

高等数学讲义

第四册

数学理论与力学教研组编

武汉测量制图学院

1958

第四册

目錄

第七編

无穷级数

第一章 常数项级数 70-91

§7-1-1. 引言 70

§7-1-2. 无穷级数的收敛和发散 72

§7-1-3. 收敛的级数的基本性质 73

§7-1-4. 正项级数的比较审敛法 76

§7-1-5. 正项级数的达朗贝尔审敛法 79

§7-1-6. 达朗贝尔审敛法的极限形式 81

§7-1-7. 正项级数的柯西积分审敛法 82

§7-1-8. 任意项级数 84

习题 7-1-甲 88

第二章 幂级数 92-112

§7-2-1. 函数项级数 92

§7-2-2. 幂级数 93

§7-2-3. 收敛域和收敛半径 97

§7-2-4. 幂级数的微分法和积分法 101

§7-2-5. 函数的幂级数展开法 102

§7-2-6. 应用 103

习题 7-2-甲 105

§7-2-7. 複数 107

§7-2-8. 複数项级数 109

§7-2-9. 尤拉公式 111

习题 7-2-乙 112

第三章 富立叶级数 7-1-7-14

§7-3-1. 引言 7-1

§7-3-2. 三角多项式 7-2

§7-3-3. 富立叶级数 7-5

§7-3-4. 基本定理 7-7

§7-3-5.	任意区间上的富立叶级数	7-6
§7-3-6.	奇函数及偶函数的富立叶基级数	7-7
§7-3-7.	奇式延续及偶式延续	7-9
习题	7-3-甲	7-13

第八编 微分方程

第一章 一阶微分方程 8-1~8-19

§8-1-1.	引起微分方程的问题	8-1
§8-1-2.	一阶微分方程的一般概念	8-3
§8-1-3.	一般解与特定解	8-7
§8-1-4.	能够分离变量的一阶方程	8-8
习题	8-1-甲	8-10
§8-1-5.	齐次方程	8-11
§8-1-6.	线性方程	8-13
§8-1-7.	全微分方程	8-17
习题	8-1-乙	8-18

第二章 二阶微分方程 8-20~8-38

§8-2-1.	一般概念	8-20
§8-2-2.	特殊情形	8-21
§8-2-3.	线性微分方程(齐次方程)	8-26
§8-2-4.	线性微分方程(非齐次方程)	8-32
习题	8-2-甲	8-37

第三章 常系数线性方程 8-39~8-52

§8-3-1.	常系数齐次方程	8-39
§8-3-2.	常系数非齐次方程	8-43
§8-3-3.		8-49
§8-3-4.	微分方程组	8-50
习题	8-3-甲	8-51

第九编 微分几何学

第一章 矢量代数 9-1~9-18

§9-1-1. 基本概念 9-1

§9-1-2. 矢量的加法和减法 9-2

§9-1-3. 矢量与数量的乘法 9-3

§9-1-4. 矢量的分解 9-4

§9-1-5. 矢量的数量积 9-6

§9-1-6. 矢量的矢量积 9-8

§9-1-7. 三个矢量的乘积 9-10

习题 9-1-甲 9-13

§9-1-8. 矢量在几何上的应用 9-14

习题 9-1-乙 9-18

第二章 矢量分析 9-19~9-27

§9-2-1. 纯数量场的矢量函数 9-19

§9-2-2. 矢量函数的极限及连续性 9-21

§9-2-3. 矢量函数的导数 9-22

§9-2-4. 矢量函数的微分法 9-23

习题 9-2-甲 9-27

第三章 曲线 9-28~9-60

§9-3-1. 引言 9-28

§9-3-2. 正则曲线和正则参数 9-28

§9-3-3. 曲线的弧长反弧长参数 9-30

§9-3-4. 空间曲线的切线和法平面 9-32

§9-3-5. 空间曲线的曲率 9-34

§9-3-6. 曲率半径 9-38

习题 9-3-甲 9-38

§9-3-7. 空间曲线主法线与单位主法线矢量 9-40

§9-3-8. 密切平面 9-42

§9-3-9. 副法线方程, 单位副法线向量	9-45
§9-3-10. 化直平面及其方程	9-46
习题 9-3-乙	9-47
§9-3-11. 挠率	9-48
§9-3-12. 富瑞耐公式	9-51
§9-3-13. 曲率与挠率的针标公式	9-52
§9-3-14. 空间曲线在一点附近的结构	9-54
§9-3-15. 密切圆, 曲率中心	9-56
习题 9-3-丙 (复习题)	9-59
第四章 曲面	9-60~9-100
§9-4-1. 曲面的参数方程	9-60
§9-4-2. 曲面上的坐标曲线网	9-61
习题 9-4-甲	9-65
§9-4-3. 曲面的切线	9-65
§9-4-4. 曲面的切平面和法线	9-67
习题 9-4-乙	9-71
§9-4-5. 曲面的线素——第一个基本二次形式	9-71
习题 9-4-丙	9-73
§9-4-6. 两曲线的交角	9-74
§9-4-7. 曲面的面积	9-76
§9-4-8. 纹线面曲	9-78
习题 9-4-丁	9-80
§9-4-9. 保角映射	9-81
§9-4-10. 曲面上曲线的曲率	9-86
§9-4-11. 麥尼厄定理	9-91
§9-4-12. 测地曲率	9-93
§9-4-13. 测地线	9-96
§9-4-14. 克来洛定理	9-98
习题 9-4-戊	9-99

第十编 复变数函数大意

第一章 复数 10-1~10-7

§ 10-1-1. 复数 10-1

§ 10-1-2. 复数的几何表示 10-1

§ 10-1-3. 复数的极坐标表示法 10-2

§ 10-1-4. 德謨定理 10-3

§ 10-1-5. 复平面上的区域 10-5

习题 10-1-甲 10-6

第二章 复变数函数 10-7~10-23

§ 10-2-1. 复变数的函数 10-7

§ 10-2-2. 函数的极限 10-8

§ 10-2-3. 关于极限的定理 10-9

§ 10-2-4. 函数的连续性 10-9

§ 10-2-5. 函数的导数 10-10

§ 10-2-6. 微分法公式 10-11

习题 10-2-甲 10-12

§ 10-2-7. 柯西-黎曼条件 10-13

习题 10-2-乙 10-17

§ 10-2-8. 调和函数 10-18

§ 10-2-9. 几种初等函数 10-19

习题 10-2-丙 10-22

第三章 保角映射 10-23~10-32

§ 10-3-1. 复平面上的对映映射 10-23

§ 10-3-2. 映射 $w = z^2$ 的讨论 10-24

§ 10-3-3. 映射 $w = \frac{1}{z}$ 的讨论 10-26

§ 10-3-4. 映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 的讨论 10-27

§ 10-3-5. 映射 $w = e^z$ 的讨论 10-27

§10-3-6. 保角映射 10-28

习题 10-3-甲 10-31

附编 球面三角法

第一章 球面三角形 附1~附6

§1. 引言 附1

§2. 球面三角形 附1

§3. 球面三角形边和角 附2

§4. 球面三角形的三边关系 附3

§5. 球面极三角形 附3

§6. 球面三角形三个角的关系 附3

§7. 两个球面三角形相等的条件 附4

§8. 球面三角形边与角的关系 附5

习题甲 附5

第二章 直角三角形及其解法 附6~附12

§9. 关于球面直角三角形的各种公式 附6

§10. 纳白尔规则 附8

§11. 球面直角三角形解法 附8

习题乙 附11

第三章 斜角三角形及其解法 附13~附29

§12. 正弦定律 附13

§13. 余弦定律 附13

§14. 三角形各角的补角的半角公式 附15

§15. 三角形的各边的半边公式 附16

§16. 纳白尔公式 附17

§17. 解球面任意斜角三角法 附18

§18. 球面上大圆弧的长度 附26

§19. 球面三角形的面积 附27

§20. 已知地面两点的经纬度求两地的距离 附28

第七编 无穷级数

第三章 富立叶级数

§7-3-1 引言. 我们讨论函数项级数的时候, 曾说过, 有两种函数项级数很有用. 第一类是幂级数(第二章)第二类是三角级数. 像下面的这种级数就叫做三角级数.

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

或写作
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

我们知道, 简谐振动的方程是

$$f = a \sin \omega t$$

这里 f 是 t 的周期函数, 周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$ (必是频率) 这个函数也叫做简谐量; 两个不同频率的简谐量的线性结合, 叫做复合谐量. 例如

$$\sin t + 2 \sin 2t$$

就是复合谐量. 它的周期是 2π ; 如果 ω_1 和 ω_2 是可通约量,

$$A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$$

就是复合谐量. 假定 $\omega_1 = n_1 \omega$, $\omega_2 = n_2 \omega$, 其中 n_1 和 n_2 是整数, ω 是 ω_1 和 ω_2 的公约量; 那么, 这个复合谐量的周期就是 $\frac{2\pi}{\omega}$, 按照这样的方法, 推广到三个, 四个, ..., n 个简谐量的线性结合, 也就是复合谐量, 因此上面所说的三角级数, 也是有一定周期的复合谐量.

现在要提出一个相反的问题: 如果给定了一个有一定周期(例如 2π) 的函数 $f(x)$, 我们能否用复合谐量来表达它. 换句话说: 能不能选择合适的数据 a_n 和 b_n , 使得级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

能表达一个给定的週期函数 $f(x)$ 。

这个问题的回答是肯定的，这种肯定的回答是十九世纪数学分析的伟大成就。结果是这样：如果简谐量的个数 n 无限增多，那么在一定条件下适当地选择係数 a_n 和 b_n ，就能使级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

表达给定的週期函数 $f(x)$ 。

如果函数 $f(x)$ 的週期是 2π ，只要弄清楚级数 (1) 在某一个长度是 2π 的区间上是否收敛为函数 $f(x)$ 就够了，我们惯是选定 $(-\pi, \pi)$ 或 $(0, 2\pi)$ 为这个区间，来考虑这个级数。

§7-3-2 三角多项式 如果我们取上述级数的前 $n+1$ 项，用 $f(x)$ 来表达，就得到下面的 n 阶三角多项式：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1P)$$

係数 $a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ 是常数，其中首项写成 $\frac{1}{2}a_0$ ，是为了使各项係数取得一致。

由以下三个定积公式，可以解决求係数的问题：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } k \neq p; \\ \pi, & \text{如果 } k = p. \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } k \neq p; \\ \pi, & \text{如果 } k = p. \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin px dx = 0, \quad k \text{ 和 } p \text{ 是任意实数.} \quad (3)$$

(证) 公式 (1) 的证明如下：

由以下公式

$$\cos kx \cos px = \frac{1}{2} [\cos(k+p)x + \cos(k-p)x]$$

如果 $k \neq p$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+p)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-p)x dx \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{\sin(k+p)x}{k+p} \right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left. \frac{\sin(k-p)x}{k-p} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

如果 $k = p$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2px) dx \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left. \frac{\sin 2px}{2p} \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

其他两个公式(2)及(3), 可同样证明. (说完)

为了求出公式(4)里的系数 a_p 用 $f(x)$ 来表达, 我们用 $\cos px$ (p 是正整数) 乘它的两边, 再从 $-\pi$ 到 π 作积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos px dx \right]$$

根据公式(1)及(2), 可知上式右边以 a_p 为系数的积分是 π , 其余各积分都是 0, 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px dx = \pi a_p$$

由此可知 $a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px dx \quad \text{--- (4)}$

我们说这是用函数 $f(x)$ 表达了 a_p , $p=1, 2, 3, \dots, \infty$

当 $p=0$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi a_0$

所以 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{--- (5)}$

如果用 $\sin px$ 乘(4)的两边, 再从 $-\pi$ 到 π 作积分, 可得

$$b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px dx, (p=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

由(4)(5)(6)求出一切係数 a 和 b , 就建立了公式(甲)

但是假是有一个函数 $f(x)$, 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 并且不是 n 阶三角多项式, 这时等式(甲)不成立, 我们用 $\Phi_n(x)$ 表达以下的三角多项式:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

它叫做函数 $f(x)$ 的 n 阶三角多项式, 其中系数 a_k 和 b_k 由公式(4)(5)(6)来决定, 叫做函数 $f(x)$ 的第 k 个傅里叶系数. 这个三角多项式也叫做 n 阶傅里叶多项式.

很显然 n 阶傅里叶多项式 $\Phi_n(x)$ 可以看作函数 $f(x)$ 的近似多项式, 如果用 R_n 表达由这个近似多项式代表 $f(x)$ 时所致的误差, 我们就得到以下的公式(R_n 是余项):

$$f(x) = \Phi_n(x) + R_n \quad (7)$$

我们可以把这个公式跟台劳公式加以比较. 假设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的 n 阶台劳公式存在, 必须 $f(x)$ 在该区间上要有累次导数(一阶, 二阶, 到 $n+1$ 阶导数)但 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的三角公式(7)存在, 只需要函数 $f(x)$ 是可积分的就行了. 只要 $f(x)$ 在区间上连续, 就可以保证公式里面所有的积分都存在; 如果 $f(x)$ 在区间上只有有限个有限型不连续点, 这时所有的积分仍存在, 因此公式(7)也就存在.

当 $n \rightarrow \infty$, 如果台劳公式里面的余项趋于0, 我们就从台劳公式得出函数的台劳级数; 同样, 当 $n \rightarrow \infty$, 如果公式(7)里面的余项趋于0, 我们就从公式(7)得出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

§7-3-3 富立叶级数 假定在区间 $(-\pi, \pi)$ 上给定可积的函数 $f(x)$ ；先求出 $f(x)$ 的各级富立叶级数，并用这些级数写出三角级数

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n=0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=0, 1, 2, \dots$$

这个级数叫做函数 $f(x)$ 的富立叶级数

这个级数是否收敛为函数 $f(x)$ ，要看当 $n \rightarrow \infty$ 时，公式 (7) 里面的各项 b_n 是否趋近于 0。就是说， R_n 是否趋近于 0。要看函数 $f(x)$ 必须具备那些条件。底下我们先介绍两个定理来回答这个问题，在介绍定理以前，先介绍两个例子。

(例) 1. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上给定函数 $f(x) = x^2$ ，就求出它的富立叶级数。

(解) 由于 $f(x) = x^2$ ，所以

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 = \frac{2}{3} \pi^2 \quad (\text{用微分法})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{(-1)^n 4}{n^2}, \quad (\text{用分部积分法})$$

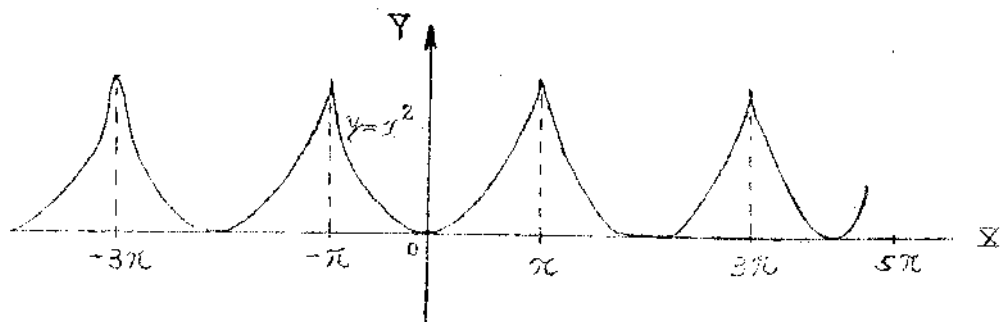
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0, \quad (\text{因 } x^2 \text{ 是偶函数})$$

所以在区间 $(-\pi, \pi)$ 上， x^2 的富立叶级数是

$$\frac{1}{3} \pi^2 - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \quad (1)$$

(注意) 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 的图是一般抛物线，它的三角级数却是周期函数。这个周期函数在区间 $(-\pi, \pi)$ ， $(\pi, 3\pi)$ ， $(-3\pi, -\pi)$ ， $(3\pi, 5\pi)$ ， $(-5\pi, -3\pi)$ ， $(5\pi, 7\pi)$ ， $(-7\pi, -5\pi)$ ， $(7\pi, 9\pi)$ ， $(-9\pi, -7\pi)$ ， $(9\pi, 11\pi)$ ， $(-11\pi, -9\pi)$ ， $(11\pi, 13\pi)$ ， $(-13\pi, -11\pi)$ ， $(13\pi, 15\pi)$ ， $(-15\pi, -13\pi)$ ， $(15\pi, 17\pi)$ ， $(-17\pi, -15\pi)$ ， $(17\pi, 19\pi)$ ， $(-19\pi, -17\pi)$ ， $(19\pi, 21\pi)$ ， $(-21\pi, -19\pi)$ ， $(21\pi, 23\pi)$ ， $(-23\pi, -21\pi)$ ， $(23\pi, 25\pi)$ ， $(-25\pi, -23\pi)$ ， $(25\pi, 27\pi)$ ， $(-27\pi, -25\pi)$ ， $(27\pi, 29\pi)$ ， $(-29\pi, -27\pi)$ ， $(29\pi, 31\pi)$ ， $(-31\pi, -29\pi)$ ， $(31\pi, 33\pi)$ ， $(-33\pi, -31\pi)$ ， $(33\pi, 35\pi)$ ， $(-35\pi, -33\pi)$ ， $(35\pi, 37\pi)$ ， $(-37\pi, -35\pi)$ ， $(37\pi, 39\pi)$ ， $(-39\pi, -37\pi)$ ， $(39\pi, 41\pi)$ ， $(-41\pi, -39\pi)$ ， $(41\pi, 43\pi)$ ， $(-43\pi, -41\pi)$ ， $(43\pi, 45\pi)$ ， $(-45\pi, -43\pi)$ ， $(45\pi, 47\pi)$ ， $(-47\pi, -45\pi)$ ， $(47\pi, 49\pi)$ ， $(-49\pi, -47\pi)$ ， $(49\pi, 51\pi)$ ， $(-51\pi, -49\pi)$ ， $(51\pi, 53\pi)$ ， $(-53\pi, -51\pi)$ ， $(53\pi, 55\pi)$ ， $(-55\pi, -53\pi)$ ， $(55\pi, 57\pi)$ ， $(-57\pi, -55\pi)$ ， $(57\pi, 59\pi)$ ， $(-59\pi, -57\pi)$ ， $(59\pi, 61\pi)$ ， $(-61\pi, -59\pi)$ ， $(61\pi, 63\pi)$ ， $(-63\pi, -61\pi)$ ， $(63\pi, 65\pi)$ ， $(-65\pi, -63\pi)$ ， $(65\pi, 67\pi)$ ， $(-67\pi, -65\pi)$ ， $(67\pi, 69\pi)$ ， $(-69\pi, -67\pi)$ ， $(69\pi, 71\pi)$ ， $(-71\pi, -69\pi)$ ， $(71\pi, 73\pi)$ ， $(-73\pi, -71\pi)$ ， $(73\pi, 75\pi)$ ， $(-75\pi, -73\pi)$ ， $(75\pi, 77\pi)$ ， $(-77\pi, -75\pi)$ ， $(77\pi, 79\pi)$ ， $(-79\pi, -77\pi)$ ， $(79\pi, 81\pi)$ ， $(-81\pi, -79\pi)$ ， $(81\pi, 83\pi)$ ， $(-83\pi, -81\pi)$ ， $(83\pi, 85\pi)$ ， $(-85\pi, -83\pi)$ ， $(85\pi, 87\pi)$ ， $(-87\pi, -85\pi)$ ， $(87\pi, 89\pi)$ ， $(-89\pi, -87\pi)$ ， $(89\pi, 91\pi)$ ， $(-91\pi, -89\pi)$ ， $(91\pi, 93\pi)$ ， $(-93\pi, -91\pi)$ ， $(93\pi, 95\pi)$ ， $(-95\pi, -93\pi)$ ， $(95\pi, 97\pi)$ ， $(-97\pi, -95\pi)$ ， $(97\pi, 99\pi)$ ， $(-99\pi, -97\pi)$ ， $(99\pi, 101\pi)$ ， $(-101\pi, -99\pi)$ ， $(101\pi, 103\pi)$ ， $(-103\pi, -101\pi)$ ， $(103\pi, 105\pi)$ ， $(-105\pi, -103\pi)$ ， $(105\pi, 107\pi)$ ， $(-107\pi, -105\pi)$ ， $(107\pi, 109\pi)$ ， $(-109\pi, -107\pi)$ ， $(109\pi, 111\pi)$ ， $(-111\pi, -109\pi)$ ， $(111\pi, 113\pi)$ ， $(-113\pi, -111\pi)$ ， $(113\pi, 115\pi)$ ， $(-115\pi, -113\pi)$ ， $(115\pi, 117\pi)$ ， $(-117\pi, -115\pi)$ ， $(117\pi, 119\pi)$ ， $(-119\pi, -117\pi)$ ， $(119\pi, 121\pi)$ ， $(-121\pi, -119\pi)$ ， $(121\pi, 123\pi)$ ， $(-123\pi, -121\pi)$ ， $(123\pi, 125\pi)$ ， $(-125\pi, -123\pi)$ ， $(125\pi, 127\pi)$ ， $(-127\pi, -125\pi)$ ， $(127\pi, 129\pi)$ ， $(-129\pi, -127\pi)$ ， $(129\pi, 131\pi)$ ， $(-131\pi, -129\pi)$ ， $(131\pi, 133\pi)$ ， $(-133\pi, -131\pi)$ ， $(133\pi, 135\pi)$ ， $(-135\pi, -133\pi)$ ， $(135\pi, 137\pi)$ ， $(-137\pi, -135\pi)$ ， $(137\pi, 139\pi)$ ， $(-139\pi, -137\pi)$ ， $(139\pi, 141\pi)$ ， $(-141\pi, -139\pi)$ ， $(141\pi, 143\pi)$ ， $(-143\pi, -141\pi)$ ， $(143\pi, 145\pi)$ ， $(-145\pi, -143\pi)$ ， $(145\pi, 147\pi)$ ， $(-147\pi, -145\pi)$ ， $(147\pi, 149\pi)$ ， $(-149\pi, -147\pi)$ ， $(149\pi, 151\pi)$ ， $(-151\pi, -149\pi)$ ， $(151\pi, 153\pi)$ ， $(-153\pi, -151\pi)$ ， $(153\pi, 155\pi)$ ， $(-155\pi, -153\pi)$ ， $(155\pi, 157\pi)$ ， $(-157\pi, -155\pi)$ ， $(157\pi, 159\pi)$ ， $(-159\pi, -157\pi)$ ， $(159\pi, 161\pi)$ ， $(-161\pi, -159\pi)$ ， $(161\pi, 163\pi)$ ， $(-163\pi, -161\pi)$ ， $(163\pi, 165\pi)$ ， $(-165\pi, -163\pi)$ ， $(165\pi, 167\pi)$ ， $(-167\pi, -165\pi)$ ， $(167\pi, 169\pi)$ ， $(-169\pi, -167\pi)$ ， $(169\pi, 171\pi)$ ， $(-171\pi, -169\pi)$ ， $(171\pi, 173\pi)$ ， $(-173\pi, -171\pi)$ ， $(173\pi, 175\pi)$ ， $(-175\pi, -173\pi)$ ， $(175\pi, 177\pi)$ ， $(-177\pi, -175\pi)$ ， $(177\pi, 179\pi)$ ， $(-179\pi, -177\pi)$ ， $(179\pi, 181\pi)$ ， $(-181\pi, -179\pi)$ ， $(181\pi, 183\pi)$ ， $(-183\pi, -181\pi)$ ， $(183\pi, 185\pi)$ ， $(-185\pi, -183\pi)$ ， $(185\pi, 187\pi)$ ， $(-187\pi, -185\pi)$ ， $(187\pi, 189\pi)$ ， $(-189\pi, -187\pi)$ ， $(189\pi, 191\pi)$ ， $(-191\pi, -189\pi)$ ， $(191\pi, 193\pi)$ ， $(-193\pi, -191\pi)$ ， $(193\pi, 195\pi)$ ， $(-195\pi, -193\pi)$ ， $(195\pi, 197\pi)$ ， $(-197\pi, -195\pi)$ ， $(197\pi, 199\pi)$ ， $(-199\pi, -197\pi)$ ， $(199\pi, 201\pi)$ ， $(-201\pi, -199\pi)$ ， $(201\pi, 203\pi)$ ， $(-203\pi, -201\pi)$ ， $(203\pi, 205\pi)$ ， $(-205\pi, -203\pi)$ ， $(205\pi, 207\pi)$ ， $(-207\pi, -205\pi)$ ， $(207\pi, 209\pi)$ ， $(-209\pi, -207\pi)$ ， $(209\pi, 211\pi)$ ， $(-211\pi, -209\pi)$ ， $(211\pi, 213\pi)$ ， $(-213\pi, -211\pi)$ ， $(213\pi, 215\pi)$ ， $(-215\pi, -213\pi)$ ， $(215\pi, 217\pi)$ ， $(-217\pi, -215\pi)$ ， $(217\pi, 219\pi)$ ， $(-219\pi, -217\pi)$ ， $(219\pi, 221\pi)$ ， $(-221\pi, -219\pi)$ ， $(221\pi, 223\pi)$ ， $(-223\pi, -221\pi)$ ， $(223\pi, 225\pi)$ ， $(-225\pi, -223\pi)$ ， $(225\pi, 227\pi)$ ， $(-227\pi, -225\pi)$ ， $(227\pi, 229\pi)$ ， $(-229\pi, -227\pi)$ ， $(229\pi, 231\pi)$ ， $(-231\pi, -229\pi)$ ， $(231\pi, 233\pi)$ ， $(-233\pi, -231\pi)$ ， $(233\pi, 235\pi)$ ， $(-235\pi, -233\pi)$ ， $(235\pi, 237\pi)$ ， $(-237\pi, -235\pi)$ ， $(237\pi, 239\pi)$ ， $(-239\pi, -237\pi)$ ， $(239\pi, 241\pi)$ ， $(-241\pi, -239\pi)$ ， $(241\pi, 243\pi)$ ， $(-243\pi, -241\pi)$ ， $(243\pi, 245\pi)$ ， $(-245\pi, -243\pi)$ ， $(245\pi, 247\pi)$ ， $(-247\pi, -245\pi)$ ， $(247\pi, 249\pi)$ ， $(-249\pi, -247\pi)$ ， $(249\pi, 251\pi)$ ， $(-251\pi, -249\pi)$ ， $(251\pi, 253\pi)$ ， $(-253\pi, -251\pi)$ ， $(253\pi, 255\pi)$ ， $(-255\pi, -253\pi)$ ， $(255\pi, 257\pi)$ ， $(-257\pi, -255\pi)$ ， $(257\pi, 259\pi)$ ， $(-259\pi, -257\pi)$ ， $(259\pi, 261\pi)$ ， $(-261\pi, -259\pi)$ ， $(261\pi, 263\pi)$ ， $(-263\pi, -261\pi)$ ， $(263\pi, 265\pi)$ ， $(-265\pi, -263\pi)$ ， $(265\pi, 267\pi)$ ， $(-267\pi, -265\pi)$ ， $(267\pi, 269\pi)$ ， $(-269\pi, -267\pi)$ ， $(269\pi, 271\pi)$ ， $(-271\pi, -269\pi)$ ， $(271\pi, 273\pi)$ ， $(-273\pi, -271\pi)$ ， $(273\pi, 275\pi)$ ， $(-275\pi, -273\pi)$ ， $(275\pi, 277\pi)$ ， $(-277\pi, -275\pi)$ ， $(277\pi, 279\pi)$ ， $(-279\pi, -277\pi)$ ， $(279\pi, 281\pi)$ ， $(-281\pi, -279\pi)$ ， $(281\pi, 283\pi)$ ， $(-283\pi, -281\pi)$ ， $(283\pi, 285\pi)$ ， $(-285\pi, -283\pi)$ ， $(285\pi, 287\pi)$ ， $(-287\pi, -285\pi)$ ， $(287\pi, 289\pi)$ ， $(-289\pi, -287\pi)$ ， $(289\pi, 291\pi)$ ， $(-291\pi, -289\pi)$ ， $(291\pi, 293\pi)$ ， $(-293\pi, -291\pi)$ ， $(293\pi, 295\pi)$ ， $(-295\pi, -293\pi)$ ， $(295\pi, 297\pi)$ ， $(-297\pi, -295\pi)$ ， $(297\pi, 299\pi)$ ， $(-299\pi, -297\pi)$ ， $(299\pi, 301\pi)$ ， $(-301\pi, -299\pi)$ ， $(301\pi, 303\pi)$ ， $(-303\pi, -301\pi)$ ， $(303\pi, 305\pi)$ ， $(-305\pi, -303\pi)$ ， $(305\pi, 307\pi)$ ， $(-307\pi, -305\pi)$ ， $(307\pi, 309\pi)$ ， $(-309\pi, -307\pi)$ ， $(309\pi, 311\pi)$ ， $(-311\pi, -309\pi)$ ， $(311\pi, 313\pi)$ ， $(-313\pi, -311\pi)$ ， $(313\pi, 315\pi)$ ， $(-315\pi, -313\pi)$ ， $(315\pi, 317\pi)$ ， $(-317\pi, -315\pi)$ ， $(317\pi, 319\pi)$ ， $(-319\pi, -317\pi)$ ， $(319\pi, 321\pi)$ ， $(-321\pi, -319\pi)$ ， $(321\pi, 323\pi)$ ， $(-323\pi, -321\pi)$ ， $(323\pi, 325\pi)$ ， $(-325\pi, -323\pi)$ ， $(325\pi, 327\pi)$ ， $(-327\pi, -325\pi)$ ， $(327\pi, 329\pi)$ ， $(-329\pi, -327\pi)$ ， $(329\pi, 331\pi)$ ， $(-331\pi, -329\pi)$ ， $(331\pi, 333\pi)$ ， $(-333\pi, -331\pi)$ ， $(333\pi, 335\pi)$ ， $(-335\pi, -333\pi)$ ， $(335\pi, 337\pi)$ ， $(-337\pi, -335\pi)$ ， $(337\pi, 339\pi)$ ， $(-339\pi, -337\pi)$ ， $(339\pi, 341\pi)$ ， $(-341\pi, -339\pi)$ ， $(341\pi, 343\pi)$ ， $(-343\pi, -341\pi)$ ， $(343\pi, 345\pi)$ ， $(-345\pi, -343\pi)$ ， $(345\pi, 347\pi)$ ， $(-347\pi, -345\pi)$ ， $(347\pi, 349\pi)$ ， $(-349\pi, -347\pi)$ ， $(349\pi, 351\pi)$ ， $(-351\pi, -349\pi)$ ， $(351\pi, 353\pi)$ ， $(-353\pi, -351\pi)$ ， $(353\pi, 355\pi)$ ， $(-355\pi, -353\pi)$ ， $(355\pi, 357\pi)$ ， $(-357\pi, -355\pi)$ ， $(357\pi, 359\pi)$ ， $(-359\pi, -357\pi)$ ， $(359\pi, 361\pi)$ ， $(-361\pi, -359\pi)$ ， $(361\pi, 363\pi)$ ， $(-363\pi, -361\pi)$ ， $(363\pi, 365\pi)$ ， $(-365\pi, -363\pi)$ ， $(365\pi, 367\pi)$ ， $(-367\pi, -365\pi)$ ， $(367\pi, 369\pi)$ ， $(-369\pi, -367\pi)$ ， $(369\pi, 371\pi)$ ， $(-371\pi, -369\pi)$ ， $(371\pi, 373\pi)$ ， $(-373\pi, -371\pi)$ ， $(373\pi, 375\pi)$ ， $(-375\pi, -373\pi)$ ， $(375\pi, 377\pi)$ ， $(-377\pi, -375\pi)$ ， $(377\pi, 379\pi)$ ， $(-379\pi, -377\pi)$ ， $(379\pi, 381\pi)$ ， $(-381\pi, -379\pi)$ ， $(381\pi, 383\pi)$ ， $(-383\pi, -381\pi)$ ， $(383\pi, 385\pi)$ ， $(-385\pi, -383\pi)$ ， $(385\pi, 387\pi)$ ， $(-387\pi, -385\pi)$ ， $(387\pi, 389\pi)$ ， $(-389\pi, -387\pi)$ ， $(389\pi, 391\pi)$ ， $(-391\pi, -389\pi)$ ， $(391\pi, 393\pi)$ ， $(-393\pi, -391\pi)$ ， $(393\pi, 395\pi)$ ， $(-395\pi, -393\pi)$ ， $(395\pi, 397\pi)$ ， $(-397\pi, -395\pi)$ ， $(397\pi, 399\pi)$ ， $(-399\pi, -397\pi)$ ， $(399\pi, 401\pi)$ ， $(-401\pi, -399\pi)$ ， $(401\pi, 403\pi)$ ， $(-403\pi, -401\pi)$ ， $(403\pi, 405\pi)$ ， $(-405\pi, -403\pi)$ ， $(405\pi, 407\pi)$ ， $(-407\pi, -405\pi)$ ， $(407\pi, 409\pi)$ ， $(-409\pi, -407\pi)$ ， $(409\pi, 411\pi)$ ， $(-411\pi, -409\pi)$ ， $(411\pi, 413\pi)$ ， $(-413\pi, -411\pi)$ ， $(413\pi, 415\pi)$ ， $(-415\pi, -413\pi)$ ， $(415\pi, 417\pi)$ ， $(-417\pi, -415\pi)$ ， $(417\pi, 419\pi)$ ， $(-419\pi, -417\pi)$ ， $(419\pi, 421\pi)$ ， $(-421\pi, -419\pi)$ ， $(421\pi, 423\pi)$ ， $(-423\pi, -421\pi)$ ， $(423\pi, 425\pi)$ ， $(-425\pi, -423\pi)$ ， $(425\pi, 427\pi)$ ， $(-427\pi, -425\pi)$ ， $(427\pi, 429\pi)$ ， $(-429\pi, -427\pi)$ ， $(429\pi, 431\pi)$ ， $(-431\pi, -429\pi)$ ， $(431\pi, 433\pi)$ ， $(-433\pi, -431\pi)$ ， $(433\pi, 435\pi)$ ， $(-435\pi, -433\pi)$ ， $(435\pi, 437\pi)$ ， $(-437\pi, -435\pi)$ ， $(437\pi, 439\pi)$ ， $(-439\pi, -437\pi)$ ， $(439\pi, 441\pi)$ ， $(-441\pi, -439\pi)$ ， $(441\pi, 443\pi)$ ， $(-443\pi, -441\pi)$ ， $(443\pi, 445\pi)$ ， $(-445\pi, -443\pi)$ ， $(445\pi, 447\pi)$ ， $(-447\pi, -445\pi)$ ， $(447\pi, 449\pi)$ ， $(-449\pi, -447\pi)$ ， $(449\pi, 451\pi)$ ， $(-451\pi, -449\pi)$ ， $(451\pi, 453\pi)$ ， $(-453\pi, -451\pi)$ ， $(453\pi, 455\pi)$ ， $(-455\pi, -453\pi)$ ， $(455\pi, 457\pi)$ ， $(-457\pi, -455\pi)$ ， $(457\pi, 459\pi)$ ， $(-459\pi, -457\pi)$ ， $(459\pi, 461\pi)$ ， $(-461\pi, -459\pi)$ ， $(461\pi, 463\pi)$ ， $(-463\pi, -461\pi)$ ， $(463\pi, 465\pi)$ ， $(-465\pi, -463\pi)$ ， $(465\pi, 467\pi)$ ， $(-467\pi, -465\pi)$ ， $(467\pi, 469\pi)$ ， $(-469\pi, -467\pi)$ ， $(469\pi, 471\pi)$ ， $(-471\pi, -469\pi)$ ， $(471\pi, 473\pi)$ ， $(-473\pi, -471\pi)$ ， $(473\pi, 475\pi)$ ， $(-475\pi, -473\pi)$ ， $(475\pi, 477\pi)$ ， $(-477\pi, -475\pi)$ ， $(477\pi, 479\pi)$ ， $(-479\pi, -477\pi)$ ， $(479\pi, 481\pi)$ ， $(-481\pi, -479\pi)$ ， $(481\pi, 483\pi)$ ， $(-483\pi, -481\pi)$ ， $(483\pi, 485\pi)$ ， $(-485\pi, -483\pi)$ ， $(485\pi, 487\pi)$ ， $(-487\pi, -485\pi)$ ， $(487\pi, 489\pi)$ ， $(-489\pi, -487\pi)$ ， $(489\pi, 491\pi)$ ， $(-491\pi, -489\pi)$ ， $(491\pi, 493\pi)$ ， $(-493\pi, -491\pi)$ ， $(493\pi, 495\pi)$ ， $(-495\pi, -493\pi)$ ， $(495\pi, 497\pi)$ ， $(-497\pi, -495\pi)$ ， $(497\pi, 499\pi)$ ， $(-499\pi, -497\pi)$ ， $(499\pi, 501\pi)$ ， $(-501\pi, -499\pi)$ ， $(501\pi, 503\pi)$ ， $(-503\pi, -501\pi)$ ， $(503\pi, 505\pi)$ ， $(-505\pi, -503\pi)$ ， $(505\pi, 507\pi)$ ， $(-507\pi, -505\pi)$ ， $(507\pi, 509\pi)$ ， $(-509\pi, -507\pi)$ ， $(509\pi, 511\pi)$ ， $(-511\pi, -509\pi)$ ， $(511\pi, 513\pi)$ ， $(-513\pi, -511\pi)$ ， $(513\pi, 515\pi)$ ， $(-515\pi, -513\pi)$ ， $(515\pi, 517\pi)$ ， $(-517\pi, -515\pi)$ ， $(517\pi, 519\pi)$ ， $(-519\pi, -517\pi)$ ， $(519\pi, 521\pi)$ ， $(-521\pi, -519\pi)$ ， $(521\pi, 523\pi)$ ， $(-523\pi, -521\pi)$ ， $(523\pi, 525\pi)$ ， $(-525\pi, -523\pi)$ ， $(525\pi, 527\pi)$ ， $(-527\pi, -525\pi)$ ， $(527\pi, 529\pi)$ ， $(-529\pi, -527\pi)$ ， $(529\pi, 531\pi)$ ， $(-531\pi, -529\pi)$ ， $(531\pi, 533\pi)$ ， $(-533\pi, -531\pi)$ ， $(533\pi, 535\pi)$ ， $(-535\pi, -533\pi)$ ， $(535\pi, 537\pi)$ ， $(-537\pi, -535\pi)$ ， $(537\pi, 539\pi)$ ， $(-539\pi, -537\pi)$ ， $(539\pi, 541\pi)$ ， $(-541\pi, -539\pi)$ ， $(541\pi, 543\pi)$ ， $(-543\pi, -541\pi)$ ， $(543\pi, 545\pi)$ ， $(-545\pi, -543\pi)$ ， $(545\pi, 547\pi)$ ， $(-547\pi, -545\pi)$ ， $(547\pi, 549\pi)$ ， $(-549\pi, -547\pi)$ ， $(549\pi, 551\pi)$ ， $(-551\pi, -549\pi)$ ， $(551\pi, 553\pi)$ ， $(-553\pi, -551\pi)$ ， $(553\pi, 555\pi)$ ， $(-555\pi, -553\pi)$ ， $(555\pi, 557\pi)$ ， $(-557\pi, -555\pi)$ ， $(557\pi, 559\pi)$ ， $(-559\pi, -557\pi)$ ， $(559\pi, 561\pi)$ ， $(-561\pi, -559\pi)$ ， $(561\pi, 563\pi)$ ， $(-563\pi, -561\pi)$ ， $(563\pi, 565\pi)$ ， $(-565\pi, -563\pi)$ ， $(565\pi, 567\pi)$ ， $(-567\pi, -565\pi)$ ， $(567\pi, 569\pi)$ ， $(-569\pi, -567\pi)$ ， $(569\pi, 571\pi)$ ， $(-571\pi, -569\pi)$ ， $(571\pi, 573\pi)$ ， $(-573\pi, -571\pi)$ ， $(573\pi, 575\pi)$ ， $(-575\pi, -573\pi)$ ， $(575\pi, 577\pi)$ ， $(-577\pi, -575\pi)$ ， $(577\pi, 579\pi)$ ， $(-579\pi, -577\pi)$ ， $(579\pi, 581\pi)$ ，

物像, 如附图.



2. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上, 给定函数 $f(x) = x$, 试求出它的傅里叶级数.

(解) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 所以

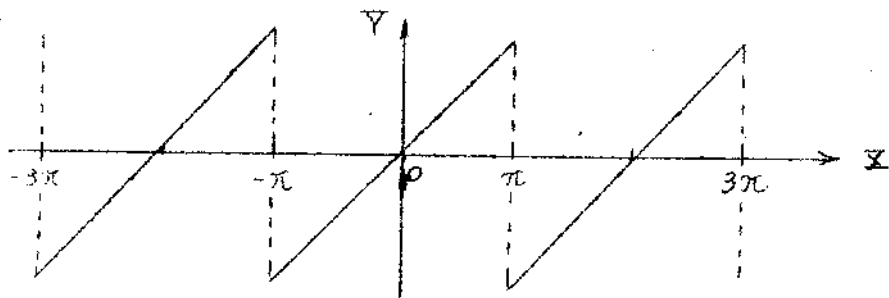
$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

所以 x 的傅里叶级数是

$$2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) \quad (2)$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的图, 周期性地延拓以后, 如以下附图.



(注意) 在第一个例题里面, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 又 $f'(x)$ 也连续. 这时我们就说函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是光滑的; 如果把区间 $[-\pi, \pi]$ 分成有限个子区间, 而函数在每一个子区间上是光滑的, 我们就说函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是逐段光滑的. 如果区间是任意的 $[a, b]$ 也一样.

§7-3-4. 基本定理 由以上举例我们看到，当区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 已给定的时候，我们如果能够给出傅立叶级数 $(a_n \text{ 和 } b_n \text{ 等})$ ，就可以写出该函数的傅立叶级数，写出以后，能否保证级数收敛为该函数，要看该函数是否具备一定的解析条件来决定。这种条件由以下两个定理来叙述：

定理一 如果函数 $f(x)$ 是区间 $[-\pi, \pi]$ 上的逐段光滑函数，那么它的傅立叶级数在该区间上任意一点 x 处收敛为

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2};$$

在区间两端处，级数的和也等于

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2},$$

其中 $f(-\pi+0)$ 及 $f(\pi-0)$ 是当变点 x 从区间内部分别趋近于左右两个端点时函数的极限值。

(注意) 这个定理是在阐明函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可以有有限个有限型间断点，这些间断点把区间 $[-\pi, \pi]$ 分割成若干个子区间，在每一个子区间上函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 都是连续的；当这种条件满足时，级数在各连续点处收敛为函数 $f(x)$ 本身；在间断点处，收敛为 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ 。在例1里面，级数处处收敛为 x^2 ；在例2里面，在点 $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ 处，级数都收敛为 0，这是因为 $f(\pi-0) = \pi$ ， $f(\pi+0) = -\pi$ 的缘故。

因此在特殊情况下，定理可以改写如下：

如果函数 $f(x)$ 是区间 $[-\pi, \pi]$ 上的光滑函数，则在开区间 $(-\pi, \pi)$ 上任一点处，级数收敛为函数 $f(x)$ ；如果在区间两端点处函数值也相等，则在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上级数收敛为函数 $f(x)$ 。

定理二 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上具有有限个极值点，并且除了可能有有限个第一类间断点以外，函数在其他各点处是连续的，则 $f(x)$ 的富立叶级数在区间 $(-\pi, \pi)$ 上每一点 x 处收敛为 $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ ；在区间两端处，级数的和也等于 $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ 。

在特殊情况，定理可改写如下：

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上连续且有有限个极值点，那么它在区间 $(-\pi, \pi)$ 上可展为富立叶级数；如果在区间端点处的函数值是相等的，那么展式在全区间 $(-\pi, \pi)$ 上都成立。

(注意一) 这两个定理适用于很广泛的一类函数，常碰到的函数都满足这两个定理的条件，但在应用时，仍应仔细检查所给函数是否符合第一或第二定理的条件。

(注意二) 在 §7-3-3 的例 1 里面，级数 (1) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上收敛为 x^2 ；级数 (2) 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上收敛为函数 x ，可以用等号来表达收敛关系。

§7-3-5. 任意区间上的富立叶级数 如果给定的函数 $f(x)$ 是在任意区间 $[-l, l]$ 上的函数，其中 l 是任意正数，那么当这个函数满足上述定理一或定理二的条件的时候，只要用换置公式

$$x' = \frac{\pi}{l} x$$

后，就可以得出富立叶级数，而把函数展成级数。

$$\text{此时 } f(x) = f\left(\frac{\pi}{l} x'\right) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx' + b_n \sin nx')$$

$$\text{或 } f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

其中
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) \cos nx' dx' = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) \sin nx' dx' = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

(例见 §7-3-7)

§7-3-6. 奇函数及偶函数的傅立叶级数. 如果给定的函数 $f(x)$ 是奇函数, 这时 $f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x$ 也是奇函数, 于是所有的系数 a_k 都等于 0. 又

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

所以展开的级数是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

其中缺余弦的项

如果给定的函数 $f(x)$ 是偶函数, 这时 $f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x$ 是奇函数, 因而所有的系数 b_k 都是 0, 又

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

展开所得级数是

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

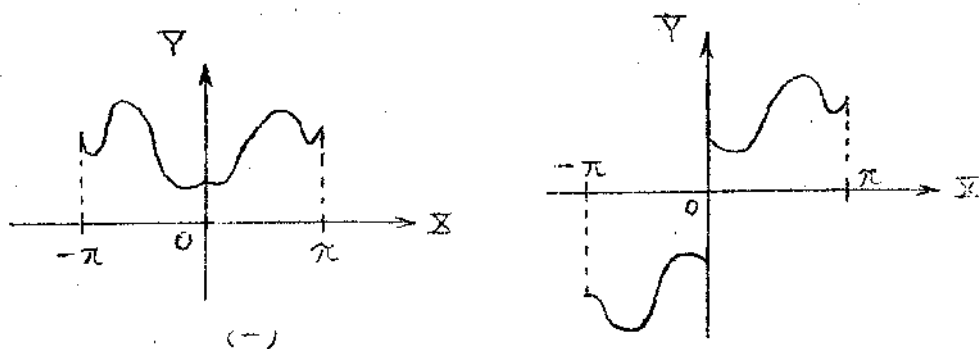
其中缺正弦的项.

在 §7-3-4. 例 1 是偶函数级数 (1) 缺正弦项; 例 2 是奇函数级数 (2) 缺余弦项; 如果 $f(x)$ 是非奇非偶的函数, 那么在展开的级数里面, 一般不缺正弦项或余弦项 (习题 7-3-甲的第一题).

§7-3-7 奇式延续及偶式延续 如果在区间 $(0, \pi]$ 上给定了函数 $f(x)$, 再附加上适当的条件, 求出奇式或偶式延续.

必須先把函数 $f(x)$ 偶式延续 (或奇式延续) 到区间 $[-\pi, 0]$ 上面去. 所謂偶式延续, 就是把函数图形对称于 Y 轴而延展到区间 $[-\pi, 0]$ 上使得在全部区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 给定的函数是偶函数 (附图一).

所謂奇式延续, 就是把函数图形对称于原点延展到区间 $[-\pi, 0]$ 上, 使得在全部区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 给定的函数是奇函数 (附图二).



我們也可在区间 $[-\pi, 0]$ 上增補任何一个符合定理一或定理二的函数, 使得在全部区间 $[-\pi, \pi]$ 上, 形成非奇非偶的一个函数 $F(x)$, 这个函数可以是各式各样的, 不过它们在区间 $(0, \pi]$ 上的那部分是相同的.

不拘用何种方式延续, 都可以得出无穷级数, 因此区间 $(0, \pi]$ 上给定了一个函数, 延续后, 可以展开成无数个富里叶级数.

(例) 3. 在开区间 $(0, \pi)$ 上, 给定函数 $f(x)=1$, 試用奇式延续展开成级数.

(解) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的奇式延续和在全部 x 轴上的週期延续, 由附图上可以看得清楚.

