot k} = e^k,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{6}{\alpha}}=e^{-6},$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}=e^{2}.$$

一般地，如果求极限 $\lim(1+u(x))^{v(x)}$，在同一极限过程下有：

$$\lim u(x)=0,\qquad \lim v(x)=\infty,\qquad \lim u(x)v(x)=a,$$

则

$$\lim(1+u(x))^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln[1+u(x)]}=e^{\lim v(x)\ln[1+u(x)]}=e^{\lim v(x)u(x)}=e^{a}.$$

6. **定义域与定义区间有什么区别?**

答：在函数 $y=f(x)$ 中，定义域是指使得等式成立的所有 x 的全体．这里面包含一些孤立点．而定义区间则是去掉孤立点后的区间．

7. **为什么在讨论函数连续性时，更多的是在讨论间断点?**

答：(1) 连续的概念是利用极限的方法定义的，有关连续的一些基本概念（如左、右连续）及性质（如定理 1.4 及 1.5）可由极限定义直接给出．

(2) 对初等函数而言，其在定义区间内都是连续的，这是它的一般性态，而间断点仅在特殊情况下发生，这是它的特殊性态．因此我们更关注其特性．

8. **函数在 $x=x_0$ 处有定义、存在极限、连续三个概念之间有什么关系?**

答：(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，不一定在该点存在极限，更不一定连续．如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases},$$

在 $x=0$ 处，$f(x)$ 有定义，但在该点处极限不存在，也不连续．

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在极限，在 $x=x_0$ 处不一定有定义，也不一定连续．如：

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

在 $x=0$ 处，$f(x)$ 无定义，但该点处极限存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续吗?

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 有定义且极限存在．

五、教材内容补充

1. 极限的统一定义

一般教材中，极限的定义是由数列的极限过渡到函数的极限上来．在函数的极限中，又分为 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 时的极限．我们将这些极限的定义用一个统一的形式给出：

定义：给定函数 $y=f(x)$（$x_n=f(n)$），对于任意给定的 $\varepsilon>0$，在自变量的某个变化过程中 $\begin{pmatrix} n\to+\infty\\ x\to x_0\\ x\to\infty\end{pmatrix}$，如果存在某个时刻 $\begin{pmatrix}N\\ \delta\\ X\end{pmatrix}$，使得函数在 $\begin{pmatrix} n>N\\ 0<|x-x_0|<\delta\\ |x|>X\end{pmatrix}$ 时刻后，都有：

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $y=f(x)$ 的极限为 A,记为:

$$\lim f(x)=A.$$

2. **夹逼准则的证明**

若在同一极限过程中,如果三个函数 $g(x)$,$f(x)$,$h(x)$ 之间满足

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\quad \lim g(x)=A,\quad \lim h(x)=A,$$

那么

$$\lim f(x)=A.$$

证明 不失一般性,设极限过程为 $x\to x_0$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

由极限定义,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$,

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|g(x)-A|<\varepsilon$,

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|h(x)-A|<\varepsilon$,

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式

$$|g(x)-A|<\varepsilon,\qquad |h(x)-A|<\varepsilon$$

同时成立,于是

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon,\qquad A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon,$$

从而有

$$A-\varepsilon<g(x)<f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

由定义知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

3. **讨论重要极限** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

先考虑 x 取正整数 n 而趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,我们来证数列 $\{x_n\}$ 单调增加并且有界,按牛顿第二公式,有:

$$\begin{aligned}
x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\\
&\quad\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\\
&\quad\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

类似地,

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots$$

$$(1-\frac{n}{n+1})$$

比较 x_n、x_{n+1} 的展开式，可以发现：

$$x_n<x_{n+1},$$

这说明 $\{x_n\}$ 是单调增加的，同时这个数列还是有界的．因为，如果 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替，得

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

这说明 $\{x_n\}$ 是有界的．根据极限存在准则，这个数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，通常用字母 e 来表示，即：

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$$

对 x 取实数的情况

讨论当 $x\to+\infty$ 时的情形．对任何正实数 x（不妨设 $x\geqslant 1$），总可以找到正整数 n，使得

$$1\leqslant n\leqslant x<n+1,$$

则

$$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^n\leqslant(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

即

$$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}. \qquad (*)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1+n})^{1+n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1+n})}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e.$$

由（*）式，应用夹逼准则，即得：

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

当 $x\to-\infty$ 时，令 $t=-x$，于是 $t\to+\infty$ 时

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e$$

综上所述，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

这个数 e 是无理数，它的值是 $e=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$.

六、典型例题

例 1.1 分析 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 的复合结构并求其定义域.

解 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 是由 $y=\arcsin u, u=\ln v, v=x+1$ 复合而成的.

$$\begin{cases}-1\leqslant \ln(x+1)\leqslant 1\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{e}-1\leqslant x\leqslant e-1,\\ x>-1\end{cases}$$

则定义域为 $[\frac{1}{e}-1,e-1]$.

知识点：复合函数的构成.

要点：使得等式成立的自变量的变化范围.

例 1.2 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq 0,1$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\frac{x-1}{x}, x=\frac{1}{1-t}$，则

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},$$

即

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x}.$$

令 $\frac{u-1}{u}=\frac{1}{1-x}, x=\frac{1}{1-u}$，则

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x},$$

由

$$\begin{cases}f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x\\ f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2}{1-x}\\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{2(x-1)}{x}\end{cases},$$

知识点：函数的定义.

要点：函数的表示法与自变量的记法无关.

得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

例 1.3 火车站行李收费规定如下:20 千克以下不计费,20 ~ 50 千克每千克收费 0.20 元,超出 50 千克部分的每千克 0.30 元,试建立行李收费 $f(x)$ 与行李重量 x 之间的函数关系.

知识点:简单实际问题函数关系的建立.

要点:分段函数.

解 根据题意有

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<20\\ 0.2x & 20\leqslant x\leqslant 50.\\ 10+0.3(x-50) & x>50\end{cases}$$

例 1.4 计算下列极限.

知识点:极限的四则运算.

要点:化简,去掉分母的零因子,第(2)题通过分子有理化的方法去零因子.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

解 (1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]}{x[(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1]}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{3}.$$

例 1.5 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$,求 a,b.

知识点:无穷小的比较.

要点:分子与分母是同阶无穷小.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$,得到 $1+a+b=0$,于是

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2=3,$$

所以 $$a=1,b=-2.$$

例 1.6 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

知识点:两个重要极限.

要点:极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 可以写成 $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 的形式.

解 1 $$\lim_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\tan^2x)^{\frac{1}{\tan^2x}}\right]^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}},$$

当 $x\to0$ 时,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

则 $$\lim_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2.$$

解 2 因为 $\lim\limits_{x\to0}\tan^2x\cdot\dfrac{1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$,

所以 $$\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2.$$

例 1.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

知识点：两个重要极限.
要点：
$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，
$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

例 1.8 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型.

解 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 无定义，故 $x=1$ 为间断点.

因为 $$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$
所以 $x=1$ 为无穷间断点，属于第二类间断点.

又因为 $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e}.$$
所以 $x=0$ 为跳跃间断点，属于第一类间断点.

知识点：函数的连续性.
要点：考察无定义的点，函数的分段点，分别讨论函数极限和左右极限.
点评：$x\to 1^-$ 表示 $x<1$ 且 $x\to 1$，所以 $x-1<0$，从而 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$.

例 1.9 试证方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又因为
$$f(0)=1>0,f(1)=-2<0,$$
根据零点定理，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

即 $$\xi^3-4\xi^2+1=0,\qquad 0<\xi<1,$$
这说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

知识点：闭区间上连续函数的性质.
要点：找出函数及相应的区间，应用相关性质及定理.

七、习题选解

1. 填空题

(2) 已知当 $x\to 0$ 时，方程 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

解 (2) 由等价无穷小 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，得：