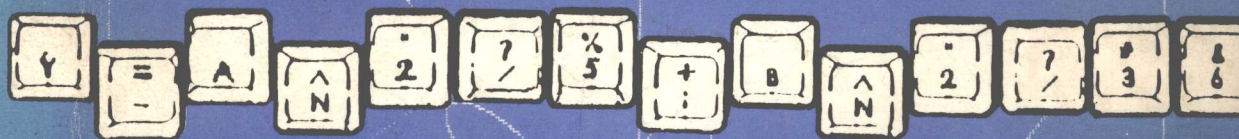


電腦在數學上之應用

李 彥 祥 編著



欣禾圖書公司 印行

◎本書備有磁碟片，內含書中所有程式提供讀者。
每片僅收160元(含工本費、掛號費)。

*** 請直接與本公司接洽 ***



欣禾圖書公司 局版台業字第 2567 號

電腦在數學上之應用

編 著：李 彥 祥

出 版 者：欣 禾 圖 書 有 限 公 司 電話：2510253
高雄市苓雅區金門街9之2 2516725

發 行 者：蔡 順 貞

打字承印：天一打字印刷社 (06) 2259435

出版日期：73 年 10 月初版

定 價：新台幣 200 元

郵撥：0437167-2

版權所有・翻印必究

序

本書嘗試以現今最普遍的 BASIC 程式語言來解決一些中等數學上的問題，提供一些數學教學上的輔助。並可視為數學工具書籍，以解數學問題，希望能給與學習過 BASIC 語言或者正在學習的人士一份參考與助益。但願由此提高大家學習電腦及數學的興趣。書中所有的程式都附上了執行的結果。編排方式由淺入深，遞續漸進。以口語化的方式解說，並酌附流程圖以助了解。除了少數幾個特殊繪圖指令，為 Apple II（或小神通、小教授、無敵、統一）特有以外，均可通用於各型電腦。希望您在讀過本書之後來函提供您的意見，使這本書更趨於完善，更能滿足您的需求。

編者謹識於國立高雄師院數學系

七十三年十月

第一篇

基本數學函數圖形之作法及應用

第一章 電腦繪圖的基本概念

1-1 數學坐標與電腦繪圖坐標之比較

通常大家所熟知的平面坐標如圖(一)，是一個平面被兩個互相垂直的 x 軸及 y 軸劃分為四個區域，我們稱每一區域為一個象限。其中 x 軸自原點向右的方向為正向，反之為負向；而 y 軸則是向上為正向，向下為負向。

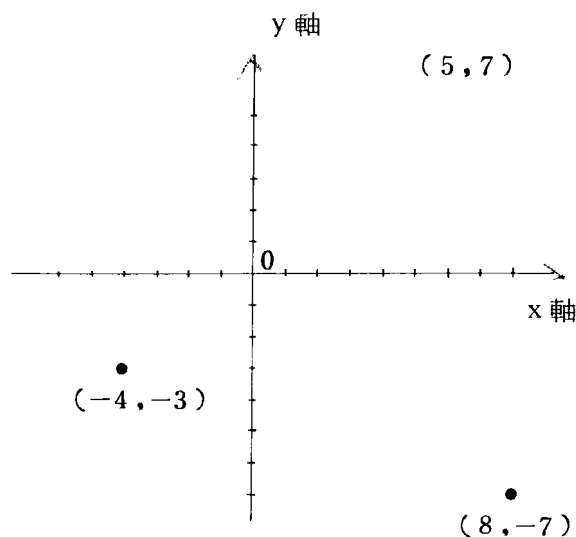


圖 1-1 數學上之平面坐標

2 電腦在數學上之應用

然而電腦提供給予我們繪圖的高解析度畫面，它的坐標的方式則如圖(二)。螢幕的左上角為(0,0)右下角為(279,191)。在水平方向一共分為 280 個點，垂直方向分為 192 個點。而我們所要談的電腦繪圖，事實上也就是學習如何控制這 $280 \times 192 = 43760$ 個點，以達到我們理想的圖形。

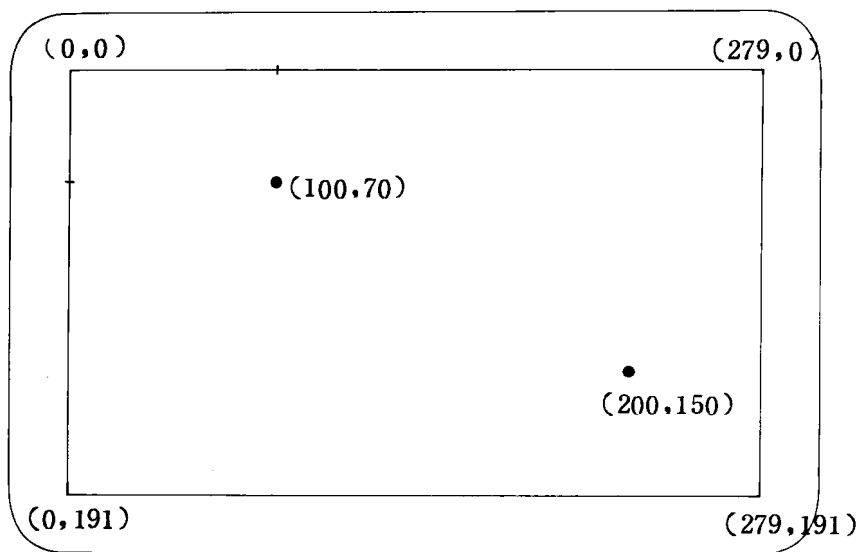


圖 1 - 2 監視器上之坐標

1-2 如何在電腦上展現一般坐標系

如果我們想要在電腦的畫面上展現一般的坐標系，只要你再看看剛才的那兩個圖形，就不難發現，最簡單的方法就是把螢幕上的中心點(140,95)定為一般直角坐標系的原點。(如圖三)這樣一來 y 軸的位置就相當於螢幕上(0,95)和(279,95)兩點的連線，而 x 軸的位置即是(140,0)及(140,191)兩點的連線。而坐標上的(5,7)這一點的位置就應當是螢光幕上的 145,88 這一點。因為在坐標上(5,7)是在原點的右上方，而螢光幕上水平方向的坐標是愈往右邊數值愈大，所以 140 應加 5。而垂直方向則是愈往上方坐標的數值愈小因此 95 應減 7。

由此，我們就可以得到一個坐標轉換的通式，即是我們若想標示出坐標上的 (x, y) 這一點。事實上我們就必須畫出螢光幕上的 $140 + x, 95 - y$ 這一點。當然此時不可忽略的是 x 必須介於 $-140 \sim 139$ 之間，而 y 必須介於 $-96 \sim 95$ 之間，才不會超出螢光幕的範圍。

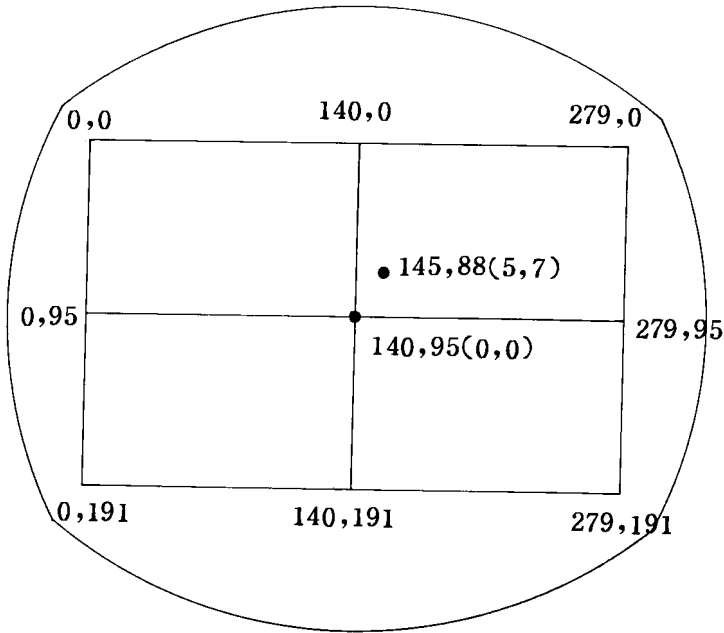


圖 1-3 監視器上展現之數學平面坐標

1-3 如何在電腦上畫圖

(一)如何在螢幕上畫出一點

【指令】HPLOT x, y

●程式範例

```
10 HGR
20 HCOLR= 3
30 HPLOT 140,95
```

【說明】

10 命令電腦進入高解析度畫面。(註1)

4 電腦在數學上之應用

20 設定顏色(註2)。

30 畫出螢光幕上140,95這一點。

(二)如何繪出兩點之間的連線。

【指令】HPLOT x, y TO x1, y1

●程式範例

```
10 HGR : HCOLOR= 3
15 HPLOT 0,95 TO 279,95
16 HPLOT 140,0 TO 140,191
```

【說明】

15 繪出一般直角坐標的y軸

16 繪出一般直角坐標的x軸

(三)如何畫出經過坐標轉換後的點

●程式範例

```
7 INPUT "X=":X: INPUT "Y=":Y
10 HGR : HCOLOR= 3
15 HPLOT 0,95 TO 279,95
16 HPLOT 140,0 TO 140,191
20 HPLOT 140 + X,95 - Y
```

【說明】

7 輸入任一點的直角坐標值。

20 畫出此點。

<注意>：不要忘了1-2中所提的x值及y值的限制。

[註1]：高解析度畫面有HGR及HGR2兩頁，前者保留四行文字，後者則提供全畫面的圖形顯示。

[註2]：顏色的代號由0~7，注意0和4為黑色。

第二章

基本數學函數圖形及其應用

2-1 直線 $ax+by+c=0$

數學解說：

方程式 $ax + by + c = 0$ 的圖形是 xy 平面上的一條直線。如果想在電腦上繪出此直線，首先要把原來的方程式化成 $y = mx + d$ 的形式。如此才能每將一個 x 值代入即可得到一個 y 值。最後把這些點一一畫出就可得到一個近似的直線。雖然我們只是畫出一些不連續的點，但是由於電腦本身的解析度有限。只要這些點的細密度夠，在畫面上已經是一條直線了。

例如我們要畫出 $-x + 2y + 40 = 0$ 這一條直線，先化簡如下

$$2y = x - 40 \quad y = x / 2 - 20$$

●程式範例

HLIST

```

5  REM  --- LINE ---
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPLLOT 0,95 TO 279,95
16  HPLLOT 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 140 TO 139 STEP 1
40  Y = X / 2 - 20
50  IF Y < - 96 OR Y > 95 THEN GOTO 60
55  HPLLOT 140 + X,95 - Y
60  NEXT X

```

1

6 電腦在數學上之應用

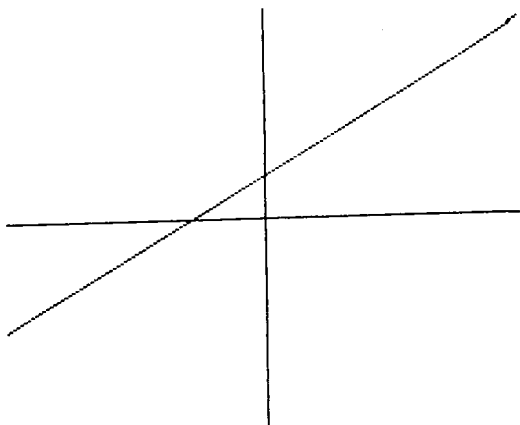
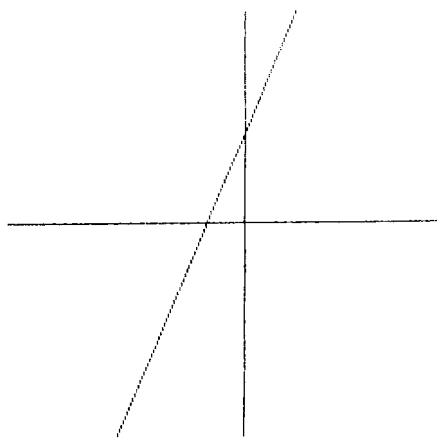


圖 2 - 1(a)



$$y = 2x + 40$$

圖 2 - 1(b)

【說明】 40 設定直線的方程式

50 防止直線上某些點的數值超出螢幕而出現錯誤訊息使繪圖中止。

〔建議及練習〕 (1)試改變行號 30 中 STEP 的值，觀察其繪圖速度及直線的細密度。

(2)試畫出下面方程式的圖形：(a) $x + y - 10 = 0$

(b) $5x - 2y + 30 = 0$ ，(c) $6x - 3y + 50 = 0$

2-2 函數 $y = ax^n$

數學解說：

函數 $y = ax^n$ 當 n 為偶數時。如果 $a > 0$ 則圖形是一個向上凹的曲線，最低點為 $(0, 0)$ ，反之若 $a < 0$ 則圖形向下凹。

當 n 為奇數時，曲線中心對稱於原點，此點同時也是反曲點。

●程式範例：

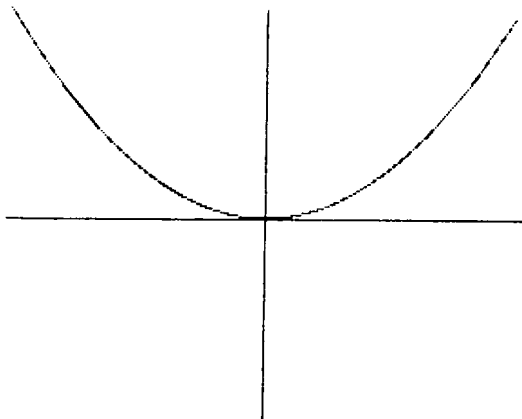
```

11LIST

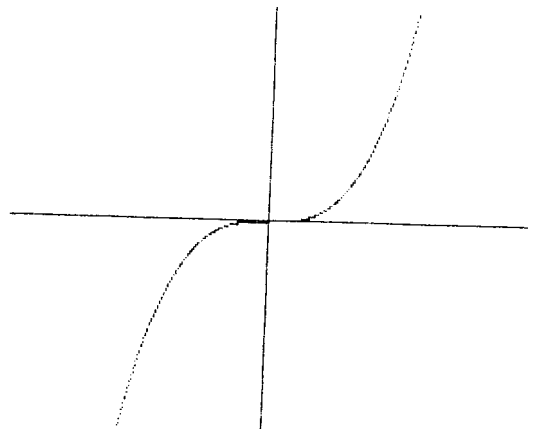
5  REM  --- CURVE Y=A*X^N ---
7  INPUT "A=";A: INPUT "N=";N
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPLLOT 0,95 TO 279,95
16  HPLLOT 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 140 TO 139 STEP .5
40  Y = A * X ^ N
50  IF Y < - 96 OR Y > 95 THEN GOTO 60
55  HPLLOT 140 + X,95 - Y
60  NEXT X

```

1



A=0.005 N=2



A=0.0002 N=3

【說明】 7 輸入適當的係數 A 和次數 N

50 避免錯誤的繪圖指令

〔建議及練習〕 (1)由於 y 值的變化極大，必須取適當的 A 值及 N 值方可獲得

8 電腦在數學上之應用

較好的圖形。

(2)試一試下列數值

$$(a) A = 0.0001 \quad N = 3 \quad (b) A = 0.0000001 \quad N = 5$$

$$(c) A = 0.01 \quad N = 2 \quad (d) A = 0.00005 \quad N = 4$$

2-3 指數函數 $y=a^x$

數學解說：

在指數函數 $y = a^x$ 中， a 只取正值。當 $a = e$ ($e = 2.71828 \dots$) 時圖形為自然指數曲線。對於 $a > 1$ 函數自 0 單調遞增至 ∞ ，對於 $a < 1$ 函數自 ∞ 單調遞減至 0。

●程式範例：

```

LIST
5  REM      --- CURVE Y=A^X ---
7  INPUT "A=";A
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPLLOT 0,140 TO 279,140
16  HPLLOT 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 5.6 TO 5.56 STEP .02
40  Y = A ^ X
50  IF Y * 25 < - 51 OR Y * 25 > 140 THEN GOTO 60
55  HPLLOT 140 + 25 * X,140 - Y * 25
60  NEXT X
1

```

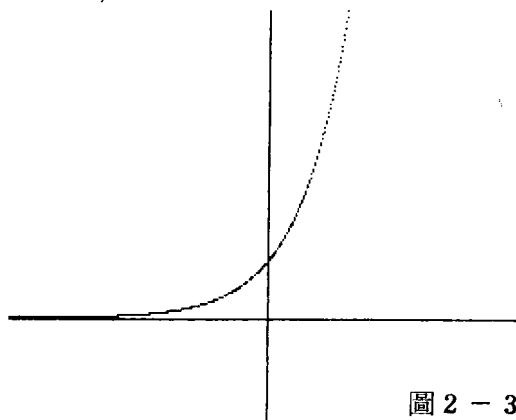


圖 2 - 3

$A = 2.71828$

【說明】 15 由於圖形在 x 軸的上方。爲了希望有較大的空間來表現圖形因此將 y 軸往下移至 140 的位置。

30,50,55 此三行程式是爲了把圖形放大 25 倍時，所做的相對應的改變及調整。

〔建議及練習〕 (1) a 值大約取 20 以下。

(2) 比較 $a = 2$ 及 $a = 0.5$ 這兩個圖形。

2-4 二次多項式 ax^2+bx+c

數學解說：

二次多項式的圖形爲一拋物線。當 $a > 0$ 時開口朝上。當 $a < 0$ 時開口朝下。

此方程式經化簡如下：

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

因此曲線在點 $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ 有極大值或極小值。

●程式範例：

LIST

```
5  REM      --- Y=AX^2+BX+C ---
6  PRINT " Y=AX^2+BX+C
7  INPUT "A=";A: INPUT "B=";B: INPUT "C=";C
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPLLOT 0,95 TO 279,95
16  HPLLOT 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 140 TO 139 STEP .5
40  Y = A * X * X + B * X + C
50  IF Y < - 9600 OR Y > 9500 THEN GOTO 60
55  HPLLOT 140 + X,95 - Y / 100
60  NEXT X
```

1

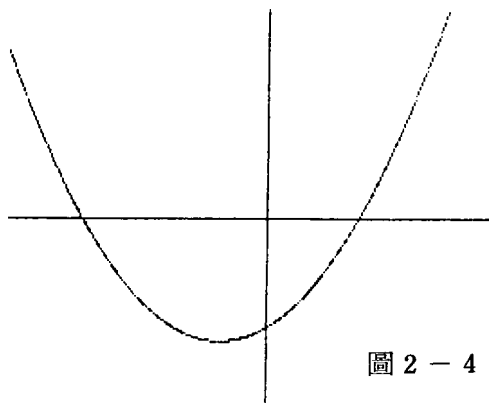


圖 2-4

$A = 1 \quad B = 50 \quad C = -5000$

【說明】 6 顯示方程式 $y = ax^2 + bx + c$ 於螢幕上。

7 輸入係數 A, B, C

55 由於 y 值變化很大，因此把 y 軸之坐標縮小了 100 倍。

50 因為 y 坐標縮小了 100 倍，所以 y 值的範圍擴大了 100 倍。

〔建議及練習〕 (1)讀者可試代入下面數值

(a) $A = 1 \quad B = -50 \quad C = -500$

(b) $A = -1 \quad B = -80 \quad C = 1000$

(c) $A = 1 \quad B = 0 \quad C = -5000$

2-5 三次多項式 ax^3+by^2+cx+d

數學解說：

此函數之情況與 a 之符號及判別式 $\Delta = 3ac - b^2$ 有關，如果 $\Delta \geq 0$ ，且 $a > 0$ 則函數單調上升，而當 $a < 0$ 時則單調下降。如果 $\Delta < 0$ 則函數有極大和極小值。

●程式範例：

3LIST

```

5  REM  --- Y=AX^3+BX^2+CX+D---
6  PRINT " Y=AX^3+BX^2+CX+D"
7  INPUT "A=";A: INPUT "B=";B: INPUT "C=";C: INPUT "D=";D
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPL0T 0,95 TO 279,95
16  HPL0T 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 140 TO 139 STEP .5
40  Y = A * X * X * X + B * X * X + C * X + D
50  IF Y < - 960000 OR Y > 950000 THEN GOTO 60
55  HPL0T 140 + X,95 - Y / 10000
60  NEXT X

```

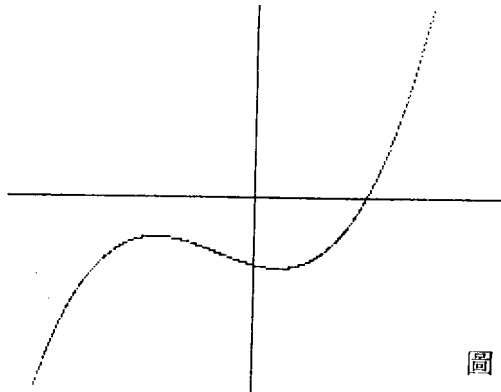


圖 2 - 5

$A=1$ $B=-60$ $C=-2000$ $D=300000$

【說明】 55 將 y 坐標縮小 10000 倍

50 相對於 55 所做的改變（同 2 - 4）

〔建議及練習〕 (1) A 值最好取 1 左右。

(2) 試驗下列數值(a) $A=1$ $B=2$ $C=3$ $D=4$

(b) $A=1$ $B=-40$ $C=-1000$ $D=200000$

(c) $A=-1$ $B=50$ $C=5000$ $D=-200000$

2-6 四次多項式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

數學解說：

四次以上的多項式，曲線的情形比較複雜。基本上四次多項式若 $a > 0$ 則圖形大致為向上凹，若 $a < 0$ 則向下凹。而適當的取 b ， c 及 d 值，可在凹處得到一些反曲的情形。致於其如何彎曲就完全靠係數之間的關係了。

●程式範例：

JLIST

```

5  REM      --- Y=AX^4+BX^3+CX^2+DX+E---
6  PRINT " Y=AX^4+BX^3+CX^2+DX+E"
7  INPUT "A=";A: INPUT "B=";B: INPUT "C=";C: INPUT "D=";D:
   INPUT "E=";E
10  HGR2 : HCOLOR= 3
15  HPLLOT 0,95 TO 279,95
16  HPLLOT 140,0 TO 140,191
30  FOR X = - 140 TO 139 STEP .5
40  Y = A * X * X * X * X + B * X * X * X + C * X * X + D *
   X + E
50  IF Y < - 960000000 OR Y > 950000000 THEN GOTO 60
55  HPLLOT 140 + X,95 - Y / 1000000
60  NEXT X
]

```

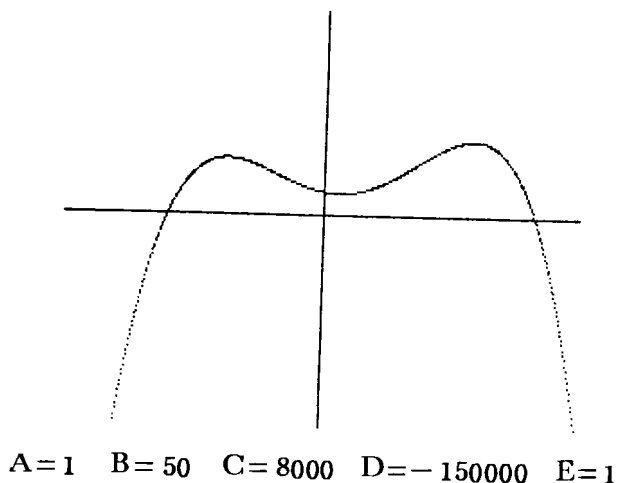
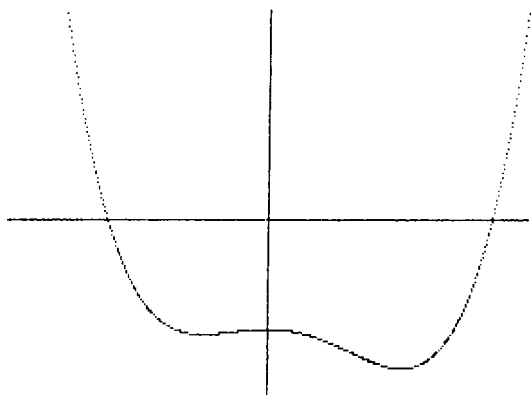


圖 2 - 6 (a)

14 電腦在數學上之應用



$$A=1 \quad B=-5 \quad C=-5000 \quad D=0 \quad E=-50000000$$

圖 2 - 6 (b)

【說明】 55 將 y 坐標縮小 1000000 倍

〔建議及練習〕 (1) 你可以依照 2-4, 2-5, 2-6, 此種方式自行設計五次以上多項式的圖形。

(2) 下面為幾個可行的數值

$$(a) A=-2 \quad B=50 \quad C=2000 \quad D=-300000 \quad E=0$$

$$(b) A=-3 \quad B=50 \quad C=30000 \quad D=-300000$$

$$E=-20000000$$

$$(c) A=1 \quad B=-20 \quad C=-10000 \quad D=0 \quad E=-20000000$$